Exercice I

1) $O(0;0)$; $I(1;0)$; $J(1;0)$; $A(1;1)$; $K\left(\frac{1}{2};0\right)$; $L\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

1b) M est le milieu de $[JL]$, donc $M(x_M;y_M)$ avec : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_J+x_L}{2} = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \\ y_M = \dfrac{y_J+y_L}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

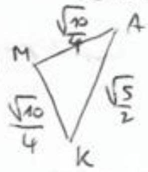
Donc $M\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$.

1c) $MA = \sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}$.

$\boxed{MA} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{4}}$

1d) $MA = \frac{\sqrt{10}}{4}$ et $MK = \frac{\sqrt{10}}{4}$, donc $MA = MK$: Ainsi, M est équidistant des points A et K et à ce titre, M appartient à la médiatrice du segment $[AK]$.

2)



D'une part : $AK^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

D'autre part : $MA^2+MK^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\frac{10}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

Ainsi, $AK^2 = MA^2+MK^2$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAK est rectangle en M.

Comme $MA=MK$, $\boxed{\text{MAK est un triangle rectangle et isocèle en M}}$

3a) $\boxed{\mathcal{A}(AMK)} \overset{\text{car AMK rectangle en M!}}{=} \frac{MA\times MK}{2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{4}}{2} = \frac{\frac{10}{16}}{2} = \frac{10}{16}\times\frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}\times 5}{16\times\cancel{2}} = \boxed{\frac{5}{16}}$ u. aires.

3b) Facile : H est le point d'intersection de (AK) et de la perpendiculaire à (AK) passant par M.

3c) On cherche ici MH :

$\underbrace{\text{Aire}(AMK)}_{\text{q. 3a}} = \frac{AK\times MH}{2}$ car $(MH)\perp(AK)$.

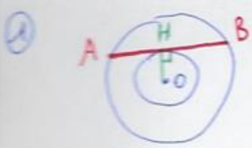
$\frac{5}{16} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\times MH}{2}$

$\frac{5}{16} = \frac{\sqrt{5}}{4}\times MH$, donc $\boxed{MH} = \frac{5}{16}\div\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{16}\times\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cancel{4}}{4\times\cancel{4}\times\cancel{\sqrt{5}}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{4}}$ u.l.

Exercice II

Exercice III

①



Soit R le rayon du grand cercle, et r celui du petit cercle.

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB) : les triangles OHA et OHB étant identiques, H est le milieu de [AB], donc $AH = \frac{24}{2} = 12\text{cm}$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHO rectangle en H dit :

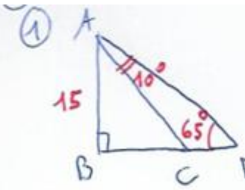
$$OA^2 = AH^2 + HO^2$$

$$R^2 = 12^2 + \underbrace{HO^2}_{r^2}$$

$$\boxed{R^2 - r^2} = 12^2 = \boxed{144}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{A} = \pi \times 144 = 144\pi \text{ cm}^2}$$

2)

①



$AB = 15$; $\widehat{ADB} = 65°$ et $\widehat{CAD} = 10°$.

$\mathcal{P}(ACD) = AC + CD + AD$ avec :

Dans le triangle BAC rectangle en B, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$, avec $\widehat{BAC} = 90 - (65+10) = 90 - 75 = 15°$.

Donc $\boxed{AC} = \frac{BA}{\cos(\widehat{BAC})} = \boxed{\frac{15}{\cos(15)}}$ cm.

et $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{BA}$, donc $\boxed{BC} = BA \sin(\widehat{BAC}) = \boxed{15\sin(15)}$.

Enfin, dans le triangle BAD rectangle en B : $\sin(\widehat{BDA}) = \frac{AB}{AD}$, donc $\boxed{AD} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BDA})} = \boxed{\frac{15}{\sin(65)}}$

et $\tan(\widehat{BDA}) = \frac{BD}{BA}$ Donc $\boxed{DB} = BA\tan(\widehat{BDA}) = \boxed{15\tan(65)}$

Donc comme B, C, D sont aussi alignés, on a : $\boxed{CD} = BD - BC = \boxed{15\tan(65) - 15\sin(15)}$.

D'où $\mathcal{P}(ABC) = AC + CD + AD = \frac{15}{\cos(15)} + 15\tan(65) - 15\sin(15) + \frac{15}{\sin(65)}$

Exercice III

1) $\boxed{0,86 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,87}$; $\boxed{0,1428 < \frac{1}{7} < 0,1429}$

2) $\boxed{P} = 2\pi R = 2\pi \times 10 = \boxed{20\pi \text{ mètres}}$

: $1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{ m}$.

