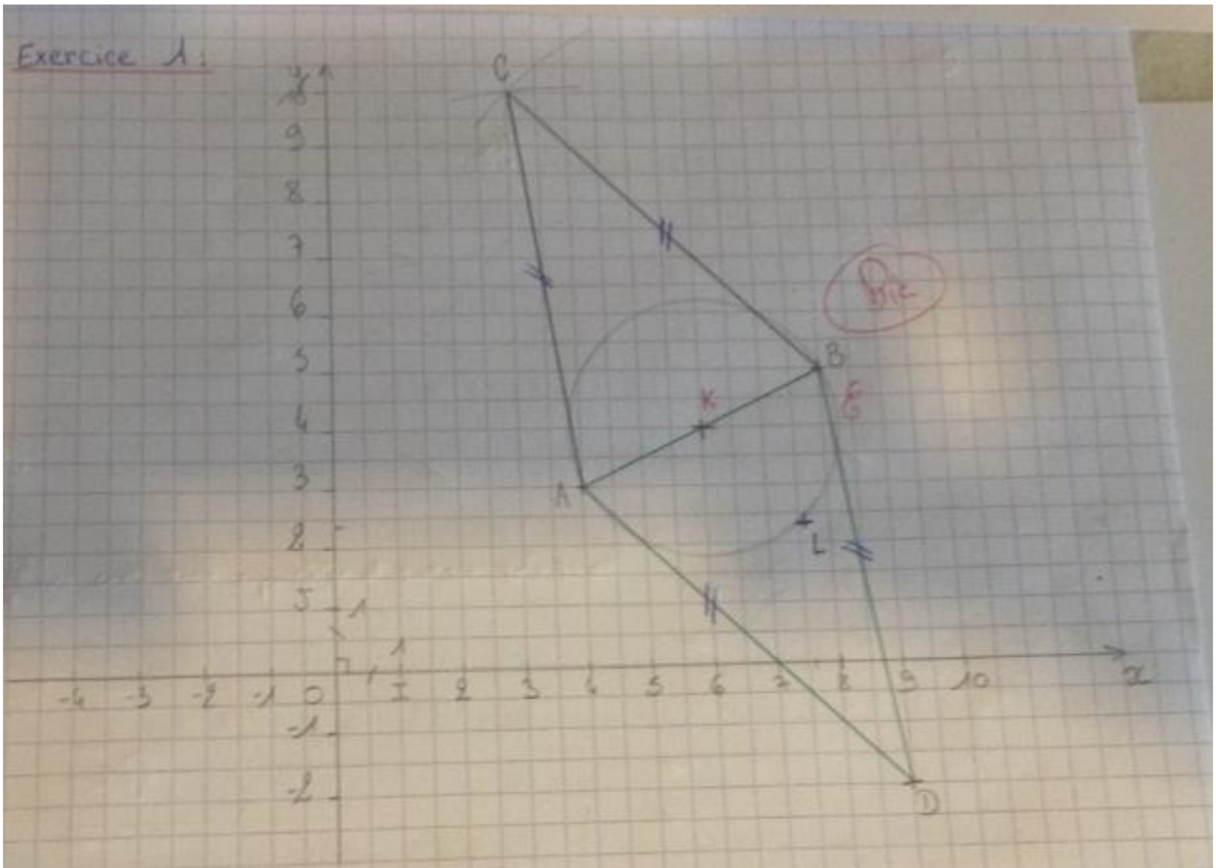
Exercice I



b) On sait que K = milieu de [AB], donc K a pour coordonnées $(x_K ; y_K)$

$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

$x_K = \frac{4 + 8}{2}$ $y_K = \frac{3 + 5}{2}$

$x_K = \frac{12}{2} = 6$ $y_K = \frac{8}{2} = 4$

Donc $\boxed{K(6 ; 4)}$

$BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2}$ $AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$

$BD = \sqrt{(8-9)^2 + (5-(-2))^2}$ $AD = \sqrt{(4-9)^2 + (3-(-2))^2}$

$BD = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49}$ $AD = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25}$

$\boxed{BD = \sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$ $\boxed{AD = \sqrt{50} \text{ unités de longueur}}$

$BD = AD$, donc le triangle ABD est bien isocèle en D.

d) On sait que le point C est le symétrique du point D par rapport au point K, donc K = milieu de [CD].

