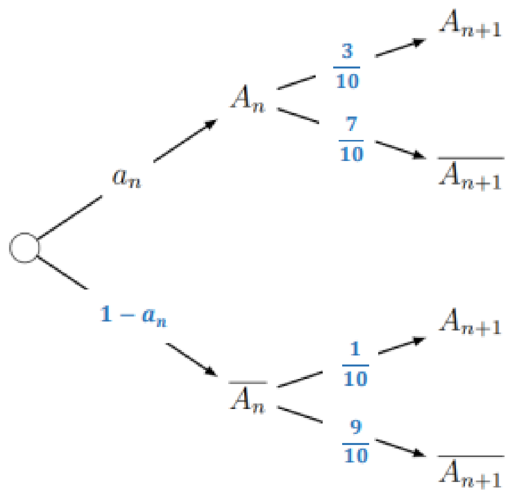
Exercice I

I-1- $a_1 = \frac{1}{5}$.

I-2-



I-3- $P(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{3}{10} a_n$.

$P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{1}{10}(1 - a_n)$.

I-4- $a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10}$. En effet :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$$

$$= \frac{3}{10} a_n + \frac{1}{10}(1 - a_n) = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10}.$$

I-5-a- $u_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$.

I-5-b- La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

En effet : $u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5}\left(u_n + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{40} = \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = \frac{1}{5} u_n$.

I-6-a- Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{3}{40}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

I-6-b- Pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$

En effet : $a_n = u_n + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8} = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$.

I-7- La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $l = \frac{1}{8}$

En effet : $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

Après qu'un grand nombre de clients se soient connectés, la probabilité de gagner tend à se stabiliser à 1/8.

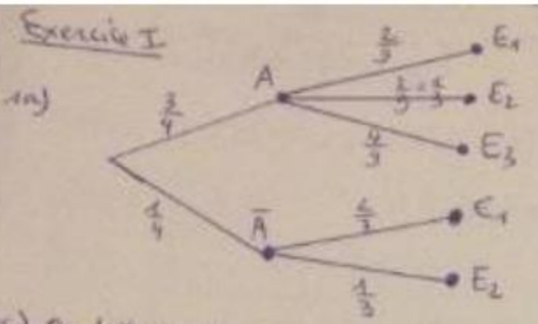
I-8-a- Pour tout entier naturel n non nul, $a_n > \frac{1}{8}$.

En effet : **Pour tout entier naturel n non nul,** $\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$.

Exercice II

Exercice I

1a)



$P(A) = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}$

1b) $\boxed{P(\bar{A}\cap E_2)} = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

La probabilité que la personne interrogée prenne l'escalier (ET) aille au 2e étage est égale à $\frac{1}{12}$.

1c) On doit montrer que : $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$ ($= \frac{1}{3}$!)

Or $P(E_1) = \underbrace{P(A\cap E_1)} + P(\bar{A}\cap E_1)$ d'après la formule des probabilités totales.

$P(E_1) = P(A) \times P_A(E_1) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_1)$

$P(E_1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$\boxed{P(E_1)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

De même, $P(E_2) = \underbrace{P(A\cap E_2)} + \underbrace{P(\bar{A}\cap E_2)}$

$\boxed{P(E_2)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Comme (E_1, E_2, E_3) forment une partition de l'univers des possibles, on a : $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$

donc $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + P(E_3) = 1$, donc $P(E_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Par suite, $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = P(E_3), \text{ donc } E_1, E_2 \text{ et } E_3 \text{ sont équiprobables}}$

1d) On cherche ici : $P_{E_2}(\bar{A})$: D'après la relation des probabilités conditionnelles on a :

$\boxed{P_{E_2}(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}\cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) Interroger une personne et lui demander si elle va au 2ème étage ou non constitue une épreuve de Bernoulli (le succès est ici : aller au 2ème étage). Le paramètre p de cette dernière est $p = \frac{1}{3}$ d'après 1c).

On répète 60 fois cette même épreuve, de façon indépendante.

La variable aléatoire X égale au nombre de personnes allant au 2ème étage parmi les 60 interrogés suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(60\,;\frac{1}{3})$: $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(60\,;\frac{1}{3})}$

b) On cherche ici : $P(X=15) = \binom{60}{15} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \times \left(1-\frac{1}{3}\right)^{60-15} = \binom{60}{15} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{45}$.

On tape : BinomFdp(60, 1/3, 15)

Donc $\boxed{P(X=15) \approx 0{,}0446 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$

c) On cherche ici $E(X) = n \times p = 60 \times \frac{1}{3} = 20$.

En moyenne, on peut s'attendre à 20 personnes (sur les 60 interrogés) allant au 2ème étage.

d) On cherche la valeur de P(X ⩾ 20) :

Grâce à la calculatrice Numworks, on obtient sans peine : P(X ⩾ 20) ≈ 0,548 à 10^{-3} près.

