Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
a) $u_n = \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

et par somme et quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}}$

b) $u_n = \frac{(-1)^n + 3\sin(n)}{n^2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1}$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc $\underline{-3 \leqslant 3\sin(n) \leqslant 3}$, donc $-4 \leqslant (-1)^n + 3\sin(n) \leqslant 4$
(on a additionné membre à membre deux inégalités de même sens !!).

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{-\frac{4}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n^2}}$ (car $n^2 > 0$, donc sens de l'inégalité inchangé en divisant par n^2).

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0}$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-4}{n^2} = 0}$.

Par suite, les trois points soulignés rendent licite d'utiliser le théorème des gendarmes, qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c)

$u_n = 1,2^n - 1,21^n$. (on a une F.I a priori de type "$\infty - \infty$").

$u_n = 1,2^n \times \left(1 - \frac{1,21^n}{1,2^n}\right) = 1,2^n \times \left(1 - \left(\frac{1,21}{1,2}\right)^n\right)$. Or $\frac{1,21}{1,2} = \frac{121}{120}$, donc $\frac{1,21}{1,2} > 1$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1,21}{1,2}\right)^n = +\infty$ et par produit et somme de limites, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{1,21}{1,2}\right)^n\right) = -\infty}$.

De même, comme $1,2 > 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n = +\infty}$. Par limite de produit, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,2^n - 1,21^n = -\infty$.

d) $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour $n \geqslant 1$: $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n \times 1}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par limite de somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

et par limite de quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1 ; 1\}$, donc : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

donc pour $n > 0$: $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Par limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0}$

Pour finir, par limite de somme on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice II

43p185

a) Il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1;1\}$, donc $(-1)^n \geq -1$, donc $4\times(-1)^n \geq 4\times(-1)$ car $4>0$, donc $\underbrace{n+4\times(-1)^n}_{t_n} \geq n-4$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n \geq n-4$

c) Grâce à la question b), $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n \geq n-4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-4) = +\infty$, donc par th. de comparaison de limites :

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty}$.

d) C'est faux ! Contre-exemple : la suite (t_n) diverge vers $+\infty$ mais (t_n) n'est pas croissante à partir d'un certain rang :

En effet, $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1}-t_n = n+1+4(-1)^{n+1} - (n+4(-1)^n) = \cancel{n}+1+4(-1)^{n+1} - \cancel{n} - 4(-1)^n = 1+4(-1)^{n+1} + 4(-1)^{n+1} = 1+2\times4\times(-1)^{n+1}$

$t_{n+1}-t_n = 1+8(-1)^{n+1}$ avec $8(-1)^{n+1} \in \{-8;8\}$

Donc $t_{n+1}-t_n$ vaut alternativement 9 ou -7 donc n'est pas de signe constant positif !

Ainsi, (t_n) n'est ni croissante, ni décroissante !

45p185

$\forall n\in\mathbb{N}$, $e_n = \frac{1}{n+5}$

a) Si $n\geq 1$, alors $n+5\geq n$, donc $\frac{1}{n+5} \leq \frac{1}{n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$.

De plus, $e_n \geq 0$ car $1>0$ et $n+5>0$ (vu que $n\geq 1$).

Donc : pour tout entier $n\geq 1$, $\boxed{0\leq e_n \leq \frac{1}{n}}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $0\leq e_n\leq \frac{1}{n}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0}$.

48p185

$\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n = -4e^{2n+3}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $2n+3\geq n$, donc $e^{2n+3} \geq e^n$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

donc $-4e^{2n+3} \leq -4e^n$ car $-4<0$; donc $\boxed{c_n \leq -4e^n}$

Or $e>1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc comme $-4<0$, par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -4e^n = -\infty}$

$e\approx 2{,}72$

D'après th. de comparaison des limites on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty}$

58p186 $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = -n^2+4n+2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-n^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n+2) = +\infty$, donc on est en présence d'une F.I (par la somme).

Or, $u_n = n(-n+4)+2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+4) = -\infty$, donc par limite de produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(-n+4) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$, donc par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(-n+4)+2 = -\infty$

Bref, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

94p191

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\frac{8}{n}}$.

a) $f(x) = e^x - 4x - 1$

f est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = e^x - 4$.

Or $0 \leq x \leq 1$; donc $e^0 \leq e^x \leq e^1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;1]$).

donc $e^x - 4 \leq e - 4$ avec $e \simeq 2{,}72$ donc $e - 4 \simeq -1{,}28$.
donc $e - 4 \leq 0$.

