Exercice I

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.

2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.

3. La raison q vérifiant $q \in]-1\ ;\ 1[$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.

   En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.

   Il y aura donc 4 800 individus au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.

   $f'(x) \geqslant 0 \iff -0,1x + 1,1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1,1}{0,1} \iff x \leqslant 11$.

   Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 11]$.

3. Nous savons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

- **Initialisation :** $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
  Comme $v_n \in [0\ ;\ 11]$, $v_{n+1} \in [0\ ;\ 11]$, et que f est croissante sur $[0\ ;\ 11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit
  $f(2) \leqslant f[v_{n+1}] \leqslant f[v_n] \leqslant f(6) \iff 2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n_1} \leqslant 4,8$.
  On a donc $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 6$. La proposition est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :** La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n,

- $v_{n+1} \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante ;
- $2 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 2$.

5.

a)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \overset{(*)}{=} -0{,}05 v_n^2 + 1{,}1 v_n$ et (v_n) converge vers $\ell \geqslant 2$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell$.

Faisons tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$:

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} v_{n+1}}_{\ell} = \lim_{n \to +\infty} \left(-0{,}05 v_n^2 + 1{,}1 v_n\right).$$

Par limites de produit et sommes

$$\ell = -0{,}05 \ell^2 + 1{,}1 \ell = f(\ell).$$

$$\ell = -0{,}05\ell^2 + 1{,}1\ell \iff 0{,}05\ell^2 + \ell - 1{,}1\ell = 0 \iff 0{,}05\ell^2 - 0{,}1\ell = 0$$

$$\ell = f(\ell) \iff \ell(0{,}05\ell - 0{,}1) = 0 \underset{\text{(Produit nul)}}{\iff} \ell = 0 \text{ ou } 0{,}05\ell - 0{,}1 = 0$$

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{0{,}1}{0{,}05} = 2$$

$\ell = 0$ est exclue car d'après (q.4), (v_n) converge vers ℓ, avec $\ell \geqslant 2$.

donc $\ell = 2$; $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2}$

b)

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 2.$$

A long terme, la population tend à se stabiliser à 2 milliers d'individus, c'est-à-dire à 2000 individus, soit le tiers de la population initiale.

Partie C

1)

Table de valeurs de (u_n) où $u_n = 6 \times 0{,}93^n$.

n	u_n
9	3,12
10	2,90 < 3

C'est donc à partir de l'année 2035 $(= 2025 + 10)$ que la population du milieu A sera inférieure à 3000 individus.

De même avec (v_n), où : $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = -0{,}05 v_n^2 + 1{,}1 v_n$

n	v_n
5	3,14
6	2,96 < 3

C'est donc pour le milieu B à partir de l'année 2031 $(= 2025 + 6)$ que la population sera inférieure à 3000 individus.

2.

2) $\underbrace{(u_n) \text{ converge vers } 0}$ et $\underbrace{(v_n) \text{ converge vers } 2}$.

Il existe un rang noté n_1, à partir duquel $u_n < 1$ et il existe un rang noté n_2, à partir duquel $v_n > 1$.

Donc dès que n est supérieur au plus grand des deux entiers n_1 et n_2, on a :

$u_n < 1 < v_n$, donc $u_n < v_n$: l'effectif de la population B dépasse donc celui de la population A à partir d'une certaine année.

Solution alternative :

Raisonnons par l'absurde : Supposons que l'effectif du milieu B ne dépasse jamais celui du milieu A, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$.

Alors comme (u_n) et (v_n) convergent, en passant à la limite dans la précédente relation, on aurait : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, donc $2 \leq 0$: absurde

Donc il existe une année à partir de laquelle l'effectif de B sera supérieur à celui de A.

3.a)

Le script complété :

```
n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v= -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)
```

3.b) Il affichera en sortie 2038.

Exercice II

$u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1$. (*)

1) $u_1 = \frac{3}{4} u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$. ($n=0$ dans (*))

(*) avec $n=1$

$u_2 \overset{*}{=} \frac{3}{4} u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{5}{4} = \frac{21}{16} + \frac{20}{16} = \frac{41}{16}$

OR $\frac{41}{16} \neq 3$, donc $\boxed{\text{l'affirmation 1 : } u_2 = 3 \text{ est FAUSSE}}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n$. OR $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison des limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$: $\boxed{\text{Affirmation 2 VRAI}}$

3) Pour tout entier n, $n \leq u_n \leq n+1$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ (car $n > 0$).

$\underline{1 \leq m_n \leq 1 + \frac{1}{n}}$ car $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

OR $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (m_n) converge vers 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n = 1$

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est VRAIE}}$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - n$

Donc $V_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = u_{n+1} - n - 1$.

OR (énoncé) : $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1$, donc $V_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 - n - 1$

$V_{n+1} = \frac{3}{4} u_n - \frac{3}{4} n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4} V_n$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$: $\boxed{\text{Affirmation 4 Vraie}}$