On cherche a et b tels que : $a < \pi < b$ donc $20a < 20\pi < 20b$ tels que $20b - 20a = 0,01$

$20(b-a) = 0,01$, donc $b - a = \frac{0,01}{20} = 5\times 10^{-4}$

Or $\pi \simeq 3,1415926535\ldots$, donc $\underline{3,14155 < \pi < 3,1416}$ et $3,1416 - 3,14155 = 5\times 10^{-4}$.

On obtient bien : $62,831 < P < 62,832$

Exercice IV

① Faux : par exemple, $3,14 < \pi$ mais $3,14 > 3,1$! ($\pi \simeq 3,1415926535$).
Ctrex : $x = 3,14$

② Faux : ctrex : $1,5 \in [0,8 ; 2]$, mais $1,5 \notin [0,7 ; 1]$ car $1,5 > 1$.

③ Faux : $\mathbb{Z} \cap]-1 ; 0[= \emptyset$ (aucun élément commun à ces 2 ensembles).

④ Faux : le décimal $3,4000000005$ appartient à $]3,4 ; 3,400001[$.

⑤ Vrai : Si $x > 1$, alors $x \times x > x \times 1$ car $x > 1 > 0$
Donc $\boxed{x^2 > x}$.

Si $x > 1$, alors $x \times x^2 > 1 \times x^2$, c'est-à-dire : $\boxed{x^3 > x^2}$

Ainsi, par transitivité de la relation ($>$) on a : $x^3 > x^2$ et $x^2 > x$, donc $\boxed{x^3 > x}$.

Exercice V

1) a) $x \in [0 ; 1,5] \iff 0 \leq x \leq 1,5$

b) $x \in]1,2 ; +\infty[\iff x > 1,2$

c) $x \notin [3 ; +\infty[\iff x < 3$

2) a) $1 < x \leq 3,4 \iff x \in]1 ; 3,4[$; b) $x > 3 \iff x \in]3 ; +\infty[$.

3)

Faire des dessins !!

$\underline{I \cap J = [14 ; 15[}$; $\underline{I \cup J = [12 ; 20]}$.

$\underline{I \cap J =]-2\pi ; -\pi]}$; $\underline{I \cup J =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}}$.

Exercice VI

I- 1) $-3<a\leq 5$, donc $-3+7<a+7\leq 5+7$, c'est-à-dire : $\underline{4<a+7\leq 12}$.

2) $-3<a\leq 5$, donc $-3-5{,}2<a-5{,}2\leq 5-5{,}2$, c'est-à-dire : $\underline{-8{,}2<a-5{,}2\leq -0{,}2}$

3) $-3<a\leq 5$, donc $-3\times 4<4a\leq 4\times 5$ car $4>0$, c'est-à-dire : $\underline{-12<4a\leq 20}$.

4) $-3<a\leq 5$, donc $-6<2a\leq 10$ (car $2>0$), donc $\underline{-14<2a-8\leq 2}$

5) $-3<a\leq 5$ donc $-3\times(-4)>-4a\geq 5\times(-4)$ car $-4<0$, donc $12>-4a\geq -20$

donc $\underline{13>-4a+1\geq -19}$

6) $-3<a\leq 5$, donc $-6<a-3\leq 2$, donc $\underline{\frac{-6}{7}<\frac{a-3}{7}\leq\frac{2}{7}}$ car $7>0$.

II- $A>B>C>0$: donc $\frac{A}{B}>\frac{B}{B}>\frac{C}{B}$ $\underline{\text{car } B>0}$

donc $\frac{A}{B}>1>\frac{C}{B}$: Ainsi, $\boxed{\frac{A}{B}>1 \text{ et } \frac{C}{B}<1}$

III-

a) $1{,}4\leq x\leq 3{,}2$

$-1\leq y\leq 2$

donc $1{,}4+(-1)\leq x+y\leq 3{,}2+2$

$\boxed{0{,}4\leq x+y\leq 5{,}2}$

b) $1{,}4\leq x\leq 3{,}2$, donc $2{,}8\leq 2x\leq 6{,}4$ car $2>0$

$-1\leq y\leq 2$, donc $\underline{-3\leq 3y\leq 6}$ car $3>0$.

Donc : $2{,}8+(-3)\leq 2x+3y\leq 6{,}4+6$

$\boxed{-0{,}2\leq 2x+3y\leq 12{,}4}$

c) $1{,}4\leq x\leq 3{,}2$: $x-y=x+(-y)$ ⚠ Pas de soustraction d'inégalité !

$-1\leq y\leq 2$ donc $-1\times(-1)\geq -1\times y\geq -1\times 2$, donc $-2\leq -y\leq 1$.

