Exercice I

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x+1)=2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)=0^+$. Or $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}}\sqrt{X}=0$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sqrt{1-x}=0^+$ et par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=+\infty$.

b) $g(x)=-2x+30\sin(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\leq\sin(x)\leq 1$, donc $-30\leq 30\sin(x)\leq 30$ car $30>0$.

donc en particulier, $-2x+30\sin(x)\leq -2x+30$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+30)=-\infty$, donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$

c) $h(x)=4x+3-2\sqrt{x}$.

Pour $x>0$, $h(x)=x\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}\right)=x\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}\right)=x\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, donc par limite de produit et de somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=4$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, donc par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty}$

d) Pour tout réel $x<0$, on a : $0\leq cos^2(x)\leq 1, donc\ 0\geq\frac{cos^2(x)}{x}\geq\frac{1}{x}\ \ car\ x<0.$

Par suite : $\boxed{2\geq 2+\frac{cos^2(x)}{x}\geq 2+\frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0, donc$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(2)=2}$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{cos^2(x)}{x}\right)=2.$

Exercice II

(d_1) a pour équation $x=-2$ et (d_2) a pour équation $x=1$.

① $y=-1$ est une droite horizontale asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$: (d_3) a pour équation : $y=-1$

② $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1.}$; $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=+\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=-\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}f(x)=+\infty}$

et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}f(x)=-\infty}$

③

x	$-\infty$		-2			1			$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$	-1

Exercice III

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

a) $g(x)$ existe ssi $f(x)\neq 0$ ssi $x\neq 3$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_g=]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[}$.

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0}$ (*) car $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et par quotient de limite.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}g(x)=+\infty}$ (**) car $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}f(x)=0^+$ et par quotient de limite.

De même, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}g(x)=-\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^-$ et par quotient de limite.

c) (*) établit que $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses au voisinage de } -\infty}$.

(**) établit que $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ a pour asymptote verticale la droite d'équation } x=3}$.

Exercice IV

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ $f(x)$ est calculable si et seulement si $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0$.

On fait un tableau de signes : $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$; $x-3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

donc $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty;-2] \cup]3;+\infty[$.

$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty;-2] \cup]3;+\infty[}$

2) On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}$.

Or par limite de référence, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par limite de produit et de somme : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{2}{x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1-\frac{3}{x}) = 1 \end{cases}$

Par limite de quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1$.

Or, $\lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$, donc par limite de fonctions composées on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice V

44 **a)** La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x > 0$, $e^x > e^0$ c'est-à-dire $e^x > 1$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$,

$0 \leqslant \frac{1}{e^x} \leqslant 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$.

Ainsi pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

54 • Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right).$$

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

67 • $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$.

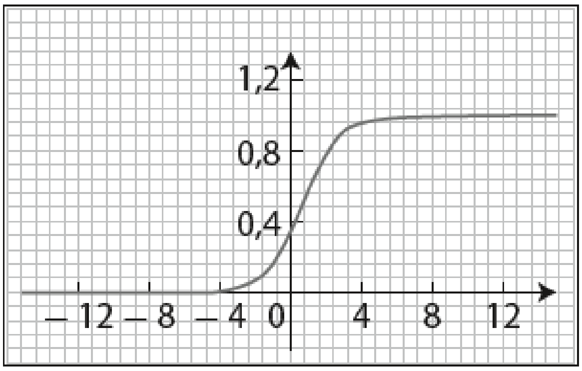
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1) = +\infty$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x+1} = 0$.

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 1$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{e^x+1} = 4$.

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

69 **a)** 

On conjecture que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x\left(\dfrac{2}{e^x} + 1\right)} = \dfrac{1}{2e^{-x} + 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (2e^{-x} + 1) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

d) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormé.

La droite *d* d'équation $y = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote horizontale en - ∞ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite *d'* d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+ \infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

77 Pour tout réel $x > 0$, $k(x) = e^{2x} \times \left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$ et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$.

Exercice VI

101 **1.** La fonction Q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) = -1{,}2 \times 1{,}8e^{-1{,}2t}$.
Pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) < 0$ donc la fonction Q est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$t \mapsto \underbrace{-1{,}2t}_{T \mapsto e^T}$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} T = -\infty$ et $\lim\limits_{T \to -\infty} e^T = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-1{,}2t} = 0$.

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0$.

b) La quantité de médicament tend vers 0 quand t augmente.

