

## Exercice I

$u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ .

1a) Pour  $n=0$  :  $u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 1$ , donc  $u_1 = 0 + 0 + 1 = 1$

Pour  $n=1$  :  $u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 1$ , donc  $u_2 = 1 + 2 + 1 = 4$

1b)

|       |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  |
| $u_n$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

1c) Il semblerait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = n^2$ .

2)  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la propriété :  $u_n = n^2$ .

Étape d'initialisation : Pour  $n=0$  on a bien  $u_0 = 0^2$  car  $u_0 = 0$  et  $0^2 = 0$  !  
donc  $P(0)$  est vraie.

Étape d'hérédité : Soit  $n$  un entier naturel fixe. Supposons que pour cet entier la  $P(n)$  soit vraie, à savoir que :  $u_n = n^2$ .  
*hypothèse de récurrence*

Montrons alors que  $P(n+1)$  est vraie, c'est à dire justifier que :  $u_{n+1} = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{But}}$ .

Or  $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$  (énoncé), et d'après l'hypothèse de récurrence,  $u_n = n^2$ .

Donc :  $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$  Identité remarquable n°1.

donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion :  $P(0)$  est vraie et  $P(n)$  est héréditaire à tout ordre.

donc d'après le principe de récurrence, on a :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2}$ .

## Exercice II

$u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ .

a)  $\boxed{u_1} = u_{0+1} = \sqrt{u_0} = \boxed{\sqrt{2}}$

b)  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $P(n)$  la propriété :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

Étape d'initialisation : Pour  $n=0$ , on a bien :  $1 \leq u_1 \leq u_0$ , car :  $u_1 = \sqrt{2}$  et  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , donc  $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$  :  $P(0)$  est vraie.

Étape d'hérédité : Soit  $n$  un entier naturel fixé tel que  $P(n)$  soit vraie.

On suppose donc que :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ . (hypothèse de récurrence).

Montrons alors que  $P(n+1)$  est vraie, à savoir que :  $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$  (But).

Or par hypothèse de récurrence :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

soit par croissance de la  
fonction racine carrée  
sur  $[1; +\infty[$  :

$$\underbrace{\sqrt{1}}_{1} \leq \underbrace{\sqrt{u_{n+1}}}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{\sqrt{u_n}}_{u_{n+1}}$$

\* Cette fonction croît sur  $[0; +\infty[$ , donc croît sur  $[1; +\infty[$ .  
Donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : Initialisée et héréditaire à tout ordre, d'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n}$$

c) D'après b), on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ , donc  $(u_n)$  décroît.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ , donc  $(u_n)$  est minorée par 1.

### Exercise III

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 3u_m - 2m + 3. \quad (*)$$

1) Pour  $m=0$ , la relation (\*) conduit à :  $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = \boxed{3}$ .

Pour  $m=1$ , la relation (\*) conduit à :  $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 3 - 2 + 3 = \boxed{10}$ .

2)  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $P(m)$  la propriété :  $u_m \geq m$ .

Initialisation : Pour  $m=0$ ,  $u_0 = 0$  et  $0 \geq 0$  est vrai, donc  $P(0)$  est vraie.

Etape d'hérédité : Soit  $m$  un entier fixé tel que  $P(m)$  soit vraie.

Supposons donc que :  $u_m \geq m$  (hypothèse de récurrence).

Montrons alors que  $u_{m+1} \geq m+1$  (But).

Par hypothèse de récurrence :  $u_m \geq m$

$$\text{Donc : } 3u_m \geq 3m \text{ (car } 3 > 0 \text{)}.$$

$$\text{Donc } \underbrace{3u_m - 2m + 3}_{\text{on ajoute le double du membre le même terme : } -2m+3} \geq 3m - 2m + 3$$

$$\text{Donc : } u_{m+1} \geq m+3.$$

Or  $m+3 \geq m+1$ , donc  $u_{m+1} \geq m+1$  :  $P(m+1)$  est vraie.

Conclusion :  $P(0)$  est vraie et  $P(m)$  est héréditaire à tout ordre  $m$ .

$$\text{donc : } \boxed{\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq m}$$

3) Par la méthode de la différence :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 3u_m - 2m + 3 \text{ (équation)}.$$

$$\text{Donc : } u_{m+1} - u_m = 3u_m - 2m + 3 - u_m = 2u_m - 2m + 3 = 2(u_m - m) + 3.$$

Or d'après la q.2),  $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq m$ , donc  $u_m - m \geq 0$  et comme  $2 > 0$ , on a :

$$2(u_m - m) \geq 0 \text{ donc } 2(u_m - m) + 3 \geq 3 > 0.$$

Ainsi,  $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} - u_m > 0$  :  $\boxed{(u_m) \text{ est (strictement) croissante}}.$