Ainsi : $1{,}4\leq x\leq 3{,}2$

$-2\leq -y\leq 1$

$1{,}4+(-2)\leq x+(-y)\leq 3{,}2+1$

$\boxed{-0{,}6\leq x-y\leq 4{,}2}$

d) $1{,}4\leq x\leq 3{,}2$, donc $2{,}8\leq x\leq 6{,}4$ (car $2>0$).

$-1\leq y\leq 2$, donc $5\geq -5y\geq -10$ (car $-5<0$).

Ainsi : $2{,}8\leq x\leq 6{,}4$

$-10\leq -5y\leq 5$

$2{,}8+(-10)\leq x+(-5y)\leq 6{,}4+5$

$\boxed{-7{,}2\leq x-5y\leq 11{,}4}$

Exercice VII

1) $2x-7>6-(2x-8)$

$2x-7>6-2x+8$

$2x+2x>6+8+7$

$4x>21$

$x>\frac{21}{4}$ car $4>0$

$S=]\frac{21}{4};+\infty[$

$4x-2(6+2x)\leqslant 4-2(x-11)$

$4x-12-4x<4-2x+22$

$-12<-2x+26$

$2x<26+12$

$2x<38$

$x<\frac{38}{2}$ car $2>0$

$x<19$

$S=]-\infty;19[$.

2) $1-a<2a+5<9-a$ équivaut à :

$1-a<2a+5$ et $2a+5<9-a$.

$1-5<2a+a$ et $2a+a<9-5$

$3a>-4$ et $3a<4$

$a>-\frac{4}{3}$ et $a<\frac{4}{3}$

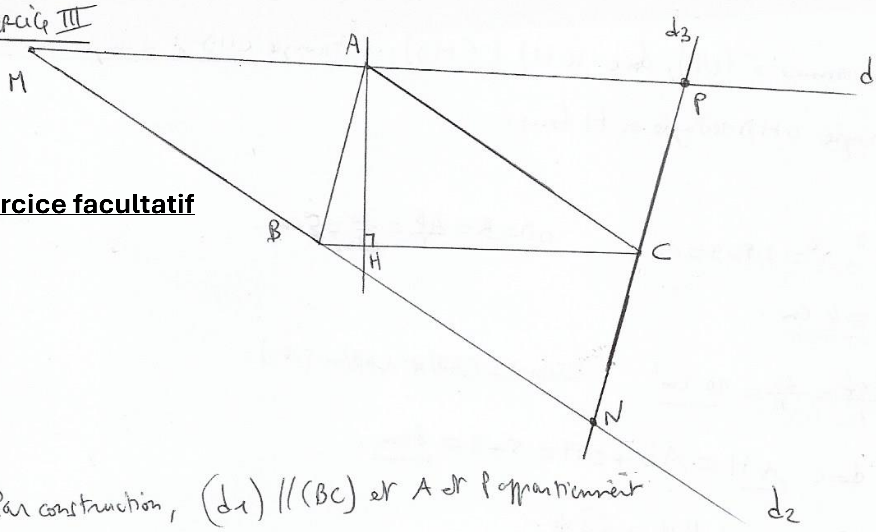
$S=]-\frac{4}{3};\frac{4}{3}[$, donc

$S_{\mathbb{Z}}=\{-1;0;1\}$ car $a\in\mathbb{Z}$

Exercice facultatif

Exercice III

1)



2a) Par construction, $(d_1) // (BC)$ et A et P appartiennent à d_1, donc $(AP) // (BC)$.

de même, $(AB) // (PC)$.

Or si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux parallèles, alors c'est un pgm.

donc APCB est un pgm.

même raisonnement pour établir que ACBM est un pgm.

2b) APCB est un pgm, or les côtés opposés d'un pgm ont la même longueur, donc $AP = BC$.

ACBM est un pgm, donc par le même raisonnement, $AM = BC$

Par suite, on a : $AP = AM$ $(= BC)$.

Or M, A, P sont aussi alignés et $AP = AM$, donc A est le milieu du segment [MP].

2c) Par définition du projeté orthogonal, $(AH) \perp (BC)$.

Or d'après 2a) on a : $(AP) // (BC)$.

On sait que si deux droites du plan sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

donc $(AH) \perp (AP)$, et comme $(AP) = (MP) = d_1$, on a : <u>$(AH) \perp (MP)$ avec A = Milieu de [MP]</u>.

Ainsi, (AH) est la médiatrice du segment [MP].

2d) En raisonnant de façon similaire à 2c), la hauteur issue de B du triangle ABC est la médiatrice du segment [MN] et la hauteur issue de C du triangle ABC est la médiatrice du segment [NP].

Or (cf. cours), les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Par suite, comme les médiatrices des côtés du triangle MNP sont les hauteurs du triangle ABC, il en résulte que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes !