Exercice I

a) • Par limite de référence du cours sur les croissances comparées :

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

⇒ Donc par limite de référence et de produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{x} = 0}$

b) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par somme pour $2x - e^{x}$!

On factorise par x : $2x - e^{x} = x\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right)$

• Par limites de référence : • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

• Par limite de somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right) = -\infty$

⇒ Donc par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2 - \frac{e^{x}}{x}\right) = -\infty$ ⇒ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - e^{x}) = -\infty}$ Oui

c) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par produit pour xe^{-x} !

Or, $xe^{-x} = x \times \frac{1}{e^{x}} = \frac{x}{e^{x}}$, et par limite de référence du cours on sait que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

Or, $\frac{x}{e^{x}} = \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}}$, donc par limite de quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$ ⇒ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = 0}$ Oui

d) On a une forme indéterminée en $+\infty$ par quotient pour $\frac{e^{x}}{2x^{2}}$!

Or, $-1 + \frac{e^{x}}{2x^{2}} = -1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}$ Oui

• Par limite de référence du cours sur les croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$

• Par limite de produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}\right) = +\infty$

⇒ Donc par limite de somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{1}{2} \times \frac{e^{x}}{x^{2}}\right) = +\infty$ ⇒ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{e^{x}}{2x^{2}}\right) = +\infty}$ Oui

e) La fonction sinus n'a pas de limite en $-\infty$!

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

donc $-e^x \leq e^x \sin(x) \leq e^x$ car $e^x > 0$

donc $1-e^x \leq 1+e^x\sin(x) \leq 1+e^x$

- Par limite de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$
- Donc par limite de somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x) = 1$

$\Rightarrow$ Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x\sin(x)) = 1}$

f) $\dfrac{e^{0,1x}}{2x} = \dfrac{e^{0,1x}}{0,1x} \times \dfrac{0,1}{2} = 0,05\,\dfrac{e^{0,1x}}{0,1x}$

OR, $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,1x = +\infty$, et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

donc par limite de composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty$ et par limite de produit $(0,05>0)$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 0,05\,\dfrac{e^{0,1x}}{0,1x} = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{0,1x}}{2x} = +\infty.}$

Exercice II

Exercice II

$f(x) = \dfrac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1}$, définie sur $\mathbb{R}$

* Limite de f en $+\infty$:

On a une forme indéterminée pour le quotient donc on factorise :

$$\frac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1}=\frac{e^{2x}\left(1-\frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}=\frac{1-\frac{2}{e^{2x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{2x}}}$$ Oui

- Par limite de produit et de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$,

donc par limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ Oui

- Par limite de quotient on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{2x}}=0$
- Par limites de référence et de somme on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{e^{2x}}\right)=1$ Oui et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=+\infty$ Oui

$\Rightarrow$ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

$\rightarrow$ La droite d'équation $y=0$ (soit l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ Oui

* Limite de f en $-\infty$:

- Par limite de référence et de produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$,

donc par limite de fonction composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x}=0$

- Par limite de somme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}+1)=1$

$\Rightarrow$ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2}$

$\rightarrow$ La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$. Oui

Exercice III

Exercice III

$$v(t)=9{,}81\,\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \text{ sur } [0;+\infty[$$

1) La fonction v est dérivable sur $[0;+\infty[$ et est de la forme $v(t)=ku(t)$

avec $k=9{,}81\frac{m}{k}$ (car k et m sont des constantes) et $\begin{cases} u(t)=1-e^{-\frac{k}{m}t} \\ u'(t)=\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} \end{cases}$ Oui

$v'(t)=ku'(t)=9{,}81\frac{m}{k}\times\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}=9{,}81e^{-\frac{k}{m}t}$

Etudions le signe de $v'(t)$:

Pour tout $t\in[0;+\infty[$, $e^{t}>0$ donc $e^{-\frac{k}{m}t}>0$ et $9{,}81>0$

Donc pour tout $t\in[0;+\infty[$, $v'(t)>0$ Oui

Donc d'après le théorème de Lagrange, la fonction v associée à la vitesse de la goutte d'eau croît sur $[0;+\infty[$. On a :

t	0	$+\infty$
signe de $v'(t)$	+	
variation de $v(t)$	0 ↗	$9{,}81\frac{m}{k}$

Oui

$\ast\ v(0) = 9{,}81\frac{m}{k}(1-e^0) = 0$

(vitesse initiale nulle)

2) • Par limite de référence et de produit

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{k}{m}t\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$, donc par limite de fonction composée :

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$

• Par limite de somme : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 1$ Oui

$\Rightarrow$ Donc par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}}$ Bien

3) - La vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite signifie que la vitesse est supérieure à $9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}99$ $\left(\approx 9{,}71\frac{m}{k}\right)$

- Calculons désormais la vitesse au bout d'une durée de chute égale à $5\frac{m}{k}$:

$v\left(5\frac{m}{k}\right) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\times\frac{m}{k}5}\right) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1-e^{-5}\right)$

Or $1-e^{-5}\approx 0{,}993$ donc $v\left(\frac{5m}{k}\right)\approx 9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}993$ $\left(\approx 9{,}74\frac{m}{k}\right)$

- $0{,}993 > 0{,}99$, donc $\boxed{9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}993 > 9{,}81\frac{m}{k}\times 0{,}99}$.

$\Rightarrow$ Donc l'affirmation est correcte. Oui

4) a) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}$

Donc la droite (d) d'équation $y = 9{,}81\frac{m}{k}$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$. Oui

b) La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, notée To a pour équation : $y = v'(0)(x-0)+v(0)$ avec $v(0)=0$

donc $y = x\times v'(0) = x\times 9{,}81e^0 = 9{,}81x$

c) Point d'intersection de T et d : $M(x_M ; y_M)$

On a alors $y_M = 9{,}81\frac{m}{k}$ et $y_M = 9{,}81x_M$

donc $9{,}81\frac{m}{k} = 9{,}81x_M \iff x_M = \frac{m}{k}$

L'abscisse du point d'intersection est $\frac{m}{k}$ Oui

5) $\frac{m}{k}$ est l'abscisse du point d'intersection des droites d et T.

graphiquement on lit que $\frac{m}{k}$ vaut 1,5 Oui

Exercice IV

Exercice IV

a) $f(x)=3$ n'a aucune solution sur $[-2;8]$ car d'après le tableau de variation de f, la valeur maximale prise par f sur $[-2;8]$ est 2, et $2<3$

b) *) f est continue sur $[-8;-2]$ puisqu'il y a une flèche dans le tableau de variation sur cet intervalle

**) f est strictement décroissante sur $[-8;-2]$ d'après le tableau de variation

***) $3 \in [-4;5]$

$\Rightarrow$ Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=3$ admet une unique solution sur $[-8;-2]$

c) *) f est continue sur $[-8;-2]$

**) f est strictement décroissante sur $[-8;-2]$

***) $0 \in [-4;5]$

$\Rightarrow$ Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-8;-2]$

*) f est continue sur $[-2;3]$ d'après le tableau de variation.

**) f est strictement croissante sur $[-2;3]$ d'après le tableau de variation.

***) $0 \in [-1;2]$

Exercice V

Exercice V

$f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$ sur $\mathbb{R}$ et $\Delta : y = 3$

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$

C'est un quotient de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $1+e^{-2x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc par théorème la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Cette fonction est de la forme $f(x) = k \cdot \dfrac{1}{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+e^{-2x} \\ u'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$

$$f'(x) = k \times \left(\frac{-u'(x)}{u^2(x)}\right) = 3 \times \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

Etudions le signe de $f'(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+e^{-2x})^2 > 0$, et $e^{-2x} > 0$ donc $6e^{-2x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ Oui

Donc d'après le théorème de Lagrange f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	
variation de $f(x)$	0	↗	3

Oui

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

• Par limites de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

• Par limite de produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$

et par limite de référence : $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

donc par limite de fonction composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

• Par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^{-2x}) = 1$ Oui

⇒ Donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$

→ La droite Δ d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ Oui

d) *) f est continue sur $]-\infty ; +\infty[$, car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc sur $]-\infty ; +\infty[$

***) $2,999 \in [0 ; 3]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2,999$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note α : $f(\alpha) = 2,999$ Oui

e) Avec la calculatrice TI on obtient :

Avec un pas égal à 1 :

x	$f(x)$
4	2,99899
α	2,999
5	2,99986

$4 < \alpha < 5$

Avec un pas égal à 0,1 :

x	$f(x)$
4,0	2,99899
α	2,999
4,1	2,99917

$4,0 < \alpha < 4,1$

Avec un pas égal à 0,01 :

x	$f(x)$
4,00	2,99899
α	2,999
4,01	2,99901

$4,00 < \alpha < 4,01$

→ $4,00 < \alpha < 4,01$ est un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Exercice VI

0. (C1) représente la courbe de l'exponentielle car ne prend que des valeurs positives, tandis que (C2) représente la courbe de la fonction trinôme, qui elle ne prend que des valeurs négatives ($-x^2-1 < 0$).

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

1. Lecture graphique de l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$: $a \approx 0,8$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$: $b \simeq -1,2$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.
On a alors : $A(a; e^a)$ et $B(b; -b^2-1)$.

(a) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A :

$$y - e^a = e^a(x-a) \Longleftrightarrow y = e^a x + e^a(1-a)$$

(b) Équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B :

$$y - (-b^2-1) = -2b(x-b) \Longleftrightarrow y = (-2b)x + b^2 - 1$$

(c) $(\mathscr{T}_A) = (\mathscr{T}_B)$. En identifiant terme à terme les deux équations, on obtient :

$$(\mathscr{T}_A) = (\mathscr{T}_B) \Longleftrightarrow (S) : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(1-a) = b^2 - 1 \end{cases}$$

(d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ e^a(1-a) = \left(-\frac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{e^a}{2} \\ 4e^a(1-a) = (e^a)^2 - 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^a & = & -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 & = & 0 \end{cases}$$

3. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

(a) Sur $]-\infty\,; 0[$, la fonction $x \to e^{2x}$ est croissante et strictement positive, donc :

$$\left(e^{2x} \leqslant e^{2\times 0} = 1 < 4 \Longrightarrow e^{2x} - 4 < 0\right) \text{ et } \left(x \in]-\infty\,; 0[\Longleftrightarrow x < 0 \Longleftrightarrow x - 1 < -1 < 0 \Longrightarrow 4e^x(x-1) < 0\right)$$

(b) L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,; 0[$, car sur cet intervalle, $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 < 0$.

(c) La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$, car sa dérivée est positive :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x > 0 \text{ (somme de nombres strictement positifs)}$$

(d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En effet :

$$f(0) = -7 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 + 4\frac{x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4}{e^{2x}}\right) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{e^{nx}} = 0 \; (n = 1 \text{ ou } 2)$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; elle réalise donc une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[-3\,;\,+\infty[$.

Or $0 \in [-3\,;\,+\infty[$, donc 0 possède un unique antécédent, noté a vérifiant $f(a) = 0$.

Encadrement d'amplitude 10^{-2} de a (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) :

$$f(0,84) \simeq -0,117 \text{ et } f(0,85) \simeq 0,07 \Longrightarrow 0,84 \leqslant a \leqslant 0,85$$

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ sont confondues :

$$0,84 \leqslant a \leqslant 0,85 \Longleftrightarrow 2,31 < e^{0,84} \leqslant e^a \leqslant e^{0,85} < 2,34 \Longleftrightarrow 1,155 \leqslant \frac{e^x}{2} \leqslant 1,17 \Longleftrightarrow -1,2 \leqslant b = -\frac{e^x}{2} \leqslant -1,1$$

BONUS

0-

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.
g ——————— : $g(x) = ax + b$ où $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$.

