

Exercice I

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1a) Pour $n=0$: $u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 1$, donc $u_1 = 0 + 0 + 1 = 1$

Pour $n=1$: $u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 1$, donc $u_2 = 1 + 2 + 1 = 4$

1b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	1	4	9	16	25	36	49

1c) Il semblerait que pour tout entier naturel n , $u_n = n^2$.

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $u_n = n^2$.

Étape d'initialisation : Pour $n=0$ on a bien $u_0 = 0^2$ car $u_0 = 0$ et $0^2 = 0$!
donc $P(0)$ est vraie.

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixe. Supposons que pour cet entier la $P(n)$ soit vraie, à savoir que : $u_n = n^2$.
hypothèse de récurrence

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire justifier que : $u_{n+1} = (n+1)^2$.
But

Or $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ (énoncé), et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = n^2$

Donc : $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ Identité remarquable n°1.

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre.

donc d'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$.

Exercice II

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

a) $\boxed{u_1} = u_{0+1} = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$

b) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Étape d'initialisation : Pour $n=0$, on a bien : $1 \leq u_1 \leq u_0$, car : $u_1 = \sqrt{2}$

et $\sqrt{2} \approx 1,414$, donc $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$: $P(0)$ est vraie.

Étape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. (hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, à savoir que : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ (But).

Or par hypothèse de récurrence : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

avec par croissance de la
fonction racine carrée
sur $[1; +\infty[$:

$$\underbrace{\sqrt{1}}_{1} \leq \underbrace{\sqrt{u_{n+1}}}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{\sqrt{u_n}}_{u_{n+1}}$$

* cette fonction croît sur $[0; +\infty[$, donc appliquée sur $[1; +\infty[$.
donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : Initialisée et héréditaire à tout ordre, d'après le principe de récurrence
 $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n}$

c) D'après b), on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) décroît.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$, donc (u_n) est minorée par 1.

Vu que (u_n) décroît, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$, donc $u_n \leq 2$: (u_n) est majorée par 2.

(On a donc une suite décroissante et bornée).

Exercise III

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 3u_m - 2m + 3. \quad (*)$$

1) Pour $m=0$, la relation (*) conduit à : $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = \boxed{3}$.

Pour $m=1$, la relation (*) conduit à : $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 - 2 + 3 = \boxed{10}$.

2) $m \in \mathbb{N}$, soit $P(m)$ la propriété : $u_m \geq m$.

Initialisation : Pour $m=0$, $u_0 = 0$ et $0 \geq 0$ est vrai, donc $P(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit m un entier fixé tel que $P(m)$ soit vraie.

Supposons donc que : $u_m \geq m$ (hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $u_{m+1} \geq m+1$ (But).

Par hypothèse de récurrence : $u_m \geq m$

$$\text{Donc : } 3u_m \geq 3m \text{ (car } 3 > 0).$$

$$\text{Donc } \underbrace{3u_m - 2m + 3}_{\text{on ajoute le double du membre le même terme : } -2m+3} \geq 3m - 2m + 3$$

$$\text{Donc : } u_{m+1} \geq m+3.$$

Or $m+3 \geq m+1$, donc $u_{m+1} \geq m+1$: $P(m+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(m)$ est héréditaire à tout ordre m .

$$\text{donc : } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq m}$$

3) Par la méthode de la différence :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 3u_m - 2m + 3 \text{ (équation)}.$$

$$\text{Donc : } u_{m+1} - u_m = 3u_m - 2m + 3 - u_m = 2u_m - 2m + 3 = 2(u_m - m) + 3.$$

Or d'après la q.2), $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq m$, donc $u_m - m \geq 0$ et comme $2 > 0$, on a :

$$2(u_m - m) \geq 0 \text{ donc } 2(u_m - m) + 3 \geq 3 > 0.$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m > 0$: $\boxed{(u_m) \text{ est (strictement) croissante.}}$