

Exercice I

1) a) $\ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq \ln(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 1 \\ \text{ou} \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{ou} \\ x > -1 \end{cases}$. $S =]-1; 0]$.
car si $x+1 > 0$, car $\ln$ est strictement croissant sur $]0; +\infty[$

b) $4e^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ln(e^{3x-1}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 3x-1 = -\ln 4 \Leftrightarrow x = \frac{1-\ln 4}{3}$. $S = \left\{ \frac{1-\ln 4}{3} \right\}$

c) $\frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0,999 \Leftrightarrow \frac{1}{0,999} \geq 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$ car $2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 > 0$.
 $\Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{0,999} - 1$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0,999} - 1 \right)$ car $\frac{1}{0,999} - 1 = \frac{1-0,999}{0,999} = \frac{0,001}{0,999} = \frac{1}{999}$.
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{999}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1998}$
 $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1998}\right)$ car $\ln$ est strictement croissant sur $]0; +\infty[$
 $\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq -\ln(1998)$
 $\Leftrightarrow -n \ln(4) \leq -\ln(1998)$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(1998)}{-\ln(4)}$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1998)}{\ln(4)}$. Or, $\frac{\ln(1998)}{\ln(4)} \approx 5,48$.

$$c) e^{2x} + e^x - 12 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 12 = 0$$

Posez $y = e^x$: l'équation proposée devient : $y^2 + y - 12 = 0$.

$a=1$; $b=1$; $c=-12$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 = 7^2$. l'équation du 2nd degré en la variable y .

Donc racines réelles car $\Delta > 0$:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \\ y_2 = \frac{-1+7}{2} = 3 \end{cases}$$

Retour à la variable x : $y = e^x$ et $y \in \{-4; 3\}$ donc on résout :

$$e^x = -4 \rightarrow \text{pas de solution réelle car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0.$$

$$e^x = 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3) \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$S = \{\ln(3)\}.$$

$$\begin{aligned} \alpha) 1 - 0,84^m > 0,95 &\Leftrightarrow 1 - 0,95 > 0,84^m \Leftrightarrow 0,84^m < 0,05 \Leftrightarrow \ln(0,84^m) < \ln(0,05) \\ &\quad \text{(croissance de } x \text{ en sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Leftrightarrow m \ln(0,84) < \ln(0,05) \\ &\Leftrightarrow m > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,84)} \quad \text{car } \ln(0,84) < 0 \text{ vu que } \forall x \in]0; 1[, \ln(x) < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,05)}{\ln(0,84)} \approx 17,18$, donc $m_0 = 18$

$$\begin{aligned} \beta) 0,34^m < 10^{-4} &\Leftrightarrow \ln(0,34^m) < \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow m \ln(0,34) < -4 \ln(10) \\ &\Leftrightarrow m > \frac{-4 \ln(10)}{\ln(0,34)} \quad \text{avec } \frac{-4 \ln(10)}{\ln(0,34)} \approx 12,81 \\ &\Leftrightarrow m \geq 13 \end{aligned}$$

Donc ici $m_0 = 13$.

$$2) g(t) = 10^6 \times e^{0,25t}$$

a) $g(0) = 10^6 \times e^{0,25 \times 0} = 10^6$: population initiale.

b) On cherche $t \in [0; +\infty[$ tel que $g(t) = 2g(0) = 2 \times 10^6$.

$$g(t) = 2 \times 10^6 \Leftrightarrow 10^6 \times e^{0,25t} = 2 \times 10^6 \Leftrightarrow e^{0,25t} = 2 \Leftrightarrow \ln(e^{0,25t}) = \ln(2)$$

$$g(t) = 2 \times 10^6 \Leftrightarrow 0,25t = \ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{0,25} = \frac{\ln(2)}{\frac{1}{4}} = 4 \ln(2). \quad S = \{4 \ln(2)\}$$

$$t \approx 2,77 \text{ h.}$$

Pour que $g(t) = 10g(0)$, on résout : $10^6 \times e^{0,25t} = 10 \times 10^6 \Leftrightarrow e^{0,25t} = 10 \Leftrightarrow \ln(e^{0,25t}) = \ln(10)$

$$S = \{4 \ln(10)\}. \quad t = 4 \ln(10) \quad t \approx 9,21 \text{ h.} \quad \Leftrightarrow 0,25t = \ln(10) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(10)}{0,25}.$$

