Exercice I

$$I=\int_0^1 (2e^{3x}-x)\,dx=\left[\frac{2e^{3x}}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{2e^3}{3}-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}-0\right)$$

$$\boxed{I}=\frac{2e^3}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{4e^3-3-4}{6}=\boxed{\frac{4e^3-7}{6}}$$

$$J=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{4-e^{-x}}\,dx$$

. Posons : $\begin{cases} u(x)=4-e^{-x} \\ u'(x)=-(-e^{-x})=e^{-x}. \end{cases}$

donc $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\left[\ln(|u(x)|)\right]_0^1=\left[\ln(4-e^{-x})\right]_0^1$

car si $0\leq x\leq 1$, $-1\leq -x\leq 0$
$e^{-1}\leq e^{-x}\leq 1$
$-1\leq -e^{-x}\leq -e^{-1}$
$0<3\leq 4-e^{-x}$

$$J=\ln(4-e^{-1})-\ln(4-e^{0}) \text{ avec } e^0=1$$

$$J=\ln(4-e^{-1})-\ln(3)$$

$$\boxed{J}=\ln\left(\frac{4-e^{-1}}{3}\right)=\ln\left(\frac{4-\frac{1}{e}}{3}\right)=\boxed{\ln\left(\frac{4e-1}{3e}\right)}$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,e^{\sin(x)}\,dx$$

. Posons $\begin{cases} u(x)=\sin(x) \\ u'(x)=\cos(x). \end{cases}$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,e^{u(x)}\,dx=\left[e^{u(x)}\right]_0^{\pi/2}=\left[e^{\sin(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=e^{\sin(\frac{\pi}{2})}-e^{\sin(0)}$$

or $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ et $\sin(0)=0$, donc $\boxed{K=e-1}$

$$L = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$

Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v'(x) = x \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Par intégration par parties : $L = \int_1^e u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx$

$$L = \left[\ln(x) \times \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$L = \underbrace{\ln(e)}_{=1} \times \frac{e^2}{2} - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \times \frac{1^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$\boxed{L} = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

Exercice II

$0 \leq x \leq 2\pi$ et $f(x) = -1{,}5\cos(x) + 1{,}5$

1) $\quad f(x) = 1{,}5(1 - \cos(x))$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leq 1$, donc $1 - \cos(x) \geq 0$ et $1{,}5 > 0$, donc d'après la règle des signes d'un produit : $f(x) \geq 0$: f est à valeurs positives sur $[0;2\pi]$

2) $\mathcal{A} = 2\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ car f est continue positive sur $[0;2\pi]$ donc l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_1$ est $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ et comme la symétrie axiale conserve les aires, $\mathcal{A} = 2 \times \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

$$\mathcal{A} = 2 \times \int_0^{2\pi} 1{,}5(1 - \cos(x))\,dx = 3 \times \int_0^{2\pi} (1 - \cos(x))\,dx \quad \text{(Linéarité de } \textstyle\int.)$$

$$\mathcal{A} = 3\left[x - \sin(x)\right]_0^{2\pi} = 3\left(2\pi - \sin(2\pi) - (0 - \sin(0))\right)$$

$\boxed{\mathcal{A} = 6\pi \text{ u.a}}$ car $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$.

Exercice III

1. **a.** Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   x étant dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.

   On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses ; la courbe $\mathscr{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

   b. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathscr{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.

   On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.

   Comme de plus il semble que les courbes "s'écrasent" sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\dfrac{1}{2}$.

   On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a :
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x, \text{ par linéarité de l'intégrale.} \\ &= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer.

   On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - \mathrm{e}^x$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a $x \geqslant 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc on en déduit que $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$, soit $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, donc il suit que $1 - \mathrm{e}^x \leqslant 0$.

   Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}(1 - \mathrm{e}^x)$ est négatif. L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $I_{n+1} - I_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

   Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0\,;\,1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.

   (I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ. Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est définie par :

$F_n(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :

$I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = F_n(1) - F_n(0)$

$I_n = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \left(\frac{1}{2} \times 0^2 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times (1 - \mathrm{e}^{-n})$.

Comme on a : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n} = 1$ et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit :

$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\frac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y = x$ entre les abscisses 0 et 1.

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Limites :

- : en $-\infty$: de $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
- : en $+\infty$ $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x}$: on sait que

$\lim_{x \to +\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (puissances comparées), donc :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 - 4\right) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2 + 4) = \left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 2x + 4$.

On a $-x^2 + 2x + 4 = -\left(x^2 - 2x - 4\right) = -\left[(x-1)^2 - 1 - 4\right] = -\left[(x-1)^2 - 5\right] =$

$-x^2 + 2x + 4 = -\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$.

On sait que le trinôme a le signe de $a = -1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle $\left[1 - \sqrt{5}\ ;\ 1 + \sqrt{5}\right]$ où il est positif.