3. a) On est certain que l'algorithme se termine.
En effet, $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0$ donc pour tout réel positif R, l'intervalle $]0\,;R[$ contient tous les nombres $Q(t)$ pour t assez grand.

b)

```
from math import*
def Q(t):
    y=1.8*exp(-1.2*t)
    return y
def Seuil(R):
    t=0
    while(Q(t)>R):
        t=t+0.01
    return(t)
```

c) $R = 0{,}9$ $t = 0{,}58$
$R = 0{,}1$ $t = 2{,}41$
$R = 0{,}05$ $t = 2{,}99$

Remarque : *erreur à la ligne du While : c'est : While (Q(t)* **>=** *R).*

Exercice VII

102 **1. a)** $f(x)=\dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-3x})}=\dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-3x}}.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-2x})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-3x})=1.$

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1.$

b) $f(x)=\dfrac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-2x}(e^{3x}-1)}=e^x\times\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}-1)=-1.$

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}\right)=-1.$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0.$

2. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x})=2$ et $\lim\limits_{x\to0}(e^x-e^{-2x})=0.$

On construit le tableau de signe de e^x-e^{-2x}.

Pour cela on peut remarquer que

$e^x-e^{-2x}=e^{-2x}(e^{3x}-1).$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-e^{-2x}		$-$	0	$+$	

On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty.$

3. La droite d_1 d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.

La droite d_2 d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe.

La droite d_3 d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe.

Exercice VIII

a) $ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$.

donc par limite de somme et produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0^{+}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x}} = +\infty$, donc par somme et produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty}$

Par le même procédé, on obtient sans mal : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$, et $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch(x)$.

donc ch est paire sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x}>0$, $e^{-x}>0$, $2>0$, donc $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} > 0$, donc $ch(x) > 0$.

de même : $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2} = -sh(x)$

donc sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $sh'(x) = \frac{e^{x}-(-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = ch(x)$.

D'après (b), $ch(x)>0$ sur $\mathbb{R}$, donc $sh'(x)>0$ sur $\mathbb{R}$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) $ch'(x) = \frac{e^{x}+(-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = sh(x)$.

Grâce à c) : sh croît sur $\mathbb{R}$ et $sh(0)=0$, donc $\forall x\in\,]-\infty;0]$, $sh(x)\leq 0$

et $\forall x\in[0;+\infty[$, $sh(x)\geq 0$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'=sh$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$ch(0) = \frac{e^{0}+e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

e) ch et sh sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $ch''(x) = ch(x)$. Or $ch(x) \geq 1 > 0$, donc ch est CONVEXE sur $\mathbb{R}$.

$sh''(x) = sh(x)$ et $sh(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, donc sh est CONVEXE sur $[0;+\infty[$

et Concave sur $]-\infty;0]$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}$: $ch^2(x) - sh^2(x) = \big(ch(x) + sh(x)\big)\big(ch(x) - sh(x)\big)$ (IR n°3)

$$ch^2(x) - sh^2(x) = \underbrace{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}\underbrace{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}$$

$$\boxed{ch^2(x) - sh^2(x)} = \frac{2e^x}{2} \times \frac{2e^{-x}}{2} = e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = \boxed{1}$$

g) $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

$\boxed{\mathcal{D}_{th} = \mathbb{R}}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1$, donc $ch(x) \neq 0$ (pas de V.I par le quotient).

h) $$\lim_{x \to -\infty} th(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Or, $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, donc $\lim_{x \to -\infty} (e^{2x} - 1) = -1$ et de même

$\lim_{x \to -\infty} (e^{2x} + 1) = 1$, donc par quotient : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} th(x) = -1}$

En observant que th est impaire sur $\mathbb{R}$, on obtient sans peine : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} th(x) = 1}$

$\mathcal{C}_{th}$ a alors donc deux asymptotes horizontales : $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$.

