

Exercice I

① $g(x) = f(-x)$
 alors $g'(x) = -1 \times f'(-x) = \underline{\underline{-f'(-x)}}$ rappel : $(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$.

$h(x) = f(2x)$
 alors $h'(x) = 2 \times f'(2x)$

$k(x) = f(x-2)$
 $k'(x) = 1 \times f'(x-2) = \underline{\underline{f'(x-2)}}$

② $f'(-1) =$ coefficient directeur de la droite rouge (tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(-1;1)$) :

Cette droite passe par $A(-1;1)$ et $B(0;10)$.

soit son coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 1}{0 - (-1)} = 9$.

donc $\boxed{f'(-1) = 9}$

de même, $f'(1) =$ coefficient directeur de la droite bleue tangente à $\mathcal{C}_f$ en $C(1;3)$.

Cette droite passe aussi par $D(2;0)$, donc $\underline{\underline{f'(1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 3}{2 - 1} = \frac{-3}{1} = -3}}$

3) (valeur 1) et 2 :

$$\begin{cases} g'(-1) = -f'(-(-1)) = -f'(1) = -(-3) = 3 \\ g'(1) = -f'(-1) = -9 \\ h'(0.5) = 2 \times f'(2 \times 0.5) = 2f'(1) = 2 \times (-3) = -6 \\ k'(1) = f'(1-2) = f'(-1) = 9 \end{cases}$$

Exercice II

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$$f(x) = e^{-x^2} = e^{u(x)} \text{ avec : } \begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$$

$$\text{Donc } f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = -2xe^{-x^2}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ équivaut à $-2x \geq 0$, c'est à dire $x \leq 0$ → c.a.d $x \in]-\infty, 0]$!

⚠️ Contraindre à ce que je lis encore trop fréquemment des vos copies, $-2x$ n'est pas une quantité négative pour tout réel x ! Prenez $x = -1$: $-2x = -2(-1) = 2$.
Attention à cette erreur tenace!

Ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		1	

$$f(0) = e^0 = 1$$

2) a) $g(x) = e^{-x^2} - x^2 - 1$ avec $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ où f est la fonction de la (9-1)

$$g'(x) = f'(x) - 2x = -2xe^{-x^2} - 2x = -2xe^{-x^2} - 2x \times 1$$

$$g'(x) \stackrel{\text{factorisation}}{=} -2x(e^{-x^2} + 1)$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} > 0$, donc $e^{-x^2} + 1 > 1 > 0$. Donc $g'(x)$ a même signe que $-2x$.

Ainsi: $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$		0	

$$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

c) Grâce à q.b) g admet pour Maximum 0 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi (def. d'un max), $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$ c'est à dire: $e^{-x^2} - x^2 - 1 \leq 0$

$$\text{Donc } e^{-x^2} \leq x^2 + 1$$

ce qui est située sous la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ et $0(0;0)$ est commun à ces deux courbes.

Exercise III

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 5x)^4$
 $f = u^4$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 - 5x \\ u'(x) = 2x - 5 \end{cases}$
 $f' = 4u^3 u'$
 donc $\boxed{f'(x) = 4(2x - 5)(x^2 - 5x)^3}$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2 - 1}$
 $g = e^u$ où u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} u(x) = 3x^2 - 1 \\ u'(x) = 6x \end{cases}$
 $g' = u' e^u$ donc $\boxed{g'(x) = 6x e^{3x^2 - 1}}$

c) $h_1(x) = \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{u(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 + 4 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$
 $\boxed{h_1'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}$

d)

$i(x) = x e^{-x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$
 $i'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
 $i'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x} - x e^{-x}$
 $i'(x) = e^{-x}(1 - x) = (-x + 1)e^{-x}$

e) $j(x) = e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$

On pose u définie par : $u(x) = \frac{-2x+1}{4x-4}$, $u'(x) = \frac{-2(4x-4) - 4(-2x+1)}{(4x-4)^2} = \frac{4}{(4(x-1))^2} = \frac{4}{4^2(x-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)^2}$

Par suite, $j'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{1}{4(x-1)^2} e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$

2a) $f(x) = xe^{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = uv$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = e^{x^2} \\ v'(x) = 2xe^{x^2} \end{cases} \quad (e^w)' = w'e^w \text{ (rappel)}.$

$f' = u'v + uv'$, donc $\boxed{f'(x) = e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2}(1 + 2x^2)}$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} > 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $2x^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2b) Notons T_A la tangente à f en son point d'abscisse -1 et T_B la tangente à f en son point d'abscisse 1 .

T_A a pour coefficient directeur $f'(-1) = e(1+2) = 3e$. $(-1)^2 = 1!$

T_B a pour coefficient directeur $f'(1) = e(1+2) = 3e$

T_A et T_B ont le même coefficient directeur, donc $T_A \parallel T_B$: l'affirmation est donc vraie.

Exercice IV

a) Si la courbe tracée est celle de f , f est convexe sur $\mathbb{R}$ (courbe au-dessus de chacune de ses tangentes).

b) Si la courbe tracée est celle de f' :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			

Par critères du cours, f' décroît sur $]-\infty; 1]$, donc f est concave sur $]-\infty; 1]$.
 f' croît sur $[1; +\infty[$, donc f est convexe sur $[1; +\infty[$.

c) Si la courbe tracée est celle de f'' . Par critères graphique de signe:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Par critères du cours f'' est à valeurs négatives sur $[-1; 3]$
 donc f est concave sur $[-1; 3]$

f'' est à valeurs positives sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$ et $[3; +\infty[$
 donc f est convexe sur chacun de ces intervalles.

Exercice V

Sans difficulté, $f'(x) = 2 - e^x$ et $f''(x) = -e^x$. Or pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $-e^x < 0$, donc $f''(x) < 0$:

A ce titre, f est concave sur $\mathbb{R}$, donc la courbe de f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice VI

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} + 3x^4$$

a) g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^{-x} + 12x^3$ (*)

$$g''(x) = e^{-x} + 36x^2.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $36x^2 \geq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) > 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) \geq 0$.

Par critères de convexité du cours, g est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Notons A le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 : $A(0; g(0))$ avec $g(0) = e^0 + 3 \times 0^4 = 1$, donc $A(0; 1)$.
et T_A la tangente à $\mathcal{C}_g$ en A :

T_A a pour équation réduite : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ avec : $g'(0) \stackrel{(*)}{=} -e^0 + 12 \times 0^3 = -1$
 $g(0) = 1$
 $y = -x + 1$

c) Vu que g est convexe sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_g$ est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

En particulier, $\mathcal{C}_g$ est situé au-dessus de T_A , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq -x + 1, \text{ c'est à dire : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} + 3x^4 \geq -x + 1$$

Exercice VII

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$.

1) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 1$: on a une fonction trinôme du second degré.

Pour en étudier le signe, on calcule $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 16 - 24 = -8$.

$\Delta < 0$, donc cette fonction trinôme a le même signe que $a = 6 (> 0)$ pour tout réel x :
ainsi, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

2) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2n^3 - 2n^2 + n - 2 = f(n)$.

Ainsi on a une suite explicitement définie associée à une fonction f croissante sur $[0; +\infty[$,
donc (u_n) a le même sens de variation que f : (u_n) est une suite croissante.