$x_K = \dfrac{x_C + x_D}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_C + y_D}{2}$

$6 = \dfrac{x_C + 9}{2}$ $4 = \dfrac{y_C + (-2)}{2}$

$12 = x_C + 9$ $8 = y_C + (-2)$

$x_C = 12 - 9 = 3$ $y_C = 8 + 2 = 10$

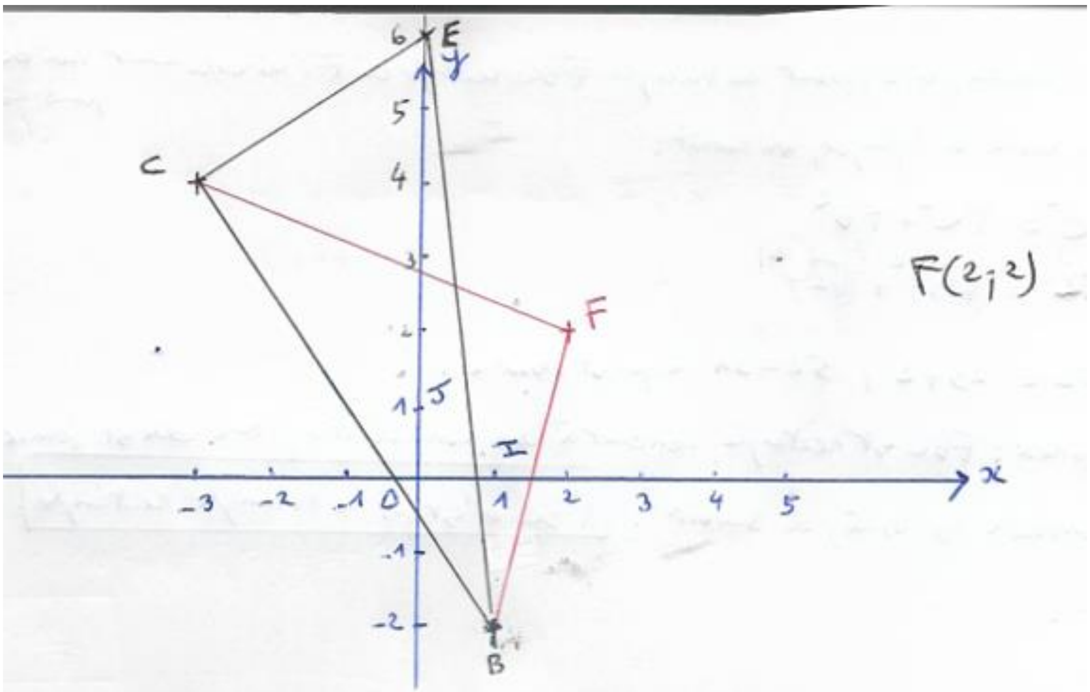
$\boxed{\text{Donc } C(3;10).}$

$e)$ On peut calculer les longueurs CA et CB, on trouve sans peine que : $CA = CB = \sqrt{50}$.

Par suite, grâce aux calculs effectués en 1c), on a : $CA = CB = BD = DA = \sqrt{50}$, et par suite, le quadrilatère $ACBD$ est un losange en tant que quadrilatère ayant ses quatre côtés de la même longueur.

Exercice II

1)
B(1;-2)
C(-3;4)
E(0;6)



Il suffit, pour démontrer que les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires, de démontrer que le triangle BCE est rectangle en C :

Calculons au préalable la longueur des trois côtés du triangle BEC :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-(-2))^2}$

$BC = \sqrt{(-4)^2 + 6^2}$

$BC = \sqrt{16 + 36}$

$BC = \sqrt{52}$

$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$

$EC = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-6)^2}$

$EC = \sqrt{9 + 4}$

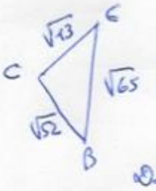
$EC = \sqrt{13}$

$BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2}$

$BE = \sqrt{(0-1)^2 + (6-(-2))^2}$

$BE = \sqrt{(-1)^2 + 8^2}$

$BE = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.



D'une part : $BE^2 = (\sqrt{65})^2 = 65$.

D'autre part : $BC^2 + CE^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65$.

Ainsi on a : $BE^2 = BC^2 + CE^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BEC est rectangle en C et par suite, les droites (BC) et (EC) sont perpendiculaires.

2)

Calculons les longueurs BC et FT, où T désigne le centre du cercle de diamètre BC.

Soit K le milieu de [BC] : $K\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$

$K\left(\frac{1+(-3)}{2} ; \frac{-2+4}{2}\right)$ $K(-1 ; 1)$

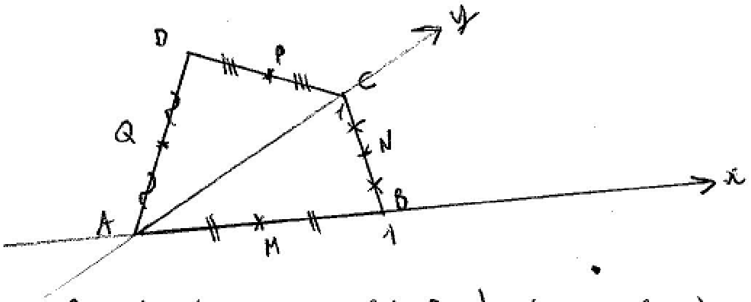
$KF = \sqrt{(x_F - x_K)^2 + (y_F - y_K)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ u.l

Le rayon R du cercle de diamètre BC est KB.

