Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM14** **Mai 2026**

Exercice 0

$A = \int_0^1 x e^{-2x}\,dx$. Faisons une I.P.P : Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^{-2x} \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$A = \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$

$A = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$

$A = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x}\,dx$

$A = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}\left(e^{-2} - 1\right)$

$\boxed{A} = -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1-3e^{-2}}{4}}$

$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Posons : $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

donc $I = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\times\left[2\sqrt{u(x)}\right]_0^1 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$

(Rappel : $x \longmapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ se primitive en $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$.

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$ Car $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Posons : $\begin{cases} u(x) = \cos(x) \\ u'(x) = -\sin(x) \end{cases}$.

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin(x))}{\cos(x)}\,dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = -\left[\ln(|u(x)|)\right]_0^{\pi/4}$

$J = -\left[\ln(|\cos(x)|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\ln(\cos(x))\right]_0^{\pi/4}$ Car sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) > 0$.

$J = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \ln(\cos(0)) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \ln(\sqrt{2}) + 1$

$\boxed{J} = \frac{\ln(2)}{2} + 1 = \boxed{\frac{\ln(2)+2}{2}} = \boxed{\frac{\ln(2e^2)}{2}}$

$$K = \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx = \underbrace{\left[e^x \sin(x)\right]_0^\pi}_{\overset{\parallel}{0} \text{ car } \sin(\pi) = \sin(0) = 0.} - \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx.$$

$$K \overset{\text{2e IPP}}{=} -\left(\left[e^x \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \times (-\sin(x))\,dx\right).$$

$$K = -\left(e^\pi \cos(\pi) - e^0 \cos(0) + \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx\right).$$

$$K = -e^\pi \times (-1) + 1 - \underbrace{\int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx}_{\parallel}$$

$\cos(\pi) = -1$
$\cos(0) = 1$

$$\underbrace{K = e^\pi + 1 - K}_{\text{Équation d'inconnue } K.}$$

$$2K = e^\pi + 1$$

$$\boxed{K = \frac{e^\pi + 1}{2}}$$

Exercice II

o) $x > 0$ et $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

o) $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Or $x > 0$, donc $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a même signe que $1 - \ln(x)$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x) \iff e^1 \geq e^{\ln(x)} \iff x \leq e$.

D'où :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

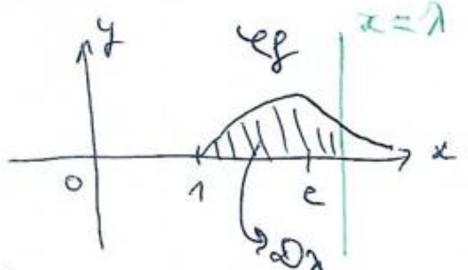
$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$, donc par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

1) $f(1)=0$.

Croquis :



Notons $\mathcal{D}_\lambda = \{M(x;y) / 1\leq x\leq \lambda ; 0\leq y\leq f(x)\}$

L'aire d'un disque de rayon 1 est $\pi\times 1^2=\pi$.

On cherche donc le réel $\lambda>1$ tel que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}_\lambda)=\pi$

Or f est continue et positive sur $[1;\lambda]$, donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_\lambda)=\int_1^\lambda f(x)\,dx$.

Ainsi, on résout l'équation d'inconnue $\lambda>1$:

$u'(x)=\frac{1}{x}$; $u(x)=\ln(x)$

$$\int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x}\,dx=\pi \iff \int_1^\lambda u'(x)u(x)\,dx=\pi$$

$u'u$ se primitive en $\frac{1}{2}u^2$.

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^\lambda=\pi \iff \frac{1}{2}\ln^2(\lambda)=\pi \iff \ln^2(\lambda)=2\pi$$

Or $\lambda>1$, donc $\ln(\lambda)>0$, donc on a : $\ln(\lambda)=\sqrt{2\pi}$

et $e^{\ln(\lambda)}=e^{\sqrt{2\pi}}$

$$\boxed{\lambda=e^{\sqrt{2\pi}}}$$

2) Croquis :

$a>1$.
Sur $[1;a]$, $f(x)\geq 0$.

