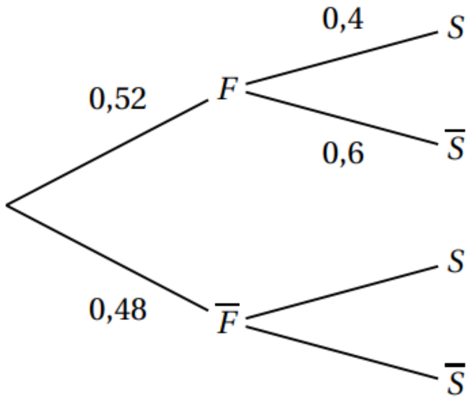
Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DS7** **Décembre 2025**

Exercice I

1. **a.** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0,25$.

b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule $p(F \cap S)$: $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

d. On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

e. Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F})$.

Donc $p\left(S \cap \overline{F}\right) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

Avec la formule de Bayes : $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{F}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,00875 < 0,1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$: $X \sim \mathscr{B}(20; 0,25)$

b. $p(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c. $P(X \geqslant 6) \approx 0,383$ au millième près, à l'aide de sa calculatrice.

d. $P(X<3) = P(X \leqslant 2) \approx 0,0913$ à 10^{-4} près, à l'aide de sa calculatrice.

e. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20 ; 0,25)$, donc $\boxed{E(X)} = np = 20 \times 0,25 = \boxed{5}$

En moyenne, il y a 5 employés qui ont suivi le stage ~~dans~~ un échantillon de 20 employés de l'entreprise interrogés.

f. « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,

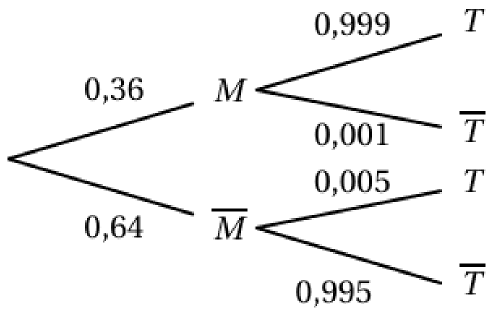
Soit $p(X \leqslant 5)$. À la calculatrice, $p(X \leqslant 5) \approx 0,617$.

Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

Exercice II

Partie A : Étude d'un exemple

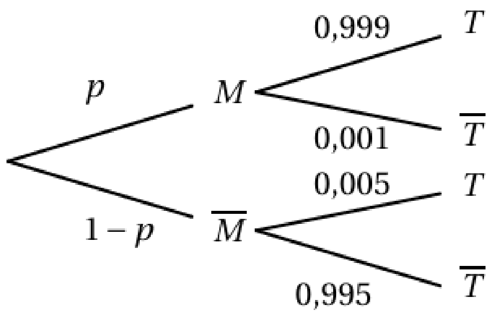
1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0{,}999 \quad \text{et} \quad P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$
2. 270 000 personnes ont été infectées sur 750 000 donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0{,}36$
3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}36 \times 0{,}999 = 0{,}35964$
   donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est 0,36 à 10^{-3} près.
5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}36 \times 0{,}999 + 0{,}64 \times 0{,}005 = 0{,}35964 + 0{,}0032 = 0{,}36284$
   donc la probabilité que l'individu ait un test positif est 0,363 à 10^{-3} près.
6. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}35964}{0{,}36284} \approx 0{,}991$
7. Puisque $P_T(M) \approx 0{,}991 > 0{,}95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0{,}999 + (1-p) \times 0{,}005 = 0{,}999p + 0{,}005 - 0{,}005p = 0{,}994p + 0{,}005$

3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0{,}999}{0{,}994p + 0{,}005}$

4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0{,}95$:
$\dfrac{0{,}999p}{0{,}994p + 0{,}005} > 0{,}95 \iff 0{,}999p > 0{,}95(0{,}994p + 0{,}005) \iff 0{,}999p > 0{,}9443p + 0{,}00475 \iff 0{,}0547p > 0{,}00475 \iff p > \dfrac{0{,}00475}{0{,}0547} \approx 0{,}087$ donc, le test est fiable si $p > 0{,}087$ (soit 8,7%).

