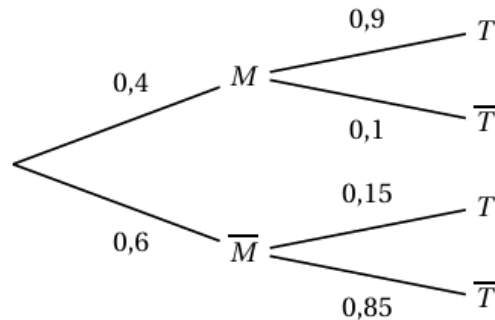


Exercice I

1. a. On traduit la situation par un arbre pondéré.



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 + 0,09 = 0,45.$$

d. Il faut trouver $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$.

2. a. On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question 1. c..

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs

par échantillon de 20.

3. a. On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45.

$$\text{On a } P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n.$$

$$\text{Donc } p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n.$$

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,55^n$.

A l'aide du menu suites de la machine on obtient $n \geq 8$: le programme renvoie donc 8 en sortie.

Exercice II

1. • Déterminons la limite quand x tend vers $-\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x(e^{-x} + 2) - 1.$$

Avec $y = -x$, par composition, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.

Donc, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 2 = +\infty$.

Par limite du produit, il vient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) = -\infty$.

Enfin, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{-x} + 2) - 1 = -\infty$.

- Déterminons la limite quand x tend vers $+\infty$:

D'après la propriété des croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Par limite de l'inverse : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Par ailleurs, 2 étant positif : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$.

Par limite de la somme on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + 2x - 1 = +\infty$.

2. On a admis que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est la somme d'une fonction affine et d'un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + 2 = (1 - x)e^{-x} + 2.$$

3. On a admis que f' est dérivable :

Pour tout réel x , on a :

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) + 0 = (-1 - (1 - x))e^{-x} = (x - 2)e^{-x}.$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$.

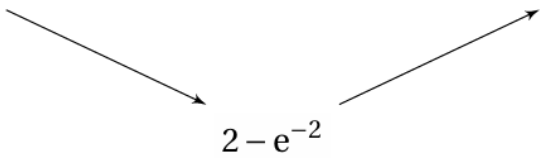
- Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, $(x - 2) \leq 0$, donc f'' est à valeurs négatives et donc f est **concave** sur $] -\infty ; 2]$.
- Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $(x - 2) \geq 0$, donc f'' est à valeurs positives et donc f est **convexe** sur $[2 ; +\infty[$.

5. • Sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$, f est concave, donc f' est décroissante.
• Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, f est convexe, donc f' est croissante.

f' atteindra donc un minimum pour $x = 2$. On a :

$$f'(2) = (1 - 2)e^{-2} + 2 = 2 - e^{-2}$$

On peut donc établir le tableau de variations (sans limites, car non attendues ici) de f' .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'			

6. Comme on a $-2 < 0$, on en déduit, par croissance de la fonction exponentielle : $e^{-2} \leq e^0$.

$$e^{-2} \leq e^0 \Rightarrow e^{-2} \leq 1$$

$$\Rightarrow -e^{-2} \geq -1 \quad \text{car } -1 < 0$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 2 - 1$$

$$\Rightarrow 2 - e^{-2} \geq 1$$

Le minimum de f' est donc un réel supérieur à 1, donc strictement positif.

On en déduit que f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en conséquence, f est effectivement une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. f est une fonction **continue** (car dérivable) et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. De plus 0 est une **valeur intermédiaire** entre $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

Par exploration à la calculatrice, on peut donner pour α l'encadrement au centième près suivant : $0,37 < \alpha < 0,38$.

8. Pour tout x réel, on a :

$$f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}.$$

Comme la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette différence entre l'ordonnée $f(x)$ d'un point sur C_f et celle $2x - 1$ du point partageant la même abscisse sur Δ est du signe de x .

Sur $\mathbb{R}^-$, la différence est donc négative, et on en déduit que la courbe C_f est **au-dessous** de la droite Δ .

Sur $\mathbb{R}^+$, au contraire, la différence est positive, et donc la courbe C_f est **au-dessus** de la droite Δ .

Exercice III

Partie A

1. Pour chaque caractère, il y a 64 possibilités, donc pour une séquences de 4 caractères, il y a 64^4 possibilités, soit 16 777 216 possibilités. On pourra noter $\text{card}(\Omega) = 16\,777\,216$.

2. Si les caractères sont différents deux à deux, il s'agit alors d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $\frac{64!}{(64-4)!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ possibilités.

3. a. On reprend la question 1. avec seulement 63 caractères. cela donne donc $63^4 = 15\,752\,961$ possibilités.

b. Soit X l'évènement : « la séquence ne comporte pas la lettre A ».

Son événement contraire est donc : $\overline{X}$ « la séquence comporte au moins une fois la lettre A ».

Ainsi $\text{card}(X) + \text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega)$ donc $\text{card}(\overline{X}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(X) = 64^4 - 63^4 = 1\,024\,255$.

Il y a donc 1 024 255 séquences contenant au moins une fois la lettre A.

c. La lettre A peut se situer dans l'une des quatre positions dans le code, les trois autres lettres étant différentes. Il y aura donc $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ possibilités.

d. Il y a $\binom{4}{2}$ façons de placer les deux lettres A dans la séquence. Les deux autres lettres ne sont pas des A. Il y aura donc $\binom{4}{2} \times 63^2 = 23\,814$ possibilités.

Partie B

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (regarder la cote de chaque vecteur), donc A, B et C ne sont pas alignés : **Affirmation 1 : FAUSSE.**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2026$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$. Or $-u_n^2 \leq 0$, donc (u_n) décroît.

Or tous les termes de cette suite sont positifs, donc elle est minorée par 0.

Donc (u_n) converge en tant que suite décroissante et minorée.

Soit L la limite de cette suite : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence, il vient par opérations sur les limites et par unicité de la limite : $L = L - L^2$, donc $L^2 = 0$, donc $L = 0$.

(u_n) converge vers 0 : **Affirmation 2 : VRAIE.**

h est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Comme la dérivée d'une fonction affine est constante, la dérivée seconde de h est nulle.

($h(x)=ax+b$ donc $h'(x)=a$, donc $h''(x)=0$).

$f'(x)=4x^3+2x+a$, donc $f''(x)=12x^2+2$, donc pour tout réel x , $f''(x) > 0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$, donc la courbe de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes. **Affirmation 3 : VRAIE.**

Une solution alternative à appliquer la relation de Chasles, est ici d'introduire un repère orthonormé, par exemple $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère, $H(0; 1; 1)$; $I(0,75; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $J(1; 0,25; 0)$.

Donc $\overrightarrow{HI} \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $-0,25\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,25 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc $-0,25\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \overrightarrow{HI} = -0,25\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$

car ils ont les mêmes coordonnées. **Affirmation 4 : VRAIE.**

Exercice IV

Partie A

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$ et $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = 22,5$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

3. Pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Pour tout entier n , $u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n , avec $0 < q < 1$) donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$

1. $w_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = 44,5$
2. La fonction Python donnée ne calcule pas correctement w_1 car elle calcule u_1 avant de calculer w_1 il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        W = W/2 + U/2 + 7
        U = U/2 + 10
    return W
```

3. (a)

Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 45$ et $10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

Alors $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} u_n + 7 = \frac{1}{2} \left[10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right] + \frac{1}{2} \left[20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 7$

donc $w_{n+1} = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 =$

$10(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n .

Pour tout entier naturel n , $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$. (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$ et pour

tout entier $n \geq 4$, $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$ donc d'après le théorème d'encadrement

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n avec $0 < q < 1$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 34$