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{D}_a)}=\int_1^a f(x)\,dx=\int_1^a \frac{\ln(x)}{x}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^a=\boxed{\frac{\ln^2(a)}{2}}$$ car $\ln(1)=0$.

Or, $\lim\limits_{a\to+\infty}\ln(a)=+\infty$, donc par produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{a\to+\infty}\mathcal{A}(\mathcal{D}_a)=+\infty}$.

Donc l'aire du domaine $\mathcal{D}_a$ tend vers une quantité non finie lorsque a tend vers $+\infty$.

A vous de voir ! "Il y a de moins en moins de place" entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des x, mais quand $x\to+\infty$ l'aire de $\mathcal{D}_a$ tend vers $+\infty$!

3a)

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ avec $x > 0$.

$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)-1}{x}$. Vu que $x>0$, $f(x)-\frac{1}{x}$ a le même signe que $\ln(x)-1$:

$\ln(x)-1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 1 \iff e^{\ln(x)} \geq e^1 \iff x \geq e$.

Donc :

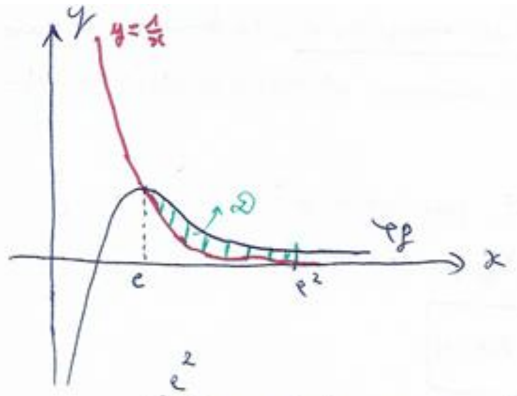
x	0		e		$+\infty$
$f(x)-\frac{1}{x}$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Si $0 < x < e$, alors $\mathcal{C}_f$ est situé en dessous de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

Si $x > e$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'hyperbole.

Si $x = e$, alors $\mathcal{C}_f$ et l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$ se coupent.

3b)



$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_e^{e^2} \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$ car sur $[e\,;e^2] \subset [e\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'hyperbole.

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_e^{e^2} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln|x|\right]_e^{e^2}$ car $\frac{\ln x}{x} = \frac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u|$.

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln(x)\right]_e^{e^2}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 - \ln(e^2) - \left(\frac{1}{2}(\ln(e))^2 - \ln(e)\right)$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 = 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ U.A.

Exercice I

Exercice IV

$n \geq 1$, $U_n = \int_1^e ((\ln x))^n dx$.

① Si $1 \leq x \leq e$, alors $\underbrace{\ln(1)}_{=0} \leq \ln(x) \leq \ln(e)$ car ln croît sur $[1;e]$.

donc $(\ln(x)) \geqslant 0$ sur $[1;e]$, donc $(\ln(x))^n \geq 0$ sur $[1;e]$, donc par positivité de l'intégrale

Par suite, Un représente l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}_n$, au dessus de l'axe des abscisses, et entre les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Graphiquement, il semblerait que (U_n) soit décroissante et converge vers 0 (les domaines sous la courbe $\mathcal{C}_n$ ont tendance à s'écraser sur l'axe des abscisses, et clairement on a : $\mathcal{A}(D_1) > \mathcal{A}(D_3) > \mathcal{A}(D_5)$ ...

② $f_n(x) = (\ln x)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f_n(1) = (\ln 1)^n = 0^n = 0, & \text{donc } A(1;0) \in \mathcal{C}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \\ f_n(e) = (\ln e)^n = 1^n = 1, & \text{donc } B(e;1) \in \mathcal{C}_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Par suite, $\boxed{(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ont deux points en commun } A(1;0) \text{ et } B(e;1)}$.