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $e^x - 4 \leq 0$

$\forall x \in [0;1]$, $f'(x) \leq 0$, donc f décroît sur $[0;1]$.

b) f décroît sur $[0;1]$, donc $\forall x \in [0;1]$, $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

x	0	1
$f(x)$	$f(0)$ $\searrow$	$f(1)$

Or $f(0) = e^0 - 4 \times 0 - 1 = 0$
$(e^0 = 1)$

$\forall x \in [0;1]$, $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) \leq 0$ donc $e^x - 4x - 1 \leq 0$, donc $e^x \leq 1 + 4x$

Enfin, si $0 \leq x \leq 1$, $e^0 \leq e^x$ car exp. croît sur $\mathbb{R}$, donc $1 \leq e^x$

Par suite, $\boxed{\forall x \in [0;1],\ 1 \leq e^x \leq 1 + 4x}$

c) $n \geq 8$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{8}$ par décroissance de la fonction inverse sur $[8;+\infty[$.

donc $\frac{8}{n} \leq \frac{8}{8}$ car $8 > 0$, donc $\frac{8}{n} \leq 1$. et $\frac{8}{n} \geq 0$ (règle des signes).

Ainsi, si $n \geq 8$, alors $0 \leq \frac{8}{n} \leq 1$.

Appliquons alors la question b) avec $x = \frac{8}{n}$; $(\in [0;1])$:

$$1 \leq e^{\frac{8}{n}} \leq 1 + 4 \times \frac{8}{n}$$

$\boxed{\text{Pour } n \geq 8,\quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$

d) Or $\boxed{\lim_{n \to +\infty} 1 = 1}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par produit et somme, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{32}{n}\right) = 1}$.

de plus, pour $n \geq 8$ (q. c) on a l'encadrement : $\boxed{1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}}$.

Donc d'après le th. des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$

Exercice III

1. D'après le texte :
   - $a_1 = a_0 - \dfrac{15}{100}a_0 + \dfrac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
   - $b_1 = b_0 - \dfrac{10}{100}b_0 + \dfrac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$
2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 3000$.
3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100}b_n$.

   Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$. On a alors :

   $$a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n$$
   $$= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0,75a_n + 300$$

4. **a.** Soit la propriété : $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

   - **Initialisation**

     $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$

     Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang n, soit $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$; c'est l'hypothèse de récurrence.

     $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$

     $\iff 0,75 \times 1200 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 0,75 \times 1700$

     $\iff 900 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} \leqslant 0,75 \times a_n \leqslant 1275$

     $\iff 900 + 300 \leqslant 0,75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0,75 \times a_n + 300 \leqslant 1275 + 300$

     $\iff 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575$

     Or $1575 \leqslant 1700$ donc $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$.

     La propriété est donc vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.

   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout n, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

   b. Étude de la convergence de la suite (a_n).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = a_n - 1200$; donc $a_n = v_n + 1200$.

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 1200 = 0,75a_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900$
$= 0,75v_n + 900 - 900 = 0,75v_n$

$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,75$.

b. On en déduit que, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,75^n$.

c. On sait que, pour tout n, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.

6. **a.** $-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,75^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200$.

b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3000 - 1200 = 1800$.

