Exercice I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La rédaction ne mentionne pas par produit, somme de limites, et croissances comparées : c'est un tort.

Pour la question 2a), il est souhaitable de dire : f(x) =u(x)v(x) avec : ...... et de rappeler la formule de dérivation d'un produit.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x$ donc

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = \left(-x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + 1, \text{ et donc}$$

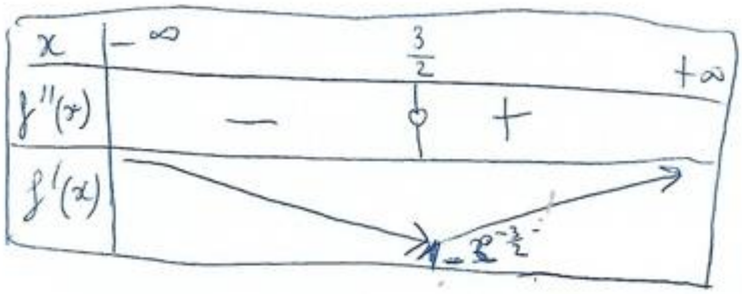
$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

b. Le signe de f'' donne les variations de f'.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante ;
- Si $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante ;
- Si $x = \dfrac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à
  $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

On dresse le tableau de variation de f’ (sans les limites) :



c. La fonction f' admet pour minimum

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx -2{,}36 < 0 \\ f(0) = 0{,}5 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-1\,;\,0]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}3) \approx -0{,}03 < 0 \\ f(-0{,}2) \approx 0{,}17 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0{,}3\,;\,-0{,}2]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}29) \approx -0{,}009 < 0 \\ f(-0{,}28) \approx 0{,}011 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0{,}29\,;\,-0{,}28]$$

Il en résulte qu'une valeur approchée de $\propto$ au dixième près est : -0,3.

Remarque : avant d'attaquer la question d), il est souhaitable de dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

f.

D'après la question b., f' décroit sur]-∞ ; 3/2], donc par critère du cours, f est concave sur]-∞ ; 3/2], et f' croit sur [3/2 ; +∞[, donc par critère du cours, f est convexe sur[3/2 ; +∞[.

Exercice II

1)

c) $u_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$

$u_{n+1} = \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$

Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}$

$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)} = \boxed{\frac{4n+2}{n+1}}$

Pour $n>0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(4+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

Par limite de référence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par limites de somme, produit et quotient

on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4}$.

2)

$$B = \frac{8!-7!}{8!+7!} = \frac{8*7!-7!}{8*7!+7!} = \frac{7!(8-1)}{7!(8+1)} = \frac{7}{9}.$$

3)

) $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq p \leq n$, donc :

$$\boxed{G} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{n-p} = \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}} \times \frac{\cancel{(n-k)!}}{(n-p)!(n-k-(n-p))!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-p)!(p-k)!}}$$

et $$\boxed{D} = \binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \frac{n!}{\cancel{p!}(n-p)!} \times \frac{\cancel{p!}}{k!(p-k)!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-p)!(p-k)!}}$$

Ainsi $G = D$, de sorte que : $\boxed{\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{n-p} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}}$

Exercice III

27 **a)** Il s'agit de dénombrer les couples d'éléments distincts d'un ensemble à 4 éléments.

Le nombre de telles séquences est donc :

$$4 \times 3 = 12.$$

b) AC, AG, AT, CA, CG, CT,
GA, GC, GT, TA, TC, TG

c) Trois nucléotides :
ACG, ACT, AGC, AGT, ATC, ATG,
CAG, CAT, CGA, CGT, CTA, CTG
GAC, GAT, GCA, GCT, GTA, GTC
TAC, TAG, TCA, TCG, TGA, TGC
Quatre nucléotides :
ACGT, ACTG, AGCT, AGTC, ATCG, ATGC,
CAGT, CATG, CGAT, CGTA, CTAG, CTGA
GACT, GATC, GCAT, GCTA, GTAC, GTCA
TACG, TAGC, TCAG, TCGA, TGAC, TGCA

Exercice IV

33 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 12 éléments.

Ce nombre est $12! = 479\,001\,600$.

b) Le nombre de façons de ranger, tout d'abord, les copies des 7 filles, est $7!$. Pour chacune de ces façons de les ranger, il y a $5!$ façons de ranger les copies des 5 garçons. Le nombre total de telles façons de ranger les 12 copies est donc $7! \times 5! = 604\,800$.

c) Si on commence par les copies des garçons, le nombre de façons de ranger les 12 copies est $5! \times 7!$, ce qui donne le même résultat qu'à la question précédente.