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e (\ln x)^n dx = \int_1^e ((\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n) dx$

$$U_{n+1} - U_n = \int_1^e (\ln x)^n (\ln x - 1) dx.$$

Or $1 \leq x \leq e$, donc $0 \leq \ln(x)$ (déjà vu) et $\ln(x) \leq \ln(e)$ donc $\ln(x) \leq 1$, donc $\ln(x) - 1 \leq 0$.

Par suite, $\forall x \in [0;1]$, $(\ln x)^n (\ln x - 1) \leq 0$.

Comme $1 < e$, par propriété de positivité de l'intégrale, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^e (\ln(x))^n (\ln x - 1) dx \leq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$, donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

④ On a vu en ① que Un représente l'aire d'un domaine sous la courbe, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$. et donc (U_n) est minorée par 0.

De plus, par ③, (U_n) décroît sur $\mathbb{N}^*$.

Donc d'après le th. de la convergence monotone, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

Soit $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$: Vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$, par passage à la limite, on a : $l \geq 0$.

A la question 5), faire directement une IPP comme suggéré (pas au programme du sujet de l'époque).

5) $F_n(x) = x(\ln x)^{n+1}$, $1 \leq x \leq e$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $F_n(x) = (u v)(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x} \end{cases}$

$F_n'(x) = (u'v + uv')(x) = 1 \times (\ln x)^{n+1} + \cancel{x} \times (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{\cancel{x}}$

$F_n'(x) = (\ln x)^{n+1} + (n+1)(\ln x)^n = (\ln x)^n \times (\ln x + n+1)$.

Par suite : $\int_1^e F_n'(x)\,dx = \int_1^e \left((\ln x)^{n+1} + (n+1)(\ln x)^n\right) dx = \int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx + (n+1) \times \int_1^e (\ln x)^n dx$

linéarité de l'intégrale.

Donc : $\left[F_n(x)\right]_1^e = U_{n+1} + (n+1) U_n$

$F_n(e) - F_n(1) = U_{n+1} + (n+1) U_n$

$e(\ln e)^{n+1} - 1(\ln 1)^{n+1} = U_{n+1} + (n+1) U_n$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, e = U_{n+1} + (n+1) U_n}$ (car $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$).

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} + (n+1) U_n = e$, donc $U_{n+1} = e - (n+1) U_n$.

c) Soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n$. On sait déjà par (4) que $\ell \geq 0$.

Par l'absurde, supposons $\ell > 0$; par passage à la limite dans 5b) on obtiendrait : $\ell = -\infty$ car $\lim_{n \to +\infty} -(n+1) = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$, donc $\lim_{n \to +\infty} e - (n+1) U_n = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \ell$ (unicité de la limite).

$\ell = -\infty$ est absurde car (U_n) converge vers ℓ, donc $\ell \in \mathbb{R}$! (on rappelle que $-\infty \notin \mathbb{R}$)

d) Par suite on a : $\ell \geq 0$ (cf (4)) et ℓ ne peut pas être strictement positive, donc $\ell = 0$.

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Exercice III

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
   f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ avec pour tout $x\in[0\,;\,1]$: $f'(x)=\dfrac{-(-1)\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})^2}$.
   Pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{1-x}>0$ et $(1+\mathrm{e}^{1-x})^2>0$.
   On en déduit que pour tout $x\in[0\,;\,1]$, $f'(x)>0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
2. En remarquant que $\mathrm{e}=\mathrm{e}^1$, et que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}=1$, on peut écrire :
   $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x})e^x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$.
3. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue et est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x\in[0\,;\,1]$ la fonction F définie par : $F(x)=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e})$.
   On en déduit que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\ln(e^x+e)\Big]_0^1=\ln(2\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e})=\ln(2)+\ln(\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e})=\ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;1]$ par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.
   Pour tout $x\in[0\,;\,1]$, on a : $f_0(x)=\dfrac{1}{1+0\times\mathrm{e}^{1-x}}=1$.
   La courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y=1$ avec $x\in[0;1]$.

