Exercice II

47 **1.** Le nombre de choix possibles est $\binom{42}{10} = 1\,471\,442\,973$.

2. a) Le nombre d'équipes qui ne comportent que des filles est $\binom{22}{10} = 646\,646$.

b) Le nombre d'équipes qui comportent un seul garçon est $\binom{22}{9} \times \binom{20}{1} = 9\,948\,400$.

c) Le nombre d'équipes qui comportent autant de garçons que de filles est

$$\binom{22}{5} \times \binom{20}{5} = 408\,282\,336.$$

d) Le seul cas où il y a deux garçons de plus que de filles est six garçons et quatre filles. Le nombre d'équipes de ce type est

$$\binom{22}{4} \times \binom{20}{6} = 283\,529\,400.$$

27 **a)** Il s'agit de dénombrer les couples d'éléments distincts d'un ensemble à 4 éléments.

Le nombre de telles séquences est donc :

$$4 \times 3 = 12.$$

b) AC, AG, AT, CA, CG, CT,
GA, GC, GT, TA, TC, TG

c) Trois nucléotides :
ACG, ACT, AGC, AGT, ATC, ATG,
CAG, CAT, CGA, CGT, CTA, CTG
GAC, GAT, GCA, GCT, GTA, GTC
TAC, TAG, TCA, TCG, TGA, TGC
Quatre nucléotides :
ACGT, ACTG, AGCT, AGTC, ATCG, ATGC,
CAGT, CATG, CGAT, CGTA, CTAG, CTGA
GACT, GATC, GCAT, GCTA, GTAC, GTCA
TACG, TAGC, TCAG, TCGA, TGAC, TGCA

33 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 12 éléments.

Ce nombre est $12! = 479\,001\,600$.

b) Le nombre de façons de ranger, tout d'abord, les copies des 7 filles, est $7!$. Pour chacune de ces façons de les ranger, il y a $5!$ façons de ranger les copies des 5 garçons. Le nombre total de telles façons de ranger les 12 copies est donc $7! \times 5! = 604\,800$.

c) Si on commence par les copies des garçons, le nombre de façons de ranger les 12 copies est $5! \times 7!$, ce qui donne le même résultat qu'à la question précédente.

41 **1. a)** On assimile un comité à une combinaison de trois éléments parmi 36. Le nombre de tels comités est donc $\binom{36}{3} = 7\,140$.

b) Pour qu'il y ait davantage de filles que de garçons, il faut qu'il y ait trois filles et pas de garçons ou bien deux filles et un garçon.

Le nombre de comités constitués de trois filles est $\binom{20}{3} = 1140$. Le nombre de comités constitué de deux filles et un garçon est $\binom{20}{2} \times \binom{16}{1} = 190 \times 16$ $= 3\,040$.Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $1140 + 3\,040 = 4\,180$.

2. a) Dans ce cas, l'ordre est important, mais il ne peut pas y avoir de répétitions (une personne ne peut pas occuper deux postes). Le nombre de tels comités est donc $36 \times 35 \times 34 = 42\,840$.

b) Le nombre de comités de trois filles est alors $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

Pour les comités de deux filles et un garçon, il y d'abord 3 choix pour le poste occupé par le garçon. Pour chacun de ces choix, on a le choix entre 20 garçons, ce qui fait 60 possibilités.

Pour chacune de ces possibilités, le nombre de façons de choisir les filles est $20 \times 19 = 380,$ ce qui donne en tout $60 \times 380 = 22\,800$ comités de ce type.

Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $6\,840 + 22\,800 = 29\,640$.

70 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1(2n-2)\ldots(n+1)}{n!}$.

b) S'il y a exactement p boules blanches, alors il y exactement n - p boules rouges.

Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$.

Or par symétrie des nombres de combinaisons, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Donc le nombre de tirages avec p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) Un tirage peut comporter entre 0 et n boules blanches.

Donc la somme $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$ est égale au nombre total de tirages, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

72 Le nombre de façons de constituer le groupe A est le nombre de combinaisons de 16 éléments parmi 32 : $\binom{32}{16} = 601\,080\,390$.

Le nombre de groupes possibles qui comportent exactement autant de filles que de garçons est $\binom{20}{8} \times \binom{12}{8} = 62\,355\,150$. Ce n'est pas la moitié du nombre total de groupes possibles, donc Marina a tort.

84 Il y a quatre façons de placer la lettre N. Pour chacune de ces façons, il faut ordonner trois lettres parmi les six autres lettres du mot MOULINS. Le nombre de façons de faire cela est $6 \times 5 \times 4 = 120$. Donc le nombre de mots vérifiant cette contrainte est $120 \times 4 = 480$.

Exercice VII

45 **1.** Une main est une combinaison de cinq cartes parmi 52. Le nombre total de mains est donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

2. a) Une couleur en cœur est une combinaison de cinq cartes parmi les 13 cartes de cœur. Le nombre de mains de ce type est $\binom{13}{5} = 1\,287$.

b) Il y a quatre familles donc le nombre total de « couleurs » est $1\,287 \times 4 = 5\,148$.

3. a) Pour un carré de 10, la cinquième carte peut être n'importe laquelle des 48 cartes restantes.

Il y a donc 48 mains de ce type.

b) Il y a 13 possibilités pour la carte qui sera répétée quatre fois dans le carré, et dans chacun de ces cas 48 possibilités pour la cinquième carte. Le nombre total de carrés est donc $13 \times 48 = 624$.

4)

La quinte flush

– Avec un jeu de 52 cartes : il faut choisir la figure du début 10 choix (de l'as au 10) et la couleur, 4 choix. On a donc :

$$10 \times 4 = 40 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir une quinte flush dans une main de 5 cartes, on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 0,0015 %.

5)

Le full

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 puis on choisit la figure des deux cartes identiques soit 12 choix puis on en choisit 2 parmi les 4, on a donc :

$$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3\ 744 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un full entre les mains est 3744/2598960 soit environ 0,0014 ou 0,14 %.

6)

Le brelan

– Avec un jeu de 52 cartes : on choisit la figure des trois cartes identiques soit 13 choix puis on en choisit 3 parmi les 4 enfin on prend 2 autres cartes dans les 48 restantes sans oublier d'enlever les fulls :

$$13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3744 = 13 \times 4 \times 1128 - 3744 = 54\ 912 \quad \text{combinaisons}$$

Pour la probabilité d'avoir un brelan dans une main on divise le résultat précédent par le nombre total de mains de 5 cartes, soit 2598960, on trouve de l'ordre de 2,1 %.

7)

La double paires

– Avec un jeu de 52 cartes : On choisit les deux jeux de paires parmi les 13 figures, puis on choisit deux fois deux cartes parmi ces deux jeux et enfin une carte parmi les 44 restante, on a donc :

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1} = 78 \times 6^2 \times 44 = 123\ 552 \quad \text{combinaisons}$$

La probabilité d'avoir une double paire est 123552/2598960 soit environ 0,048 ou 4,8 %.

Post-bac

a) $p \geq 1$.

Soit $n, n+1, \dots, n+p-1$ p entiers consécutifs.

et $K = n(n+1)\dots(n+p-1)$: $(K \in \mathbb{N})$

Si $n=0$, $K=0$ est évidement divisible par $p!$

Si $n \geq 1$, $K = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!}$. OR $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,(n+p-1-(n-1))!}$

$\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$

donc $\dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!} = p!\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$K = p!\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$. Vu que $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ et $p! \in \mathbb{N}^*$

on a que $p!$ divise K.

b) Piochons simultanément p entiers naturels pris dans $[\![1;n]\!]$: il y a $\binom{n}{p}$ façons de faire.
Ensuite, on ordonne par ordre croissant les p entiers obtenus : une seule façon de procéder.
↳ (car 2 à 2 ≠, d'où <).

Donc le cardinal de l'ensemble cherché est $\binom{n}{p} \times 1 = \underline{\binom{n}{p}}$.

c) $u_n = \binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$

$u_{n+1} = \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \dfrac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}$

$\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)} = \boxed{\dfrac{4n+2}{n+1}}$

Pour $n>0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

Par limite de référence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par limites de somme, produit et quotient

on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 4}$.