On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$+$			$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -8{,}5$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	$\approx 0{,}25$	$\searrow$	0

On a $f\left(1-\sqrt{5}\right) = \left(2-2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;

$f\left(1+\sqrt{5}\right) = \left(2+2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;

$f(0) = -4$

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{2} = \mathrm{e}^{2} - 1.$

2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a

$$\left\{\begin{array}{lllll} u(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & u'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) & = & x^n & v(x) & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right. \quad \text{on a}$$

$$I_n = \left[\mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -\mathrm{e}^{-x}x^n = 0 - \frac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \frac{I_{n+1}}{n+1} \iff$$

$$(n+1)I_n = -(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + I_{n+1} \iff I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. L'égalité précédente donne avec :

- $n = 0$: $I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$,

$n = 1$: $I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + 2I_0 = 4\mathrm{e}^2 + 2(-\mathrm{e}^2 - 1) = 2\mathrm{e}^2 - 2.$

Partie 3

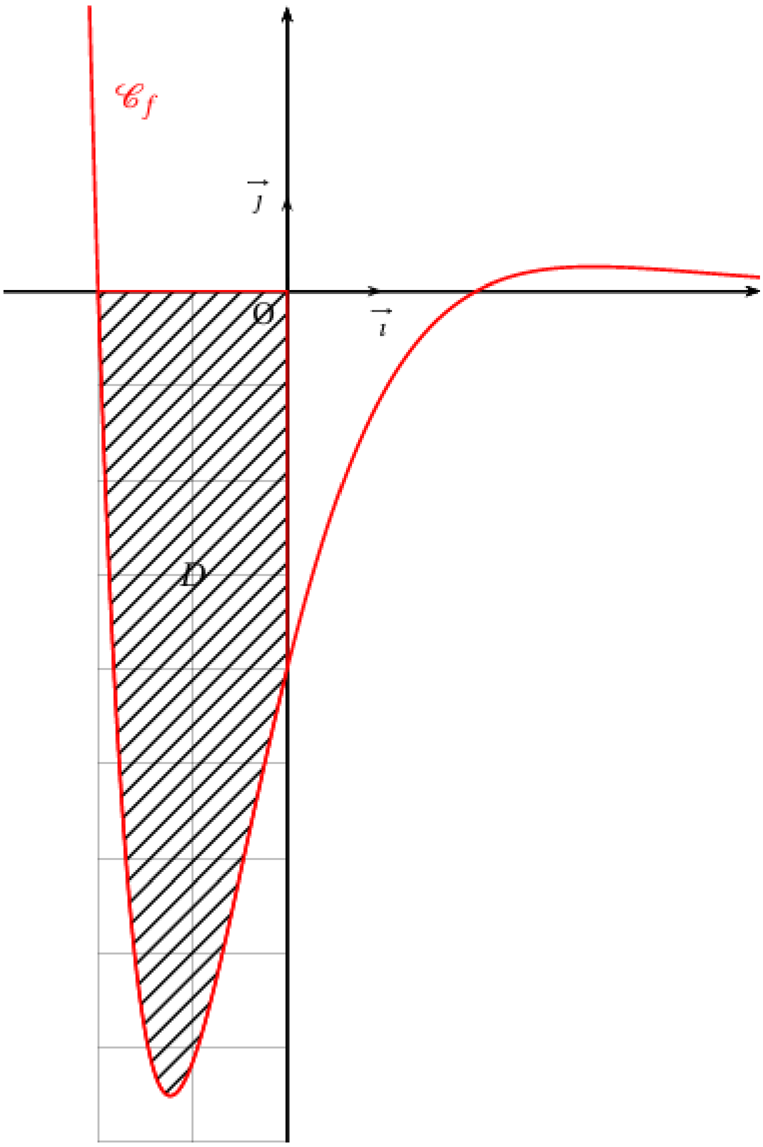
1. f a le signe du trinôme x^2-4 car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

   Comme $x^2-4 = (x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a=1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ où $f'x) < 0$.

   Donc sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $f(x) < 0$ et sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.

2. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2\,,\,0[$, $f(x) < 0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x=-2$ à $x=0$.

   aire$(D) = -\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} \left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x^2\mathrm{e}^{-x} + 4\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x} = -I_2 + 4I_0 =$ $4\left(-\mathrm{e}^2-1\right) - \left(2\mathrm{e}^2-2\right) = 2\mathrm{e}^2-2 \approx 12{,}78$ (ce que l'on peut conforter avec la figure).



Exercice V

---

1) $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x)-1 = \frac{1}{1+e^{-x}} - 1 = \frac{1-(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Or $e^{-x} > 0$, donc $1+e^{-x} > 0$ et $-e^{-x} < 0$, donc $\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x)-1 < 0$

donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en-dessous de } y=1 \text{ sur } [0;+\infty[}$.

b) cf. ci-joint.

c) $\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \int_0^a (1-f(x))\,dx$ car sur $[0;a] \subset [0;+\infty[$, $y=1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

$\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \int_0^a \left(1 - \frac{1}{1+e^{-x}}\right) dx = \int_0^a \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

Soit $u(x) = 1+e^{-x}$; $u'(x) = -e^{-x}$, donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \int_0^a \frac{-u'(x)}{u(x)}\,dx$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \left[-\ln(|u(x)|)\right]_0^a = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^a$ car $1+e^{-x} > 0$.

$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{D}a)} = -\ln(1+e^{-a}) + \ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{2}{1+e^{-a}}\right) \text{ u.a}}$

$\lim\limits_{a \to +\infty} (-a) = -\infty$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} (1+e^{-a}) = 1$, donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{2}{1+e^{-a}}\right) = 2$

Or $\lim\limits_{X \to 2} \ln(X) = \ln(2)$, donc par composée de limites : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}(\mathcal{D}a) = \ln(2)$.

Lorsque a tend vers $+\infty$, l'aire du domaine $\mathcal{D}a$ tend vers une limite finie égale à $\ln(2)$ u.a.

b)