2. Soit n un entier naturel.
   Pour tout $x\in[0\,;\,1]$, on a : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}>0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   On a en particulier $u_0=\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=[x]_0^1=1$
3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.
   Soit n un entier naturel.
   Pour tout réel $x\in[0\,;\,1]$, on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{1}{1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x}}-\dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}=\dfrac{-e^{1-x}}{(1+n\mathrm{e}^{1-x})(1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x})}<0$.
   On en déduit que pour tout réel $x\in[0;1]$, on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x<\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $u_{n+1}<u_n$.
   Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Soit n un entier naturel.
   Pour tout réel $x\in[0\,;\,1]$, on a :$f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}>0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x>0$
   Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.

Exercice IV

Partie I

1. **a.** $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow g'(x) = h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   g est solution de E_n si et seulement si :
   $g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff$
   $h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x} + h(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff h'(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a finalement $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

   b. Une primitive de $\dfrac{x^n}{n!}$ est $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)n!} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + K$ et comme $h(0) = 0$, il en résulte $K = 0$.
   Donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ Comme $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}$, on a finalement quel que soit x réel :

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. **a.** φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi + \varphi' = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
   g est solution de (E_n) donc $g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$, d'où par différence
   $\varphi + \varphi' - (g' + g) = 0 \iff (\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0$ (par linéarité de la dérivation.
   Donc φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

   b. On sait que les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   c. Les fonctions $\varphi - g$ sont donc les fonctions $C\mathrm{e}^{-x}$, donc $\varphi(x) = g(x) + C\mathrm{e}^{-x}$ soit finalement :

$$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

d. La solution vérifiant $\varphi(0) = 0$ est telle que $0 + C = 0 \iff C = 0$.
Finalement :

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Partie II

1. **a.** f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur $\mathbb{R}$,
   $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$.
   Donc $f_1'(x) + f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b. **Initialisation :** pour $n = 1$, $f_1(x) = \dfrac{x^1}{1!}\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{1-1}$ et $f_1(0) = 0$, d'après la question précédente.

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.

Par définition f_{n+1} vérifie $f_{n+1}'(x) + f_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et $f_{n+1}(0) = 0$.

D'après la partie 1, la fonction solution de l'équation différentielle ci-dessous est :

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}$$

L'égalité est vraie au rang $n+1$. L'hérédité est démontrée.
On a donc démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. a. On a $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0$ et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$, soit $0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, puis par multiplication le nombre positif $\frac{x^n}{n!}$, on obtient $0 < \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n!}x^n \leqslant \frac{x^n}{n!}$.

Par intégration sur $[0\,;\,1]$, $0 < I_n \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\,\frac{x^{n+1}}{n!}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$.

Conclusion $0 < I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

b. Si $k \geqslant 1$, et $x \in [0\,;\,1]$, on a $f_k'(x) + f_k(x) = f_{k-1}(x)$.

En intégrant cette égalité sur $[0\,;\,1]$:

$\int_0^1 f_k'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x \iff \int_0^1 f_k'(x)\,\mathrm{d}x + I_k = I_{k-1} \iff I_k - I_{k-1} = -\int_0^1 f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x = -f_x(1) + f_k(0) = -f_k(1)$.

Or $-f_k(1) = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

Conclusion : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a :

$$\begin{array}{lcl} I_1 - I_0 & = & -\frac{1}{1!}\mathrm{e}^{-1} \\ I_2 - I_1 & = & -\frac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1} \\ \ldots & = & \ldots \\ I_k - I_{k-1} & = & -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

En faisant la somme membres à membres de toutes ces égalités :

$I_k - I_0 = -\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) \iff I_k = I_0 - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right)$, soit encore

$$I_n = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}.$$

d. Le résultat précédent peut s'écrire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - I_n$. On a vu que

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On a donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1$ soit par produit par e :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Exercice V