Exercice V

72 Le nombre de façons de constituer le groupe A est le nombre de combinaisons de 16 éléments parmi 32 : $\binom{32}{16} = 601\,080\,390$.

Le nombre de groupes possibles qui comportent exactement autant de filles que de garçons est $\binom{20}{8} \times \binom{12}{8} = 62\,355\,150$. Ce n'est pas la moitié du nombre total de groupes possibles, donc Marina a tort.

Exercice VI

1) a) $\binom{36}{4} = \frac{36!}{4!32!} = \frac{36\times35\times34\times33\times32!}{24\times32!}$ = 58905 comités de 4 personnes. (Autant que de parties à 4 éléments pris dans un ensemble de cardinal 36).

b) $\binom{20}{2} \times \binom{16}{2} = \frac{20\times19}{2} \times \frac{16\times15}{2}$ = $10 \times 19 \ \times 8 \times 15 = 22800$ comités qui respectent la parité.

c) Dans un comité de 4 personnes, plus de filles que de garçons signifie : 4 filles, ou bien 3 filles et un garçon.

Donc (union disjointe) : $\binom{20}{4} + \binom{20}{3} \times \binom{16}{1}$ = 4845+18240=23085 comités de quatre personnes sont constitués de plus de filles que de garçons.

2a) Ici l'ordre compte car on attribue une fonction différente à chacun des membres du comité.

$36 \times 35 \times 34 \times 33 = 1413720$ comités de 4 personnes avec rôle.

2b)-Il y a 4 ! = 24 permutations des rôles des membres de ce comité.

A chaque permutation correspond, d'après la question 1b), 22800 comités avec parité. Donc par principe multiplicatif, il y a : 24 ×22800 = 547200 comités avec parité et rôle.

Exercice VII

70 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1(2n-2)\ldots(n+1)}{n!}$.

b) S'il y a exactement p boules blanches, alors il y exactement n - p boules rouges.

Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$.

Or par symétrie des nombres de combinaisons, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Donc le nombre de tirages avec p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) Un tirage peut comporter entre 0 et n boules blanches.

Donc la somme $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$ est égale au nombre total de tirages, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

(Cardinal d'une union disjointe ici).

Exercice VIII

a) $4! = 24$ car pas de lettres répétées donc cela revient à permuter les 4 lettres du mot TINA.

b) ABOIEMENT : 9 lettres dont 2 E (répétition du E).
on place les deux E : $\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ placements possibles.
Reste à permuter les 7 lettres restantes sur les 7 places : $7! = 5040$ possibilités.
Par p^{ce} x, il y a $N = 36 \times 5040 = 181440$ anagrammes du mot ABOIEMENT

c) On va faire une disjonction de cas selon que le mot de 4 lettres contienne 0, 1 ou 2 E.
Si le mot de 4 lettres ne contient aucun E, alors on doit faire un 4 arrangement d'un ensemble à ~~7~~ éléments : $\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} = \cancel{840}$ mots de quatre lettres sans E.

Si le mot de 4 lettres contient un seul E : on le place : $\binom{4}{1} = 4$ places possibles, il reste ensuite à arranger 3 lettres distinctes prises parmi les 7 non répétées, donc $7 \times 6 \times 5 = 210$ façons, donc par p^{ce} x, on a : $4 \times 210 = 840$ mots avec un seul E.

Si le mot de quatre lettres contient deux E :

On les place : $\binom{4}{2} = 6$ façons de les mettre sur 4 positions.

Reste à placer deux lettres distinctes sur les deux positions restantes (2-Arrangement) : $7 \times 6 = 42$ possibilités

donc $6 \times 42 = 252$ mots de 4 lettres ont deux E.

Par principe additif (union disjointe) on a :

$N = 840 + 840 + 252 = 1932$ mots de 4 lettres en prenant les dernières dans celles du mot ABOIEMENT.

d) Les consonnes sont ici M, S, P, donc le mot commence par M, N ou P.

Anagrammes de MISSISIPI commençant par M : On place les 4 I sur les $10-1=9$ places restantes derrière le M : $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times\cancel{6}}{2\cancel{4}} = 126$ possibilités.

On place les 4 S sur les $10-5$ places restantes : $\binom{5}{4} = 5$ possibilités.

Les P sont alors placés

donc $126 \times 5 = 630$ anagrammes commençant par M.

Le rôle des lettres M et P est identique, car non répétées : 630 anagrammes commençant par P.