7. **a.** On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def  seuil() :
     n = 0
     A = 1 700
     while A>=1280 :
         n=n+1
         A = 0.75*A + 300
     return
```

b. Avec sa machine à calculer, on trouve sans peine que la valeur renvoyée est 7.

Exercice IV

Exercice II (79 p219)

1a) 1b) : Manifestement, cette suite semble être croissante et bornée : minorée par 0 et majorée par 4.

2a) Soit $P(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : Pour $n=0$: montrons que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.

On $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0,5 \times 0^2 + 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \, (\simeq 2,82)$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ (hyp. de récurrence)

Montrons alors sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ est vraie, à savoir que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

Par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$

Donc $0 \leq u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \leq 16$ par croissance de la fonction carré sur $[0;4]$.

Donc $0 \leq 0,5u_n^2 \leq 0,5u_{n+1}^2 \leq 8$ car $0,5 > 0$.

Donc $8 \leq 0,5u_n^2 + 8 \leq 0,5u_{n+1}^2 + 8 \leq 16$

Donc : $\sqrt{8} \leq \underbrace{\sqrt{0,5u_n^2+8}}_{=u_{n+1}} \leq \underbrace{\sqrt{0,5u_{n+1}^2+8}}_{=u_{n+2}} \leq \sqrt{16}$ par croissance de la fonction racine sur $[0;+\infty[$.

donc : $0 \leq \sqrt{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.

donc par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.}$

Rq : En posant $f(x) = \sqrt{0,5x^2+8}$ on pouvait aussi étudier le sens de variation de f sur $[0;4]$ et prouver que f croît sur $[0;4]$ et permettait de conclure dans l'étape d'hérédité !

2b) À la question 2a) on a établi que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) croît.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$, donc (u_n) est majorée par 4.

donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2 - 16$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 16 = \left(\sqrt{0{,}5u_n^2+8}\right)^2 - 16 = 0{,}5u_n^2 + 8 - 16 = 0{,}5u_n^2 - 8$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5(u_n^2 - 16) = 0{,}5\, v_n$.

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$

3b) Vu que (v_n) est géométrique, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = u_0^2 - 16 = 0^2 - 16 = -16$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -16 \times 0{,}5^n$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2 - 16$, donc : $u_n^2 = v_n + 16 = -16 \times 0{,}5^n + 16$

$u_n^2 = 16(1 - 0{,}5^n)$.

Donc comme $u_n \geq 0$, $u_n = \sqrt{16(1-0{,}5^n)} = 4\sqrt{1-0{,}5^n}$.

c) Vu que $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-0{,}5^n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1-0{,}5^n} = \sqrt{1} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{1-0{,}5^n} = 4$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

Remarque : dans l'absolu, cette dernière question nécessite d'utiliser la notion de limite de fonctions composées, cela sera très bientôt traité.

Exercice V

① $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5(a_n - 2) = 0{,}5b_n$.

donc (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5 : Réponse $\boxed{B}$.

② $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.

$u_1 = u_0 + 3v_0 = 2 + 3 = 5$
$v_1 = u_0 + v_0 = 2 + 1 = 3$ (on exclut déjà la réponse d).

$u_2 = u_1 + 3v_1 = 5 + 9 = 14$ et $v_2 = u_1 + v_1 = 8$ (a) est exclue).

$\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$: Bonne réponse : c)

③ Réponse d) : u_{10} et v_{10} : For k in range(1, 11) signifie : $1 \leq k < 11$ et k entier

donc on fait 10 tours de boucle : on part de u_0 et $0 + 10 = 10$

④ Puisque $0 < \frac{1}{4} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ on a par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1}$.

Enfin : $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n \times 1}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, donc par opérations sur les limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1} = -1$, par suite, par limite de somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{n}{n+1}\right)=1}.$$

de plus, grâce à l'encadrement $1+\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\frac{n}{n+1}$ et au calcul des limites des termes encadrant que l'on a calculées, on peut appliquer le théorème des gendarmes et affirmer que : (u_n) converge vers 2 : réponse a).

⑤ $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n \times v_{n+1} \overset{(*)}{<} 0$, donc deux termes consécutifs sont toujours de signe contraire!
$v_0 = k$ et $k \neq 0$, donc $v_0 > 0$ ou $v_0 < 0$.
de plus, $v_0, v_2, v_4, \ldots, v_{10}$ sont de même signe grâce à (*) et à la règle des signes d'un produit. [v_0 et v_1 sont de signe contraire, v_1 et v_2 également, donc v_0 et v_2 ont même signe...)
donc v_{10} a le même signe que $v_0 = k$: réponse c).

⑥ Par lecture graphique $f'(0)=1$.
deux droites parallèles ont même coefficient directeur.
donc T est parallèle à la droite d'équation $y = x$ ($y = 1x$).
réponse a)

⑦ g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x) = 1000x^{999}+1$ et $g''(x) = 999000x^{998}$
Or pour tout réel x, $x^{998} = (x^{499})^2$, donc $x^{998} \geqslant 0$ et $999000 > 0$ donc pour tout réel x : $g''(x) \geqslant 0$: la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$: réponse b)

⑧ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$, donc ($u_n$) est croissante.
de plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 1$, donc (u_n) est majorée par 1.
Par suite, la suite (u_n) converge d'après le théorème de convergence des suites monotones.
réponse b) : La suite (u_n) converge.

Exercice VI

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{0-4}{0+3} = -\dfrac{4}{3}$

   $u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python; on la complète de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
       u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.

   f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $]-3\,;\,+\infty[$.

   Sur $]-3\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$;

   donc la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

   - **Initialisation**

     Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_1 = -\frac{4}{3}$; donc on a; $-2 < u_1 \leqslant u_0$.

     La propriété est vraie au rang 0.

   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

     Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$, on se place ans l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$.
     Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante donc :

     $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

     $f(-2) = \dfrac{-(-2)-4}{-2+3} = -2$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

     Donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ équivaut à $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

     On a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour tout entier naturel n, on a donc : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. On a vu que :

   - pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante;
   - pour tout n, $-2 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

   D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

On remarque que, pour tout n, $u_n > -2$ entraîne $u_n+2 > 0$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ existe pour tout n et est strictement positive (donc non nulle).

a. $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{u_n+3}{u_n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n+2} - \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{u_n+2}{u_n+2} = 1$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$.

c. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 + n \times r = 0{,}5 + n$.

$v_n = \dfrac{1}{u_n+2} \iff \dfrac{1}{v_n} = u_n+2 \iff u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$ donc $u_n = \dfrac{1}{n+0{,}5} - 2$, pour tout n.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+0{,}5) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+0{,}5} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.