Exercice II

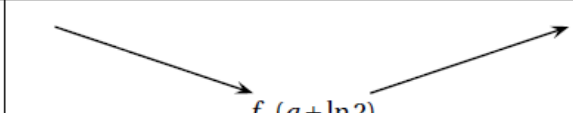
1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = e^{x-a} - 2$$

$$f'_a(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$$

$f'_a(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à

$$f_a(a + \ln 2) = e^{a + \ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a.$$

x	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f'_a(x)$	$-$	0	$+$
f_a			

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

$$\varphi'(a) = -2 + e^a;$$

$$\bullet -2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2;$$

$$\bullet -2 + e^a < 0 \iff e^a < 2 \iff a < \ln 2;$$

$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ			

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à $\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

Exercice III

42 a) $\theta(t) = 12,5$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 12,5$
c'est-à-dire $e^{0,1t} = 1,25$ soit $0,1t = \ln(1,25)$.

Donc $t = \frac{\ln(1,25)}{0,1}$ et $t \approx 2,2$.

La température atteindra $12,5^\circ\text{C}$ au bout d'environ $2,2$ minutes.

b) $\theta(t) = 0$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 0$ c'est-à-dire $e^{0,1t} = 2,5$ soit $0,1t = \ln(2,5)$.

Donc $t = \frac{\ln(2,5)}{0,1}$ et $t \approx 9,2$.

La température atteindra 0°C au bout d'environ 9,2 minutes.

52 a) Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) = 0$ soit $x = e$ ou $x = e^3$.

Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont e et e^3 .

b) On peut dresser ce tableau de signes.

x	0	e	e^3	$+\infty$
$\ln(x) - 1$		-	0	+
$3 - \ln(x)$		+	0	-
$f(x)$		-	0	-

f est négative sur $]0; e] \cup]e^3; +\infty[$.

f est positive sur $]e; e^3[$.

64b)

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{3}{2}$, $x > -1$ et $x > 3$ donc $E =]3; +\infty[$.

Pour tout réel x de E , $\ln(2x - 3) - 2\ln(x + 1) = \ln(x - 3)$ s'écrit aussi $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2) + \ln(x - 3)$ soit $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2(x - 3))$.

Ce qui équivaut à $2x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$ soit $2x - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)$ c'est-à-dire $x^3 - x^2 - 7x = 0$. $x^3 - x^2 - 7x = 0$ équivaut à $x(x^2 - x - 7) = 0$ soit

$$x = 0, \quad x = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}.$$

Seul $\frac{1 + \sqrt{29}}{2}$ appartient à E .

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

Exercice IV

1. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)]$

$$\text{Par croissance comparée } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{somme}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = 0$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0}$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{2}{x} \right) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{somme}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{produit}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x) \right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2x + 2 - 2 \left[2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \right] = 10x + 2 - 2[2x \ln(x) + x] = 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x \\ &= \boxed{8x + 2 - 4x \ln(x)} \end{aligned}$$

3. a.

$$f''(x) = 8 - 4 \left[1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right] = 8 - 4 \ln(x) - 4 = 4 - 4 \ln(x) = \boxed{4[1 - \ln(x)]}$$

b. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$$f''(x) \geq 0 \iff 4[1 - \ln(x)] \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e \text{ (car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[).$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0; e]$.

c.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0 -
Variations de f'		$\begin{array}{c} \nearrow 4e+2 \\ \searrow -\infty \end{array}$	

$$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e) = 8e + 2 - 4e = 4e + 2$$

4. a. Sur $]0; e]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in]0; e]$, on a $f'(x) > 0$.

Sur $[e; +\infty[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f'(e) = 4e + 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in]-\infty; 4e + 2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e; +\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.

On a :

$$\boxed{7,87 < \alpha < 7,88}$$

- b. On sait que sur $]0; e]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[e; +\infty[$ et qu'elle s'annule en α , $f'(x) \geq 0$ sur $[e; \alpha]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0; \alpha]$ et négatif sur $[\alpha; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0 -
Variations de f		0	$f(\alpha)$ $-\infty$

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha \ln(\alpha) = 0 \\
 &\iff 4\alpha \ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\
 &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha + 1)}{4\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \\
 &\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}}
 \end{aligned}$$

Exercice V

Partie A $x \in [0, +\infty[$ et $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

① $f(x) = 5\ln(x+3) - x$ avec : $u(x) = x+3$ et $u'(x) = 1$.

② $f'(x) = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5 - (x+3)}{x+3} = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}$.

Or $x \geq 0$, donc $x+3 \geq 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que : $-x+2$.

Par suite, $f'(x) \geq 0 \iff -x+2 \geq 0 \iff x \leq 2$.