Reste à dénombrer les anagrammes qui commencent par S : S*********.

On doit encore placer 3 S sur 9 positions : $\binom{9}{3} = 84$ possibilités.

Puis 4 I sur 6 positions : $\binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{720}{2\times24} = 15$ possibilités.

Reste à placer M et P sur deux places restantes : 2 possibilités.

donc $84 \times 15 \times 2 = 2520$ anagrammes commençant par la lettre S.

Au total on a : $630 + 630 + 2520 = 3780$

anagrammes de MISSISSIPI qui commencent par une consonne.

Exercice IX

Il y a 12! façons de garer les 12 voitures en bataille.
Il y a 10 choix pour trois places côte à côte : En numérotant les places : $\boxed{1\ 2\ 3}$ $\boxed{2\ 3\ 4}$ ---- etc. $\boxed{10\ 11\ 12}$.
Une fois choisies les 3 places consécutives, on range les 3 véhicules rouges au sein de ces places : 3! permutations.
Reste à placer 12-3 = 9 voitures sur 9 places restantes : 9! possibles.
Par p^{ce} X, il y a : $10 \times 3! \times 9!$ "Cas favorables = voitures rouges à côté".
La probabilité cherchée est : $p = \dfrac{10 \times 3! \times 9!}{12!} = \dfrac{\cancel{10} \times 6 \times \cancel{9!}}{12 \times 11 \times \cancel{10} \times \cancel{9!}} = \boxed{\dfrac{1}{22}}$

Exercice X

45 **1.** Une main est une combinaison de cinq cartes parmi 52. Le nombre total de mains est donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

2. a) Une couleur en cœur est une combinaison de cinq cartes parmi les 13 cartes de cœur. Le nombre de mains de ce type est $\binom{13}{5} = 1287$.

b) Il y a quatre familles donc le nombre total de « couleurs » est $1287 \times 4 = 5148$.

3. a) Pour un carré de 10, la cinquième carte peut être n'importe laquelle des 48 cartes restantes.

Il y a donc 48 mains de ce type.

b) Il y a 13 possibilités pour la carte qui sera répétée quatre fois dans le carré, et dans chacun de ces cas 48 possibilités pour la cinquième carte. Le nombre total de carrés est donc $13 \times 48 = 624$.

4)

La quinte flush

– Avec un jeu de 52 cartes : il faut choisir la figure du début 10 choix (de l'as au 10) et la couleur, 4 choix. On a donc :

$$10 \times 4 = 40 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir une quinte flush dans une main de 5 cartes, on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 0,0015 %.

5)

Le full

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 puis on choisit la figure des deux cartes identiques soit 12 choix puis on en choisit 2 parmi les 4, on a donc :

$$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3\,744 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un full entre les mains est 3744/2598960 soit environ 0,0014 ou 0,14 %.

6)

Le brelan

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 enfin on prend 2 autres cartes dans les 48 restantes sans oublier d'enlever les fulls :

$$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3744 = 13 \times 4 \times 1128 - 3744 = 54\,912 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un brelan dans une main on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 2,1 %.

7)

La double paires

– Avec un jeu de 52 cartes : On choisit les deux jeux de paires parmi les 13 figures, puis on choisit deux fois deux cartes parmi ces deux jeux et enfin une carte parmi les 44 restante, on a donc :

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123\,552 \quad \text{combinaisons}$$

La probabilité d'avoir une double paire est 123552/2598960 soit environ 0,048 ou 4,8 %.

Exercice XI

1) a) D_1 est le nombre de dérangements de E lorsque E est un ensemble de cardinal 1.

Donc E est un singleton, il a un unique élément : $E = \{x_1\}$ Bien

→ Il y a donc $1! = 1$ permutation des éléments de E qui est définie par $\sigma(x_1) = x_1$. L'unique élément de E est donc forcément un point fixe.

Ainsi il n'existe aucune permutation de E n'ayant aucun point fixe donc aucun dérangement de E : $\underline{D_1 = 0}$ Bien

b) $E = \{x_1 ; x_2\}$; $card(E) = 2$, donc il y a $2! = 2$ permutations

$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{D_2 = 1}$

c) $E = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$; $card(E) = 3$, donc il y a $3! = 6$ permutations

$\sigma(E) = \{(x_1;x_2;x_3) ; (x_1;x_3;x_2) ; (x_2;x_1;x_3) ; (x_2;x_3;x_1) ; (x_3;x_1;x_2) ; (x_3;x_2;x_1)\}$

donc $\underline{D_3 = 2}$ Oui

2) a) U_k : nombre de permutation de E ayant k points fixes $(0 \leq k \leq n)$

Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes. Une fois ces choix effectués, la permutation des $n-k$ éléments restants est une permutation sans point fixe, soit D_{n-k} dérangements possibles.