On résout l'équation : $f(x) = g(x)$ d'inconnue x pour avoir les abscisses des éventuels points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x^3 = ax + b \Longleftrightarrow x^3 - ax - b = 0$.

Soit $h(x) = x^3 - ax - b$.
$h'(x) = 3x^2 - a$

1er cas : Si $a \leq 0$, alors $-a \geq 0$ et $3x^2 \geq 0$, donc $h'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et h croît sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

· h est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc d'après le corollaire du T.V.I, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution réelle.

En conclusion, si $a \leq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point en commun.

__2e cas : Si $a > 0$__

$h'(x) = 3x^2 - a$ et $h'(x) \geq 0 \iff 3x^2 - a \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{a}{3} \iff \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{a}{3}} \\ \text{ou} \\ x \leq -\sqrt{\frac{a}{3}} \end{cases}$

ainsi, (# Lagrange) on a :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{a}{3}}$		$\sqrt{\frac{a}{3}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-b$	$\searrow$	$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-b$	$\nearrow$	$+\infty$

$h\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) - b$

$h\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\sqrt{\frac{a}{3}} - b$

$h\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b$

$h\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}} - b = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\sqrt{\frac{a}{3}} - b = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b$

Le nombre de solution de l'équation $h(x)=0$ va dépendre du signe des deux nombres.

$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b$ et $-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b$.

Si $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b < 0$, c'est à dire si $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} < b$ et donc vu que $a>0$ si

$0 < \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} < b$, donc si $\left(\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 < b^2$ car sur $]0;+\infty[$, $x \longmapsto x^2$ croît

si $\frac{4a^2}{9} \times \frac{a}{3} < b^2$ i.e si $4a^3 < 27b^2$, alors h croît sur $]-\infty;-\sqrt{\frac{a}{3}}]$

et $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b < 0$, donc $h(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty,-\sqrt{\frac{a}{3}}]$.

Vu que sur $[-\sqrt{\frac{a}{3}};\sqrt{\frac{a}{3}}]$, h décroît et que $h\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)<0$, il en résulte que

sur $[-\sqrt{\frac{a}{3}};\sqrt{\frac{a}{3}}]$, $h(x)=0$ n'a pas de solution.

Enfin, sur $[\sqrt{\frac{a}{3}};+\infty[$, h est continue et strictement croissante.

Or vu que $-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b < \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b < 0$, $0 \in [-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - b ; +\infty[$.

Donc d'après le corollaire du T.V.I $h(x)=0$ a une unique solution sur $[\sqrt{\frac{a}{3}};+\infty[$.

Donc si $a>0$ et si $4a^3<27b^2$, alors $h(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

I – $f : [0;1] \to [0;1]$ est continue.

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = f(x) - x$

*) $\underbrace{g \text{ est continue sur } [0;1]}_{1}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0;1]$.

**) $g(0) = f(0)$ et f est à valeurs dans $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1]$, $\underbrace{0 \leq f(x) \leq 1}_{(*)}$

donc $f(0) \geq 0$, donc $\underbrace{\boxed{g(0) \geq 0}}_{2}$

$g(1) = f(1) - 1$ et (*) avec $x = 1$ donne : $f(1) \leq 1$, donc $f(1) - 1 \leq 0$.

Par suite, $\underbrace{\boxed{g(1) \leq 0}}_{3}$

1, 2 et 3 font qu'on peut appliquer le TVI à g : $0 \in [g(1) ; g(0)]$, donc d'après le TVI, $g(x) = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$, c'est à dire

$f(x) - x = 0$ a au moins une solution sur $[0;1]$ et donc idem pour $f(x) = x$.

Conclusion : f a au moins un point fixe sur $[0;1]$.