On conclut d'après le théorème de Lagrange :

③

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$5\ln(3)$	$5\ln(5) - 2$	$-\infty$

$f(2) = 5\ln(5) - 2$

④

Par $x > 0$

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x \stackrel{\text{par } x > 0}{=} x \left(\frac{5\ln(x+3)}{x} - 1 \right)$$

$$f(x) = x \left(\frac{5\ln(x(1+\frac{3}{x}))}{x} - 1 \right) = x \left(\frac{5\ln(x) + 5\ln(1+\frac{3}{x})}{x} - 1 \right)$$

$$f(x) = x \left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1 \right) + x \times 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

Par $x > 0$

$$f(x) = x \left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1 \right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

⑤ On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (critère de référence), donc $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\ln(x)}{x} - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$, donc par

critère de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$

de plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = 0$, donc par critère de composition ou de produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$$

Par suite, par critère de somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$ (voir c).

⑥ $5\ln(3) \approx 5,43$, donc $5\ln(3) > 0$.

f croît sur $[0; 2]$, et $f(0) > 0$, donc $f(x) > 0$ sur $[0; 2]$, donc sur cet intervalle, l'équation

$f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[0; 2]$.

(2)

sur $[2; +\infty[$:
 $\begin{cases} x) f \text{ est continue car dérivable.} \\ x+y) f \text{ est strictement décroissante sur } [2; +\infty[. \\ x+xx) f(2) = 5\ln(5) - 2 (\approx 6,04) \text{ donc } f(2) > 0. \end{cases}$
 Par suite, $0 \in]-\infty; 5\ln(5) - 2]$.

Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α avec $\alpha \in [2; +\infty[$.

Par suite, $f(x) = 0$ a pour unique solution α , avec $\alpha \in [0; +\infty[$.

2b) $f(14) \approx 0,166$, donc $f(14) > 0$
 $f(15) \approx -0,548$, donc $f(15) < 0$, Par suite, $14 \leq \alpha \leq 15$.

Grâce à une calculatrice et à la méthode de bissections on obtient :

Par Égal à 0,1 :

x	f(x)
14,2	0,0245
14,3	-0,046

Par Égal à 0,01 :

x	f(x)
14,23	0,0033
14,24	-0,004

Donc : $14,23 < \alpha < 14,24$ donc $\alpha \approx 14,2 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$.

c)

x	0	α	$+\infty$
f(x)	+	0	-

$f(\alpha) = 0$ et f décroît sur $[\alpha; +\infty[$
 donc $f(x) \leq 0$ si $x \in [\alpha; +\infty[$.

Partie B

1a) cf. annexe.

1b) Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2a) $g(x) = 5\ln(x+3)$.

$g'(x) = \frac{5}{x+3}$ (cf. A.1) donc pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{5}{x+3} > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.
 d'après le th. de Lagrange, g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2b) On sait que $f(u) = 0$ donc que : $5\ln(u+3) - u = 0$ donc que $5\ln(u+3) = u$, donc que $g(u) = u$.

2c) Soit $P(n)$ la propriété: $0 \leq u_n \leq \alpha$. (3)

Initialisation: pour $n=0$: $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq \alpha$ est vraie, car $14 < \alpha < 15$!
donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit n un entier naturel tel que: $P(n)$ est vraie i.e. $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie: Or par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \alpha$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

donc comme g croît sur $[0, \alpha]$ on a: $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$.

donc: $5 \ln(3) \leq u_{n+1} \leq \alpha$ par (B.2b).

Or $5 \ln(3) \geq 0$, donc on a bien: $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: $P(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.

On déduit le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha}$

2d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = f(u_n)}$ car $g(x) = f(x) - x$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$ (par 2b), et f admet des valeurs positives sur $[0, \alpha]$ d'après (A.2-c).

donc $f(u_n) \geq 0$ et par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: donc (u_n) croît et la limite de (B.1b) est ainsi validée.

2e) (u_n) croît et est majorée par α d'après B.2-c), donc (u_n) converge.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$: en passant à la limite ds $u_{n+1} = g(u_n)$ on obtient: $l = g(l)$

$$\Leftrightarrow g(l) - l = 0$$

$$\Leftrightarrow f(l) = 0.$$

(Grâce à A.2-a), on en déduit que $l = \alpha$ car $f(x) = 0$ a pour unique solution α sur $[0, +\infty[$.

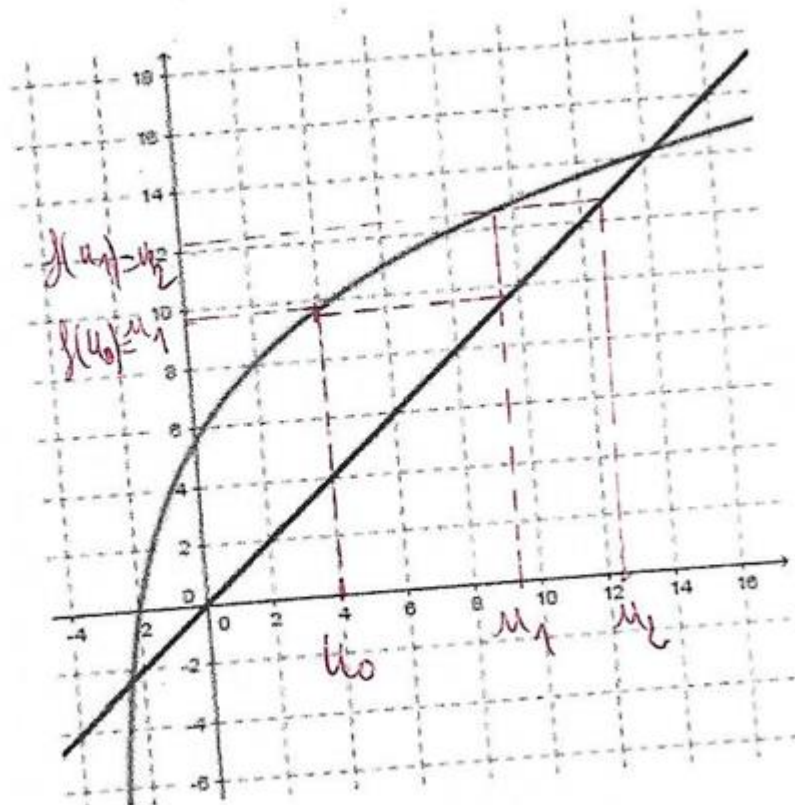
3) Cet algorithme permet de déterminer, (s'il existe) le plus petit réel m tel que $g(m) \geq 14,2$.

a) Cet algo. est associé à la suite (u_n) . Or (u_n) converge ^{croissant} vers α avec $14,23 < \alpha < 14,24$.
donc il existe un rang N à partir duquel: $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 14,2$, donc l'algo. se termine à coup sûr.

(Le fait que (u_n) croisse assure l'existence d'un plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 14,2$ si $N \leq n$.

b) Grâce à une calculatrice: on trouve en sortie: $\boxed{u \approx 14,22315}$

Annexe 1



Exercice IV

$$A) g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - x \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x(4 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ 4 - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = 4 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ e^{\ln(x)} = e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x = e^4 \end{cases}$$

Or $x \in]0; +\infty[$, donc $x \neq 0$, et par suite, $\mathcal{S} = \{e^4\}$.

② $g(x) = x(4 - \ln(x))$ avec $x > 0$.

Faisons un tableau de signes: $4 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^4 \geq e^{\ln(x)} \Leftrightarrow x \leq e^4$ (exp. str. croissante sur $\mathbb{R}_+$)

0.05 :

	x	0	e^4	$+\infty$
x		0	+	+
$4 - \ln(x)$		+	0	-
$g(x) = x(4 - \ln(x))$		+	0	-

③ Grâce au tableau de signes précédent, g n'est pas de signe constant sur $]0; +\infty[$: la conjecture: $(g(x) \leq 0 \text{ sur } [e^4; +\infty[)$.

x) " g est positive" est donc fausse!

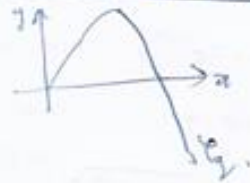
xx) On a : $1 < e^4$ et $g(1) = 4 \times 1 - 1 \times \ln(1) = 4$
 $g(e^4) = 0$ (cf. 2).

Donc $g(1) > g(e^4)$.

fonction croissante en $g(1) < g(e^4)$!).

Par suite, g ne peut pas être strictement croissante sur $]0, +\infty[$: la seule conjecture est encore fautive.

Rq : l'élève 4.0 aura bien g_2 avec une autre fonction :



Partie B

1a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Or, pour $x > 0$, $x \ln(x) = x \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.

Soit $X = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, donc par limite de composée : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

1b) $g(x) = 4x - x \ln(x)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, donc par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

1c) $g(x) = 4x - x \ln(x) = x(4 - \ln(x))$. (on a une F.I en $+\infty$ si on ne factorise pas).

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \ln(x)) = -\infty$

Donc par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2a) $g(x) = x(4 - \ln(x)) = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = 4 - \ln(x) \\ v'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

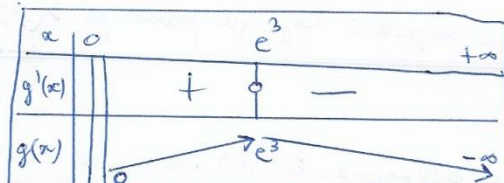
$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1(4 - \ln(x)) + x \times (-\frac{1}{x}) = 4 - \ln(x) - 1 = 3 - \ln(x).$$

(3)

$$2b) g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^3 \geq e^{\ln(x)} \Leftrightarrow e^3 \geq x$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^3.$$

d'après le théorème de Lagrange :



$$g(e^3) = 4e^3 - e^3 \ln(e^3) = 4e^3 - e^3 \times 3 \ln(e) = 4e^3 - e^3 \times 3 = e^3$$

3a) $a > 0$. Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $A(a; g(a))$.

T_A a pour équation réduite : $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ avec : $g'(a) = 3 - \ln(a)$
 $g(a) = 4a - a \ln(a).$

$$y = (3 - \ln(a))(x-a) + 4a - a \ln(a).$$

$$y = (3 - \ln(a))x - 3a + a \ln(a) + 4a - a \ln(a)$$

$$\boxed{y = (3 - \ln(a))x + a}$$

$$3b) B(1; 5) \in T_A \Leftrightarrow 5 = (3 - \ln(a)) \times 1 + a \Leftrightarrow 5 = 3 - \ln(a) + a \Leftrightarrow a - \ln(a) - 2 = 0.$$

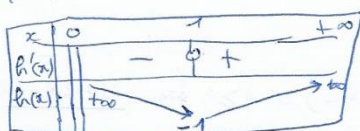
Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$, par $h(x) = x - \ln(x) - 2$: a est donc solution de $h(x) = 0$.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

$x > 0$, donc $h'(x)$ a le même signe que $x-1$.

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

d'après le th. de Lagrange :



$$h(1) = 1 - \ln(1) - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{2}{x} \right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

donc par l'éto de sommes et produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Sur $]0; 1]$, h est continue, car dérivable ; h est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et

$0 \in [-1; +\infty[$: d'après le Corollaire du T.V.I, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α_1 , sur $]0; 1]$.

Le même raisonnement conduit sur $]1; +\infty[$ pour établir que $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α_2 sur $]1; +\infty[$.

(4)

Ainsi, $h(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$.

En outre, il y a deux tangentes à $\mathcal{C}_g$ qui passent par $B(1; 5)$.

BONUS

$$a) \log_2(3x) + \log_4(x^2) = 2 \text{ équivaut à : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{\ln(4)} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Or } \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2), \text{ donc : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2\ln(3x)}{2\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2, \text{ donc } \begin{cases} x > 0 \\ 2\ln(3x) + \ln(x^2) = 4\ln(2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} x > 0 \\ 2(\ln(3) + \ln(x)) + 2\ln(x) = 4\ln(2) \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) + 2\ln(3) = 4\ln(2) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) = 4\ln(2) - 2\ln(3) \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \frac{4\ln(2) - 2\ln(3)}{4} = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(2) - \ln(\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \quad \text{donc } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \mathcal{J} = \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

$$i) \log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = \frac{1}{2}\log_2(8\sqrt{4\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\log_2(8) + \frac{1}{2}\log_2(\sqrt{4\sqrt{2}})$$

$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = \frac{1}{2}\log_2(2^3) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\log_2(4\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\log_2(2) + \frac{1}{4}\log_2(4\sqrt{2})$$

$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = 1 + \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{1}{4}\log_2(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{4} \times \log_2(2^2) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\log_2(2)$$

$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = 1 + \frac{1}{4} \times 2\log_2(2) + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

c)

Avec la calculatrice : $x = \ln \pi \approx 1,14$ $y = \log_5 2 \approx 0,43$ et $z = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,60$.

Sans calculatrice : $\pi > e$ donc $\ln \pi > 1$; $\log_5 2 = \frac{\ln 2}{\ln 5}$ et, comme $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$, $\log_5 2 < \frac{1}{2}$; de l'inégalité $e < 3$ on tire $z = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ et l'on a évidemment $z < 1$. D'où $y < z < x$.