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Comme $a \geqslant 0$, $1+t > 0$ sur $[0\,;\,a]$, donc $I_0(a) = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a)$.
2. $I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.
   À l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} u(t) = t-a & ; \quad v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \\ u'(t) = 1 & ; \quad v(t) = -\dfrac{1}{1+t} \end{cases},$$

   on obtient par continuité des fonctions u' et v' :
   $I_1(a) = \left[-\frac{t-a}{1+t}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t-a}{1+t} + \ln(1+t)\right]_0^a = \ln(1+a) - a.$
3. De même à l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} u(t) = (t-a)^{k+1} & ; \quad v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{k+2}} \\ u'(t) = (k+1)(t-a)^k & ; \quad v(t) = -\dfrac{1}{(k+2-1)(1+t)^{k+2-1}} = \dfrac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases},$$

   on obtient par continuité de u' et v' pour $t \geqslant 0$,

$$\begin{cases} u(t)=(t-a)^{k+1} & ; \quad v'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^{k+2}} \\ u'(t)=(k+1)(t-a)^k & ; \quad v(t)=-\dfrac{1}{(k+2-1)(1+t)^{k+2-1}}=\dfrac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases},$$

on obtient par continuité de u' et v' pour $t \geqslant 0$,

$$I_{k+1}(a)=\left[\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\right]_0^a+\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{(-a)^{k+1}}{k+1}+I_k(a)=$$

$I_{k+1}(a)=\dfrac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1}+I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $a \geqslant 0$.

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$.

En utilisant la relation de récurrence précédente,

$I_2(a)=\dfrac{a^2}{2}+I_1(a)=\ln(1+a)-a+\dfrac{a^2}{2}$,

$I_3(a)=\dfrac{-a^3}{3}+I_2(a)=\ln(1+a)-a+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^3}{3}$,

$I_4(a)=\dfrac{a^4}{4}+I_3(a)=\ln(1+a)-a+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{a^4}{4}$,

$I_5(a)=\dfrac{-a^5}{5}+I_4(a)=\ln(1+a)-a+\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^3}{3}+\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{a^5}{5}$.

La dernière égalité peut s'écrire d'après la définition de P,

$I_5(a)=\ln(1+a)-P(a)$.

5. $J(a)=\displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t-a)^6}{6}\right]_0^a=-\frac{a^6}{6}$.

6. a. En partant de l'encadrement :

$0 \leqslant t \leqslant a \Rightarrow 1 \leqslant 1+t \leqslant 1+a \Rightarrow 1^6 \leqslant (1+t)^6 \leqslant (1+a)^6$

(par croissance de la fonction $x \longmapsto x^6$), $\Rightarrow 0<\dfrac{1}{(1+a)^6} \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^6} \leqslant 1 \Rightarrow$

$(t-a)^5 \leqslant \dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leqslant \dfrac{(t-a)^5}{(1+a)^6} \leqslant 0$ (car $t-a \leqslant 0$.

Conclusion : pour tout $t \in [0\,;\,a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

b. On vient de démontrer que $(t-a)^5 \leqslant \dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leqslant 0$.

On intègre cette double inégalité entre 0 et a pour obtenir :

$$\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

soit, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. D'après la question 4, $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$ ce qui implique
$|I_5(a)| = |\ln(1+a) - P(a)| = -I_5(a)$, car d'après la question précédente
$I_5(a) \leqslant 0$. On a vu que $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$ soit en prenant les opposés :
$0 \leqslant I_5(a) \leqslant -J(a)$.
On a donc $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant -J(a)$ soit finalement :
Pour tout $a \in [0~;~+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8. Pour avoir une approximation à 10^{-3} près il suffit que
$\dfrac{a^6}{6} \leqslant 10^{-3} \iff a^6 \leqslant 6\cdot 10^{-3} \iff a \leqslant \left(6\cdot 10^{-3}\right)^{1/6}$.
La calculatrice donne $a \leqslant 0,4262$.
Un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près est donc $[0\,;\,0,426]$.