Or, $KB = \sqrt{(x_B - x_K)^2 + (y_B - y_K)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ u.l

Ainsi, $KF \neq KB$ vu que $\sqrt{10} \neq \sqrt{13}$. Par suite, F n'appartient pas au cercle de diamètre BC.

Exercice III



On se place dans le repère (A ; B ; C) : donc $A(0;0)$; $B(1;0)$ et $C(0;1)$
$D(a;b)$.

M = Milieu de [AB], donc $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $M\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$ $\boxed{M\left(\frac{1}{2};0\right)}$.

N = Milieu de [BC], donc $N\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ $N\left(\frac{1+0}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ $\boxed{N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

P = Milieu de [CD], donc $P\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right)$ $P\left(\frac{0+a}{2};\frac{1+b}{2}\right)$ $\boxed{P\left(\frac{a}{2};\frac{b+1}{2}\right)}$

Q = Milieu de [DA], donc $Q\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)$ $Q\left(\frac{0+a}{2};\frac{0+b}{2}\right)$ $\boxed{Q\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)}$

2c) V = Milieu de [MP], donc $V\left(\frac{x_M+x_P}{2};\frac{y_M+y_P}{2}\right)$ $V\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2};\frac{0+\frac{b+1}{2}}{2}\right)$

$V\left(\frac{\frac{a+1}{2}}{2};\frac{\frac{b+1}{2}}{2}\right)$ $\boxed{V\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)}$

W = Milieu de [NQ], donc $W\left(\frac{x_N+x_Q}{2};\frac{y_N+y_Q}{2}\right)$ $W\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2}}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}}{2}\right)$

$W\left(\frac{\frac{1+a}{2}}{2};\frac{\frac{1+b}{2}}{2}\right)$ $\boxed{W\left(\frac{a+1}{4};\frac{b+1}{4}\right)}$

2d) V et W ont les mêmes coordonnées, donc sont confondus.
[MP] et [NQ] qui sont les diagonales du quadrilatère MNPQ se coupent donc en leur milieu.
donc $\boxed{\text{MNPQ est un pgm}}$ en tant que quadrilatère ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu.
Conclusion : quelle que soit la nature du quadrilatère ABCD, le quadrilatère MNPQ s'appuyant sur les milieux des côtés de ABCD est toujours un parallélogramme.

Point logique

1) C'est la réponse C.

En effet, si les deux étaient positifs, Stein ne pourrait pas poser la question citée dont la réponse serait non (impossible chez un positif).

De même, si les deux étaient négatifs, la réponse à la question de Stein serait non, et donc un au moins serait positif, en contradiction avec l'hypothèse faite qu'ils sont tous les deux négatifs.

Donc un seul est positif, et l'autre négatif.

Stein ne peut pas être positif, car sinon sa réponse serait oui, et cela signifierait qu'il est également négatif : impossible.

Ainsi : Albert est positif et Stein négatif.

2)

2) On sait que $v = \frac{d}{t}$ / $d = t \times v$ / $t = \frac{d}{v}$

soit t_1, v_1, d_1 le temps, la vitesse, la distance parcourue à 2 km/h

Soit t_2, v_2, d_2 le temps, la vitesse et la distance parcourue à 3 km/h

Soit t_3, v_3, d_2 le temps, la vitesse et la distance (Nu) parcourue à 4 km/h.

On sait que : $t_1 = t_2 + t_3$ car il a marché la moitié du temps à 2 km/h et $d_2 = d_1 + d_3$ car il a marché la moitié de la distance à 3 km/h.

Aussi, $d_1 = v_1 \times t_1$

$d_1 = 2 \times t_1$

$d_2 = v_2 \times t_2$

$d_2 = 3 \times t_2$

$d_3 = 4t_3$

Donc, je peux transformer $d_2 = d_1 + d_3$ en :

$3t_2 = 2t_1 + 4t_3$

On sait que $t_2 = t_1 - t_3$ (d'après le point 2)

$3(t_1 - t_3) = 2t_1 + 4t_3$

$3t_1 - 3t_3 = 4t_3 + 2t_1$

$t_1 = 7t_3$

$t_3 = \frac{t_1}{7}$ or on sait que $t_1 = \frac{1}{2}t$ donc

$t_3 = \frac{\frac{1}{2}t}{7}$ $t_3 = \frac{1}{14}t$

La fraction correspondante au temps passé à marcher à 4 km/h est $\frac{1}{14}$. Bien