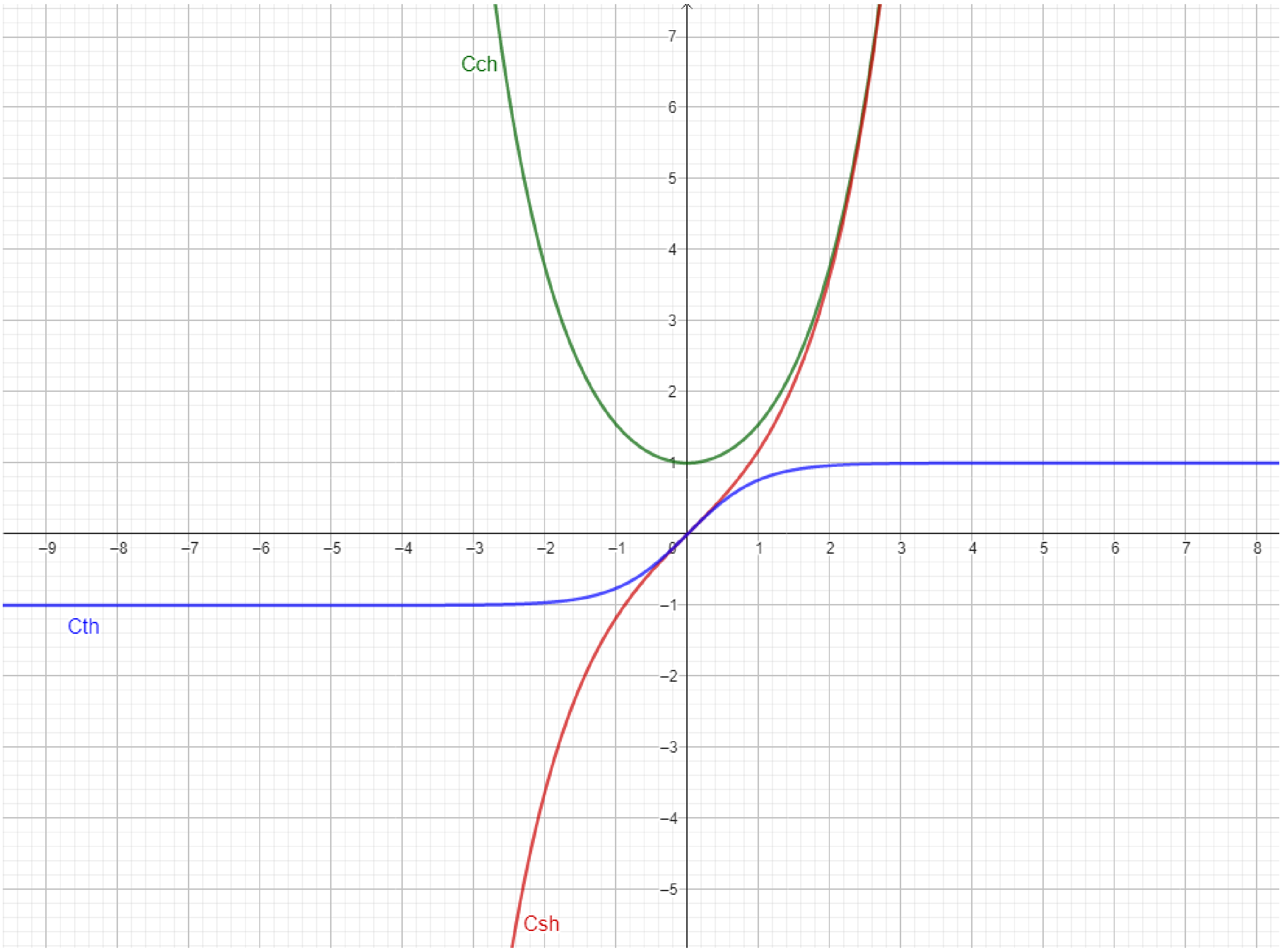
i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \dfrac{sh'(x)ch(x) - sh(x)ch'(x)}{ch^2(x)}$ (dérivée d'un quotient de type $\frac{u}{v}$).

Grâce à 1-c et 1-d : $th'(x) = \dfrac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} \underset{\text{1-f}}{=} \dfrac{1}{ch^2(x)}$ (>0).

Alors th croît strictement sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$th(x)$	$-1 \nearrow 1$

j) Facile !



BONUS :

FAUX : *l'exo 69 que vous venez de traiter dans l'exercice IV vous donne un contre-exemple.*

Ou encore plus simplement : *prenons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = x+1$ *et* $g(x) = x$.

$f(x)/(g(x) = \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$ qui admet par limite de référence et de somme 1 pour limite en $+\infty$, et $f(x) - g(x) = x + 1 - x = 1$ donc la limite de $f - g$ en $+\infty$ est égale à 1 et pas à 0 !!!