

Exercice I

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = xe^{-x} = u(x)v(x)$ où : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (-x+1)e^{-x}.$$

de même en dérivant ce produit :

$$f''(x) = -e^{-x} + (-x+1) \times (-e^{-x})$$

$$f''(x) = e^{-x}(-1+x-1) = (x-2)e^{-x}.$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $x-2$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Par ailleurs, f est convexe sur $[2; +\infty[$ et f est concave sur $]-\infty; 2]$.

Exercice II

0) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.

1) $n \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ est la propriété : $4^n > 7n+1$:

a) Pour $n=0$, $4^0=1$ et $7 \times 0 + 1 = 1$. Or $1 > 1$ est une inégalité fausse, donc $P(0)$ est fausse.

b) Pour $n=2$: $4^2=16$ et $7 \times 2 + 1 = 15$. Or $16 > 15$ est une inégalité vraie, donc $P(2)$ est vraie.

c) $P(n+1)$ est la propriété : $4^{n+1} > 7(n+1)+1$, c'est à dire : $4^{n+1} > 7n+8$.

2) Si on tape $u(1)$: n vaut alors 1, et for k range(1) signifie : $0 \leq k < 1$ avec k entier, donc k prend une seule valeur (0), et il y a une seule boucle effectuée.

$u=1$ va être après l'instruction donnée transformé en : $u = \frac{1^3-1}{2 \times 1 + 1} = 0$

En tapant $u(1)$ on aura 0 pour valeur en sortie -

Si on tape $u(2)$: n vaut 2 et for k range(2) signifie : $0 \leq k < 2$ et k entier, donc k vaut successivement 0 puis 1 : on fait donc deux fois la boucle (instruction après le for donnée deux fois d'affilée).

on a déjà vu qu'après le 1^{er} tour de boucle $u=0$.

Au second tour de boucle, la valeur stockée dans u passe à : $\boxed{u} = \frac{0^3-1}{2 \times 0 + 1} = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$

En sortie, Python affichera -1

Si l'on tape $u(0)$, $n=0$ et $0 \leq k < 0$ est une condition impossible, donc le programme ne donne aucune instruction (on n'entre pas dans la boucle For).
Il renvoie en sortie la valeur initiale stockée dans u à savoir $\boxed{1}$

$$b) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n^3 - 1}{2u_n + 1} \end{cases}$$

Exercice III

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

1) Pour $n=0$: $u_{0+1} = u_1 = 2 + 0,8u_0 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = \underline{3,6}$.

Pour $n=1$: $u_{1+1} = u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 3,6 = 2 + 2,88 = \underline{4,88}$.

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété: $u_n = 10 - 8 \times 0,8^n$.

Initialisation: Pour $n=0$, $10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 10 - 8 = 2$ et $u_0 = 2$
donc $u_0 = 10 - 8 \times 0,8^0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit n un entier naturel arbitrairement fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
On suppose donc que: $u_n = 10 - 8 \times 0,8^n$
Hypothèse de récurrence

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que: $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^{n+1}$
Bruit.

OR (énoncé): $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$, et par hypothèse de récurrence

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^n$$

alors $u_{n+1} = 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^n)$

$$u_{n+1} = 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^n$$

$$u_{n+1} = 2 + 8 - 8 \times 0,8^{n+1} \quad \text{car } 0,8 \times 0,8^n = 0,8^1 \times 0,8^n = 0,8^{n+1}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^{n+1}}$$

alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion: $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à tout ordre.
donc d'après le principe de récurrence:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 - 8 \times 0,8^n}$$

3) $0,8 > 0$, donc $0,8^n > 0$ et $-8 < 0$, donc $-8 \times 0,8^n < 0$.

~~Donc : $\forall m \in \mathbb{N}$, $10 - 8 \times 0,8^m < 10$~~
 $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m < 10$.

(u_n) est donc majorée par 10.

4) $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m = 10 - 8 \times 0,8^m$, donc $u_{m+1} = 10 - 8 \times 0,8^{m+1}$.
(Méthode de la différence).

$$\text{Ainsi, } u_{m+1} - u_m = 10 - 8 \times 0,8^{m+1} - (10 - 8 \times 0,8^m)$$

$$u_{m+1} - u_m = \cancel{10} - 8 \times 0,8^{m+1} - \cancel{10} + 8 \times 0,8^m$$

$$u_{m+1} - u_m = -8 \times 0,8^m \times 0,8 + 8 \times 0,8^m$$

$$u_{m+1} - u_m = 8 \times 0,8^m \times (-0,8 + 1) = 8 \times 0,8^m \times 0,2$$

$$\underline{u_{m+1} - u_m = 1,6 \times 0,8^m}$$

Or $1,6 > 0$ et $0,8 > 0$, donc : $\forall m \in \mathbb{N}$, $0,8^m > 0$ et $1,6 \times 0,8^m > 0$.
 $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_{m+1} - u_m > 0$: (u_n) est (strictement) croissante.

Autre méthode :

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = 2 + 0,8u_n - u_n = 2 - 0,2u_n$.

D'après la question 3), pour tout entier naturel n , $u_n < 10$, donc $-0,2u_n > -2$, donc $2 - 0,2u_n > 0$, donc

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.