Partie C : Étude sur un échantillon

a) X suit la loi binomiale de paramètres n et p = 0,36.
$p_n = P(X \geqslant 1)$ = 1 – P(X< 1) = 1 – P(X=0) car X est à valeurs entières.
$\boxed{p_n = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}36^0 \times (1 - 0{,}36)^{n-0} = 1 - 0{,}64^n}$ car : $\binom{n}{0} = 1 = 0{,}36^0$.

b) On trouve sans peine avec la machine que $p_n \geqslant 0{,}99$ dès que $n \geqslant 11$. L'échantillon doit donc être de taille au moins 11, c'est-à-dire qu'on doit interroger au minimum 11 personnes pour que la probabilité qu'au moins une d'entre-elles soit atteinte de la maladie soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice III

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0{,}4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres 10 ; 0,4 : $X \sim \mathcal{B}(10\,;\,0{,}4)$.

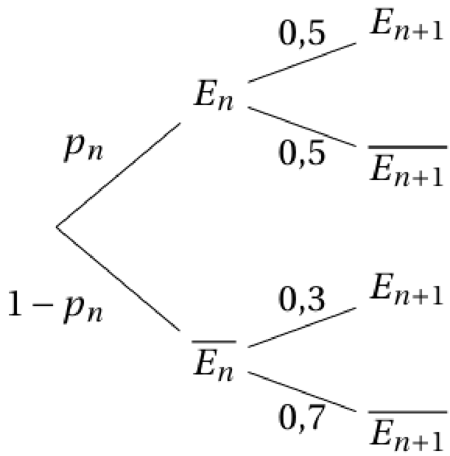
2. **a.** $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8 \approx 0{,}1209$

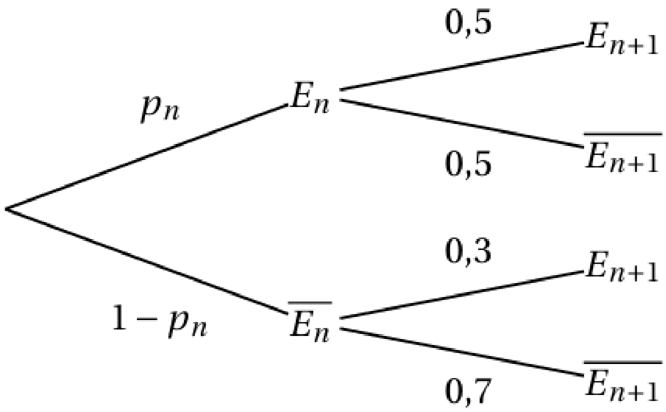
   b. Comme les évènements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{2} P(X=i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \\ &\approx 0{,}1673 \end{aligned}$$
   La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,1673.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;\,0{,}4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}4 = 4$. En moyenne le phénomène El Niño est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

1.





2. $p_0 = 0$

$1 - p_0 = 1$

$$p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P\left(\overline{E_0}\right) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 = 0{,}3$$

3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
$= p_n \times 0{,}5 + (1 - p_n) \times 0{,}3 = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$

(On a ici utilisé la formule des probabilités totales).

4.

a.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8} \\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}3 - \frac{3}{8} \\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \frac{3}{2} - 0{,}2 \times \frac{15}{8} \\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8}\right) \\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \\
&= 0{,}2 \times \left(p_n - \frac{3}{8}\right)
\end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0{,}2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$

Le premier terme $u_0 = -\frac{3}{8}$

b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_0 = -\frac{3}{8}$

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -\frac{3}{8} \times 0{,}2^n$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = p_n - \frac{3}{8}$,

$\forall n \in \mathbb{N} : p_n = -u_n + \frac{3}{8} = (-0{,}2^n + 1) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}(1 - 0{,}2^n)$

c. Comme $0{,}2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{8}$

d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\frac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.

Attention à la question c) : il faut dire : -1<0,2<1 et ne pas se contenter de 0,2 <1 !