Exercice I

1) $A = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{15}\right) \times \frac{2}{7}$

$\boxed{A} = \left(\frac{12}{15} - \frac{1}{15}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{11}{15} \times \frac{2}{7} = \boxed{\frac{22}{105}}$

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{4} - \frac{11}{5}}$

1

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{2}{5}+\frac{5}{5}}{\frac{15}{20} - \frac{44}{20}} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \dfrac{\frac{7}{5}}{-\frac{29}{20}}$

$B = -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{5} \times \left(-\frac{20}{29}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{2 \times 7 \times \cancel{5} \times (-4)}{\cancel{5} \times 5 \times 29}$

$\boxed{B} = -\frac{3}{4} - \frac{56}{145} = \frac{-3 \times 145}{4 \times 145} - \frac{56 \times 4}{145 \times 4} = \frac{-435}{580} - \frac{224}{580} = \boxed{\frac{-659}{580}}$

2)

a) $\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{x}{2}$

$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} = 1$

$\frac{4}{6}x + \frac{3x}{6} = 1$

$\frac{7x}{6} = 1$

$7x = 6$

$x = \frac{6}{7}$

$\boxed{S = \left\{\frac{6}{7}\right\}}$

b) $6 - 4x = 5x - 11$

$6 + 11 = 5x + 4x$

$17 = 9x$

$x = \frac{17}{9}$ $S = \left\{\frac{17}{9}\right\}$

c) $2x - 6 = 1 - 1{,}32x$

$2x + 1{,}32x = 1 + 6$

$3{,}32x = 7$

$3{,}32x = 7$

$x = \frac{7}{3{,}32} = \frac{700}{332} = \frac{350}{166} = \frac{175}{83}$

$\boxed{S = \left\{\frac{175}{83}\right\}}$

d) $\frac{x}{2} = \frac{2}{3} + \frac{x}{5} \iff \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{2}{3} \iff \frac{5x}{10} - \frac{2x}{10} = \frac{2}{3} \iff \frac{3x}{10} = \frac{2}{3} \iff 3 \times 3x = 2 \times 10$

$\iff 9x = 20$

$\iff x = \frac{20}{9}$

$\boxed{S = \left\{\frac{20}{9}\right\}}$.

e)

$(2x+3)^2 = (4x+1)(x-5)$

$(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 20x + x - 5$

$\cancel{4x^2} + 12x + 9 = \cancel{4x^2} - 19x - 5$

$12x + 19x = -5 - 9 = -14$

$31x = -14$; $x = -\frac{14}{31}$. $S = \left\{-\frac{14}{31}\right\}$.

f)

$$3(2-6x)-2(2x-5)=x+11+(5x-2)^2-(5x+6)(5x-8)$$
$$6-18x-4x+10=x+11+(5x)^2-2\times5x\times2+2^2-(25x^2-40x+30x-48)$$
$$-22x+16=x+11+\cancel{25x^2}-20x+4-\cancel{25x^2}+40x-30x+48$$

$$-13x=47$$
$$x=\frac{47}{-13}=-\frac{47}{13}\quad \mathcal{S}=\left\{-\frac{47}{13}\right\}$$

g)

$$\frac{2x-5}{3}=\frac{1-7x}{4}\iff 4(2x-5)=3(1-7x)$$
$$\iff 8x-20=3-21x$$
$$\iff 8x+21x=3+20$$
$$\iff 29x=23\iff x=\frac{23}{29}\qquad \boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{23}{29}\right\}}.$$

h)

$$x^2=18\iff x^2-18=0\iff x^2-(\sqrt{18})^2=0\iff (x-\sqrt{18})(x+\sqrt{18})=0$$
$$\iff x-\sqrt{18}=0 \text{ ou } x+\sqrt{18}=0$$
$$\iff x=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{18}=-3\sqrt{2}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-3\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{2}\}}.$$

i)

$$(x+4)(x-3)-x^2=2-(14-x)$$
$$\cancel{x^2}-3x+4x-12-\cancel{x^2}=2-14+x$$
$$x-12=x-12$$

Cette égalité est vraie pour tout réel x, donc $\boxed{\mathcal{S}=\mathbb{R}}$.