Exercice III

Lorsqu'on tire une cordelette, la probabilité p de gagner est : $p = \frac{30}{250} = 0{,}12$

a) Tirer une cordelette constitue une épreuve de Bernoulli : soit on gagne le gros lot (succès) avec une probabilité $p = 0{,}12$, soit on perd !

On répète trois fois cette même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante, donc on a un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X égale au nombre $\underbrace{\text{de gros lots gagnés}}_{=\text{ nombre de succès}}$ par le joueur au cours de ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = 0{,}12$.

$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(3\,;0{,}12)}$

b) On cherche ici la valeur de $P(X=0)$.

On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$, alors, pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a :

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ici, $k=0$; $n=3$; $p=0{,}12$.

donc $P(X=0) = \binom{3}{0} \times 0{,}12^0 \times (1-0{,}12)^{3-0} = 1 \times 1 \times 0{,}88^3 = 0{,}88^3$

$\boxed{P(X=0) \approx 0{,}68 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

c) on cherche ici la valeur de $P(X \geq 1)$.

Or, $P(X\geq 1) = 1 - P(\overline{X \geq 1}) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0)$ car X est à valeurs entières !

$P(X \geq 1) \approx 1 - 0{,}68$

$\boxed{P(X\geq 1) \approx 0{,}32 \text{ au centième près.}}$

d) on cherche ici la valeur de $P(X=2)$:

$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0{,}12^2 \times (1-0{,}12)^{3-1} = \binom{3}{2} \times 0{,}12^2 \times 0{,}88$

on peut taper directement sur la T.I : $P(X=2) =$ BinomFdp$(3, 0.12, 2)$

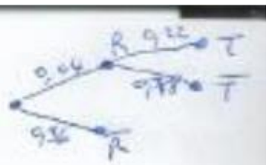
$\boxed{P(X=2) \approx 0{,}04 \text{ au centième près}}$

<u>Remarque</u> : avec la Numworks, on calcule directement les résultats des questions c) et d).

<u>Exercice IV</u>

<u>Exercice II</u> (70 page 450)

Notons R l'événement : l'avion est en retard et T : le retard est de plus de 3^h.



$P(R) = 0{,}04$; $P_R(T) = 0{,}22$

d'après la formule des probabilités conditionnelles : $\overbrace{P(T)}^{P(R\cap T)} = P(R) \times P_R(T) = 0{,}04 \times 0{,}22 = 0{,}0088$.

Effectuer un vol courte distance constitue une épreuve de Bernoulli : soit le vol a un retard de plus de 3^h (succès) soit il a moins de 3^h de retard.

Alexandra répète 20 fois (10 allers retours) de façon indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de retards de plus de 3^h lors de ces 20 voyages :

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}0088)$

$750^€ = 250^€ \times 3$, donc on cherche ici la valeur de $P(X=3)$:

$P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0{,}0088^3 \times (1-0{,}0088)^{20-3}$ et on tape sur T.I : BinomFdp$(20, 0.0088, 3)$

$\boxed{P(X=3) \approx 6{,}7 \times 10^{-4}}$

Idem avec la Numworks, pour avoir P(X=3), on fait successivement :

Menu Probabilités, exe, choix de binomiale (flèche vers la droite), on entre les paramètres n=20 et p =0,0088, on va sur suivant puis exe, puis en haut à gauche, on choisit la dernière courbe (quatrième avec flèche vers le bas), puis on entre 3 dans P(X=...)

Exercice IV

C'est un exercice de manipulation de votre calculatrice Numworks.

a) P(X=27)$\approx$0,2361 à 10^{-4} *près*.
b) P(X$\leqslant$25) $\approx$0,1755 à 10^{-4} *près*.
c) P(X$\geqslant$27) $\approx$0,6474 à 10^{-4} *près*.
d) P(21$\leqslant$X$\leqslant$27) $\approx$0,5882 à 10^{-4} *près*.
e) On fait une table de valeurs à l'aide du menu suite explicite :
Pour u_n on tape : valise (juste sous la touche OK), puis on descend à probabilités, et curseur à droite, on choisit loi de probabilités, curseur à droite encore, on choisit binomiale, curseur à droite et on choisit binomcdf(m,n,p), puis exe, et attention, on tape dans l'ordre : n,30,0.9 : ici m=b correspond à l'indice de la suite appelé n sur la calculatrice, et n et p sont les paramètres de la loi binomiale, ici 30 et 0,9.

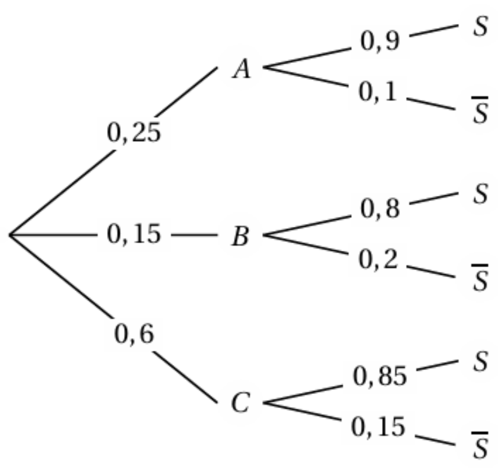
b	P(X$\leqslant$b)
28	0,8163
29	0,9576

Donc on obtient b =29

Exercice V

Partie A

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.
Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S \cap B)$.
$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$.

3. De même :
$P\left(C\cap\overline{S}\right) = P(C)\times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6\times 0,15 = 0,09$.
Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A)\times P_A(S) + P(B)\times P_B(S) + P(C)\times P_C(S)\\ &= 0,25\times 0,9 + 0,15\times 0,8 + 0,6\times 0,85\\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51\\ &= 0,855 \end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :
$P_S(B) = \dfrac{P(S\cap B)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} = \dfrac{8}{57} \approx 0,1403$.
La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. **a.** Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :

- Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p
$p = P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,855 = 0,145$;
- cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

b. La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X \leqslant 8)$.
Avec la calculatrice, on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,7044$,
Donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $0,704$ arrondi au millième.

2. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\times 0,145^k\times 0,855^{n-k}.$$

L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

Ainsi : $p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \dbinom{n}{0}\times 0,145^0\times 0,855^{n-0} = 1 - 0,855^n$.

2.b.

```python
def seuil():
    n=0
    while 1-0.855**n<0.99:
        n=n+1
    return(n)
```

Ce programme renvoie 30 en sortie : c'est à partir du rang n=30 que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

<u>Exercice VI</u>

1a) $P(B) \neq 0$, donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Or $\{A ; \bar{A}\}$ partitionne Ω, donc $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ (union disjointe c'est-à-dire $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ incompatibles).

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ (Ici l'énoncé aurait dû préciser que $P(\bar{A}) \neq 0$).

D'où : $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}}$ (relation de Bayes).

1b) Nommons A = " la personne est atteinte de la maladie"
B = " le test est positif".

on a : $p(A) = x$ et on cherche $p_B(A)$. Grâce à la question précédente, en tenant compte du fait que $p_A(B) = \frac{99}{100} = 0{,}99$ et $p_{\bar{A}}(B) = \frac{0{,}1}{100} = 0{,}001$ on a : $f(x) = \dfrac{x \times 0{,}99}{x \times 0{,}99 + \underbrace{(1-x)}_{} \times 0{,}001}$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - x$

D'où : $f(x) = \dfrac{0{,}99x}{0{,}99x + 0{,}001 - 0{,}001x} = \dfrac{0{,}99x}{0{,}989x + 0{,}001}$

$$\boxed{f(x)} = \frac{0{,}99x \times 1000}{(0{,}989x + 0{,}001) \times 1000} = \boxed{\frac{990x}{989x+1}}$$

2a) $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{990x}{989x+1}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 990x \\ u'(x) = 990 \end{cases}$
f est dérivable sur $[0;1]$

Donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad \begin{cases} v(x) = 989x + 1 \\ v'(x) = 989 \end{cases}$

d'où $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{990(989x+1) - 990x \times 989}{(989x+1)^2}$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\cancel{990 \times 989x} + 990 - \cancel{990 \times 989x}}{(989x+1)^2} = \boxed{\frac{990}{(989x+1)^2}}.$$

Or $990 > 0$ et $(989x+1)^2 > 0$ (pour tout réel x)..

Donc, $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

2b) Ici $x = \frac{1}{10.000} = 10^{-4}$. Donc $f(x) = f(10^{-4}) = \dfrac{990 \times 10^{-4}}{980 \times 10^{-4} + 1}$

$f(10^{-4}) \approx 0{,}09$ (soit environ 9 %).

On peut légitimement penser que ce test n'est pas efficace et ne doit pas être commercialisé —

2c) On cherche $x \in [0;1]$ tel que $f(x) \geq 0{,}99$

$f(x) \geq 0{,}99 \iff \dfrac{990x}{989x+1} \geq 0{,}99 \iff \dfrac{990x}{989x+1} \geq \dfrac{99}{100} \underset{\div 99 \text{ et } 99>0}{\iff} \dfrac{10x}{989x+1} \geq \dfrac{1}{100}$

$f(x) \geq 0{,}99 \underset{\substack{\times 100 \\ \text{car } 100>0}}{\iff} \dfrac{1000x}{989x+1} \geq 1 \underset{\substack{\text{car} \\ 989x+1>0 \text{ vu que } 0\leq x \leq 1}}{\iff} 1000x \geq 989x + 1 \iff 11x \geq 1 \underset{\text{car } 11>0.}{\iff} x \geq \frac{1}{11}$

Il faudrait donc au minimum $\frac{1}{11}$ de personnes malades dans la population pour que la valeur prédictive du test soit supérieure ou égale à 0,99.