Bien

Très Bien

Donc le nombre de permutation ayant k points fixes noté U_k vaut $\binom{n}{k} \times D_{n-k}$

$\boxed{U_k = \binom{n}{k} \times D_{n-k}}$ Oui

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \underline{n!}$ (nombre de permutations total)

c) • $\underline{n = 4}$ $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \times D_{4-k} = 4!$

$\binom{4}{0} D_4 + \binom{4}{1} D_3 + \binom{4}{2} D_2 + \binom{4}{3} D_1 + \binom{4}{4} D_0 = 24$

$\Leftrightarrow \underline{D_4} = 24 - 4D_3 - 6D_2 - 4D_1 - D_0 = 24 - 8 - 6 - 0 - 1 = \underline{9}$ Bien

• $\underline{n = 5}$ $D_5 = 5! - \binom{5}{1} D_4 - \binom{5}{2} D_3 - \binom{5}{3} D_2 - \binom{5}{4} D_1 - \binom{5}{5} D_0$

$D_5 = 120 - 5D_4 - 10D_3 - 10D_2 - 5D_1 - D_0 = 120 - 45 - 20 - 10 - 1 = \underline{44}$

Oui

• $\underline{n = 6}$ $D_6 = 6! - \binom{6}{1} D_5 - \binom{6}{2} D_4 - \binom{6}{3} D_3 - \binom{6}{4} D_2 - \binom{6}{5} D_1 - \binom{6}{6} D_0$

- $D_7 = !7 = 1854$ Précisez votre notation ? $D_9 = !9 = 133\,496$
- $D_8 = !8 = 14\,833$ $D_{10} = !10 = 1\,334\,961$

3) - Il y a D_{10} possibilités qu'aucune des personnes ne reparte avec son chapeau et il y a $10!$ possibilités de permutations Oui

$p_1 = \frac{D_{10}}{10!} = \frac{!10}{10!} = \frac{1\,334\,961}{3\,628\,800} \simeq 0,37 \simeq 37\,\%$ Oui

La probabilité qu'aucune des personnes ne reparte avec le chapeau avec lequel elle était arrivée est de 0,37 Bien

- L'évènement contraire de "au moins une des personnes repart avec le chapeau avec lequel elle était arrivée" est celui défini précédemment. Oui

$p_2 = 1 - \frac{D_{10}}{10!} = 1 - \frac{1\,334\,961}{3\,628\,800} \simeq 0,63 \simeq 63\,\%$

- La probabilité qu'il y ait au moins une personne est 1,7 fois plus importante que celle qu'il n'y ait personne Oui

Exercice XII

1)

$\Omega = [\![n\ ;\ +\infty]\!]$: en effet, n est fixé, il faut au minimum n lancers pour obtenir n piles !

Soit k un entier supérieur ou égal à n. On veut donc obtenir le n-ième pile lors du lancer numéro k.

Cela impose donc d'avoir obtenu n – 1 piles au cours des k – 1 premiers lancers et pile lors du lancer numéro k. Par indépendance des lancers, on utilise le principe multiplicatif :

P(X=k) = $\binom{n-1}{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-(k-1)} \times \frac{1}{2} = \binom{n-1}{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

2)

a) $p \geq 1$.

Soit $m, m+1, \ldots, m+p-1$ p entiers consécutifs.

et $K = m(m+1)\cdots(m+p-1)$: $(K \in \mathbb{N})$

Si $m=0$, $K=0$ est évidemment divisible par $p!$

Si $m \geq 1$, $K = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!}$. Or $\binom{m+p-1}{m-1} = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!\,(m+p-1-(m-1))!}$

$\binom{m+p-1}{m-1} = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!\,p!}$

donc $\frac{(m+p-1)!}{(m-1)!} = p!\binom{m+p-1}{m-1}$

$K = p!\binom{m+p-1}{m-1}$. Vu que $\binom{m+p-1}{m-1} \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ et $p! \in \mathbb{N}^*$

on a que $p!$ divise K.

3) $\binom{n}{p}$: on choisit d'abord p élément parmi n, et il y a une seule façon de classer ces p éléments par ordre strictement croissant vu qu'ils sont 2 à 2 distincts.