j)

$$25x^3-16x=0$$
$$x(25x^2-16)=0$$
$$x((5x)^2-4^2)=0$$
$$x(5x+4)(5x-4)=0$$

Ce qui équivaut à : $x=0$ ou $5x+4=0$ ou $5x-4=0$

C'est à dire à : $x=0$ ou $x=\frac{-4}{5}$ ou $x=\frac{4}{5}$: $\mathcal{S}=\left\{\frac{-4}{5}\,;\ 0\,;\frac{4}{5}\right\}$

k) $\frac{x-4}{2x+5}=0$ équivaut à : $x-4=0$ et $2x+5\neq0$, c'est-à-dire à $x=4$ et $x\neq-2{,}5$.

Or $4\neq-2{,}5$, donc $\mathcal{S}=\{4\}$

l)

$$\frac{6x+1}{x+1} = \frac{5x}{x+2} + \frac{1}{1} \qquad \frac{6x+1}{x+1} = \frac{5x}{x+2} + \frac{x+2}{x+2} = \frac{6x+2}{x+2}$$

$\frac{6x+1}{x+1} = \frac{6x+2}{x+2}$ équivaut à : $(6x+1)(x+2) = (x+1)(6x+2)$ ET $x+1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$.

$\cancel{6x^2}+12x+x+\cancel{2} = \cancel{6x^2}+2x+6x+\cancel{2}$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$

$13x = 8x$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

$13x - 8x = 0$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

$5x = 0$

$x = \frac{0}{5} = 0$ ET $x \neq -1$ et $x \neq -2$.

Or $0 \neq -1$ et $0 \neq -2$, donc $\boxed{S = \{0\}}$.

3)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donc $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}}$, donc $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$ (si deux 2 nombres sont égaux, alors ils ont le même carré).

$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L}{g}$, donc $\boxed{L = \frac{gT^2}{4\pi^2}}$

$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ donc $r^2 \times F_g = Gm_1m_2$ donc $r^2 = \frac{Gm_1m_2}{F_g}$ et par positivité de r, $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F_g}}$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = m\left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right)$, $\boxed{m} = \frac{E}{\frac{v^2}{2}+gh} = \frac{E}{\frac{v^2}{2} + \frac{2gh}{2}} = \boxed{\frac{2E}{v^2+2gh}}$.

Exercice II

A-

Soit x le nombre d'élèves de cette classe :

$\frac{2x}{7}$ font allemand et $\frac{x}{2}$ font espagnol.

On a : $\frac{2x}{7} + \frac{x}{2} + 6 = x$.

Donc : $\frac{4x}{14} + \frac{7x}{14} + 6 = x$

$x = \frac{11x}{14} + 6$

$x - \frac{11x}{14} = 6$

$\frac{14x}{14} - \frac{11x}{14} = 6$

$\frac{3x}{14} = 6$

$3x = 6 \times 14 = 84$; $x = \frac{84}{3} = 28$. $\mathscr{S} = \{28\}$.

La classe compte donc 28 élèves.

B-

Soit x un réel. D'après l'énoncé, on veut que : $x = 4x^3$.

$x = 4x^3$ *équivaut* à : $4x^3 - x = 0$ *et en factorisant* à : $x(4x^2 - 1) = 0$, *qui se factorise encore en* :

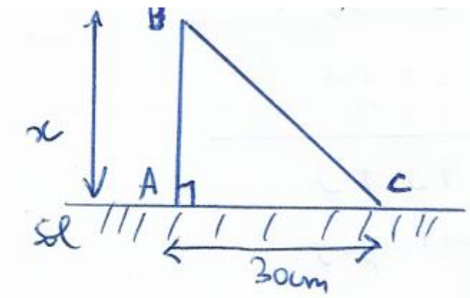
$x(2x + 1)(2x - 1) = 0$.

D'après le théorème du produit nul, cette dernière est équivalente à :
$x = 0$ *ou* $2x + 1 = 0$ *ou* $2x - 1 = 0$, *c'està dire* : $x = 0$ *ou* $x = -0{,}5$ *ou* $x = 0{,}5$.

S = {-0,5 ; 0 ; 0,5}.

Il y a donc trois réels qui sont égaux à quatre fois leurs cubes : -0,5 ; 0 et 0,5.

C-



Nommons x la longueur AB.
Vu que le bambou mesure 1m = 100cm
on a : AB+BC=100
x+BC=100
BC=100-x.

Le bambou est droit, donc le triangle ABC est rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle ABC rectangle en A on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$(100-x)^2 = x^2 + 30^2$$
$$100^2 - 2\times100\times x + x^2 = x^2 + 900$$
$$10000 - 200x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 900$$
$$10000 - 900 = 200x$$
$$200x = 9100$$
$$x = \frac{9100}{200} = \frac{91}{2} = 45{,}5$$

Conclusion : Le bambou s'est donc brisé à 45,5 cm du sol.

(*) Rappel : $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (identité remarquable numéro 2)

Ici, $A = 100$ et $B = x$.

D-Soit x le nombre de voleurs et n le nombre de bijoux volés :

On a : n=8x -5 et n = 7x +6, donc 8x – 5 = 7x +6, donc 8x –7x = 6+5, x =11. Ainsi, il y avait 11 voleurs, et ils ont dérobé 8 $\times$11 – 5 = 88 – 5 = 83 bijoux.

Exercice III

1)

$$\boxed{\frac{16^3}{24^3+16^3+8^3}} = \frac{(2\times8)^3}{(3\times8)^3+(2\times8)^3+8^3} = \frac{2^3\times8^3}{3^3\times8^3+2^3\times8^3+8^3} = \frac{8\times\cancel{8^3}}{\cancel{8^3}\times(3^3+2^3+1)} = \frac{8}{27+8+1} = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

2a) $\boxed{\frac{x}{6} - \frac{5x-4}{4}} = \frac{2x}{12} - \frac{3(5x-4)}{12} = \frac{2x-3(5x-4)}{12} = \frac{2x-15x+12}{12} = \boxed{\frac{-13x+12}{12}}$

2b) $\boxed{\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+3}} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(x+3)-x(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+3x-x^2-2x}{(x+2)(x+3)} = \boxed{\frac{x}{(x+2)(x+3)}}$

3) Faux : contrexemple : a =2 et b = 1 : 1/(2+1) = 1/3 tandis que ½ + 1/1 = 3/2 : 1/3 $\neq$3/2 !!!

4) $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2^{30}\times 2 = 2^{31}$

Exercice IV

① Pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 2$

$$\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2}=\frac{4(x+2)}{(x+1)(x+2)}-\frac{4(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{4(x+2)-4(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2}=\frac{4x+8-4x-4}{(x+1)(x+2)}=\frac{4}{(x+1)(x+2)}.$$

Donc on a bien : $\boxed{\frac{4}{(x+1)(x+2)}=\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x+2}}$

② a) Développons, pour tout réel x : $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=x^2+x+\frac{4}{4}=x^2+x+1.$$

Donc, pour tout réel x, $\boxed{x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

b) $x^2+x+1=\frac{7}{4}$ équivaut donc d'après 2a) à : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1=0 \quad \text{car } \frac{3}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{4}{4}=-1$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1^2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}+1\right)\left(x+\frac{1}{2}-1\right)=0$$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$ qui équivaut à : $x+\frac{3}{2}=0$ ou $x-\frac{1}{2}=0$

$x=-\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$ $\quad\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\}}$

3) Raisonnons par l'absurde en supposant ABC rectangle (en B nécessairement) :

Alors d'après le théorème de Pythagore, on aurait : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c'est-à-dire : $11^2 = 8^2+9^2$ et donc : $121 = 64+81$, donc : $121 = 145$: absurde.

Par suite, l'hypothèse formulée est fausse, donc son contraire est vrai, à savoir ABC n'est pas un triangle rectangle.

Exercice V

Facile : 5 véridiques et 5 menteurs, le premier de file mentant nécessairement (s'il disait vrai, il y aurait des personnes devant lui, ce qui est impossible vu qu'il est le premier de la file et n'a donc personne devant lui), le dernier de file disant vrai, on peut même dire que les 5 premiers de la file mentent et les 5 derniers disent vrai.