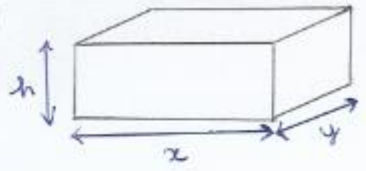
Exercice I

1) $(x-y)^2$ 2) $x^2+\frac{y}{3}$ 3) $xy-(x+y)$ 4) $(x-y)^2+2xy$

4)



Un pavé droit est formé de six rectangles.
Les rectangles qui se font face sont identiques.
Donc en notant $\mathcal{A}$ l'aire totale de ces six faces, on a :

$\boxed{\mathcal{A}} = 2xy + 2xh + 2hy = \boxed{2(xy+xh+hy)}$.

Exercice II

1) $A = 6(2x-1)+(2x+1)(x-3)$

$A = 12x-6+2x^2-6x+x-3$

$A = 2x^2+7x-9$

$B = (-3x+2)(-x-2)-(x+5)(x-4)$

$B = 3x^2+6x-2x-4-(x^2-4x+5x-20)$

$B = 3x^2+4x-4-(x^2+x-20)$

$B = 3x^2+4x-4-x^2-x+20 = 2x^2+3x+16$

$C = 3(2ab-4ab^2)ab^2 = 3ab^2(2ab-4ab^2) = 3ab^2\times 2ab - 3ab^2\times 4ab^2$

$C = 3\times 2\times a\times a\times b^2\times b - 3\times 4\times a\times a\times b^2\times b^2$

$\boxed{C = 6a^2b^3 - 12a^2b^4}$

$D = (7x-2y)^2 + (3x+4y)^2$

$D = (7x)^2 - 2\times 7x\times 2y + (2y)^2 + (3x)^2 + 2\times 3x\times 4y + (4y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2 + 9x^2 + 24xy + 16y^2$

$D = 58x^2 - 4xy + 20y^2$.

2)

E = $2x^2-x = x(2x-1)$ F = $4x-16 = 4(x-4)$ G = $x^2-14x+49 = x^2-2\times x\times 7+7^2 = (x-7)^2$

H = $6x+14+(3x+7)^2$

H = $2(3x+7)+(3x+7)(3x+7)$

H = $(3x+7)(2+3x+7)$

H = $(3x+7)(3x+9) = 3(x+3)(3x+7)$

I = $(3x+5)^2-(x-8)^2$

I = $(3x+5+x-8)(3x+5-(x-8))$

$= (4x-3)(3x+5-x+8) = (4x-3)(2x+13)$.

J = $(x-3)^2-16+(x+1)(x+2)$

J = $(x-3)^2-4^2+(x+1)(x+2)$

J = $(x-3+4)(x-3-4)+(x+1)(x+2)$

J = $=(x+1)(x-7)+(x+1)(x+2)$

J = $=(x+1)(x-7+x+2) = \underline{(x+1)(2x-5)}$

K = $x^2-\frac{4}{9}a^2 = x^2-\left(\frac{2}{3}a\right)^2$

K = $\left(x+\frac{2}{3}a\right)\left(x-\frac{2}{3}a\right)$

L = $10^{n+1} + 10^n = 10^n\times 10 + 10^n\times 1 = 10^n\times(10+1) = 11\times 10^n$.

M = $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$.

N = $5x(4x-1) + 16x^2 - 1 = 5x(4x-1) + (4x-1)(4x+1) = (4x-1)(5x+4x+1) = (4x-1)(9x+1)$.

2) $\underline{(x^2+2)^2} = (x^2)^2 + 2\times x^2\times 2 + 2^2 = \underline{x^4+4x^2+4}$.

Grâce à ça : $x^4+4 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

Donc $x^4+4 = (x^2+2x+2)(x^2$ [redacted] $2x+2)$

Exercice III

1)

Figure 1 : MBN est un triangle rectangle en B, avec : BM = 5 – x et BN = x, donc :

Aire(MBN)=$\frac{BM\times BN}{2} = \frac{(5-x)\times x}{2} = \frac{5x-x^2}{2} = \frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + \frac{5x}{2}$.

Figure 2 :

Aire (AMNCD) = $\underbrace{\text{Aire (ABCD)}} - \underbrace{\text{Aire (MBN)}}$

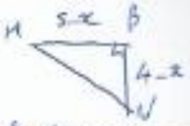
Aire (AMNCD) = $4\times 5 - \frac{(5-x)(4-x)}{2}$

Aire (AMNCD) = $20 - \frac{(20-5x-4x+x^2)}{2}$

Aire (AMNCD) = $\frac{40}{2} - \frac{(20-9x+x^2)}{2}$

Aire (AMNCD) = $\frac{40-20+9x-x^2}{2} = \frac{-x^2+9x+20}{2} = -\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{20}{2} = -\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x+10$.

(!) Le triangle MBN n'a pas les mêmes dimensions que celui de la figure ① ! Regardez bien le codage !



2) Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Notons $\mathcal{P}_p$ le périmètre du petit demi-cercle de diamètre x, et donc de rayon $\frac{x}{2}$:

$$\mathcal{P}_p = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}$$

De même, en notant $\mathcal{P}_m$ le périmètre du demi-cercle de diamètre $10-x$:

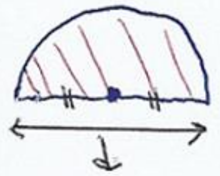
$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(\frac{10-x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(10-x)$$

et notant $\mathcal{P}_g$ le périmètre du grand demi cercle de diamètre 10, et de rayon 5 : $\mathcal{P}_g = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 5 = 5\pi$

D'où $\mathcal{P}_{coloré} = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}(10-x) + 5\pi = \cancel{\frac{\pi x}{2}} + \frac{\pi}{2} \times 10 - \cancel{\frac{\pi x}{2}} + 5\pi = 5\pi + 5\pi = 10\pi$

Le périmètre de la zone colorée vaut 10π et est donc indépendant de la valeur x.

3)



Soit R le rayon du disque et d son diamètre : on a : $2R = d$ donc $R = \frac{d}{2}$.

L'aire d'un disque <u>entier</u> de rayon R est : $\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

<u>Donc l'aire d'un demi-disque de diamètre d</u> est : $\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \boxed{\frac{\pi d^2}{8}}$

<u>Exercice IV</u> 1) $A = \frac{7^{12} \times 7^{-4}}{(7^3)^5} = \frac{7^8}{7^{15}} = 7^{8-15} = \boxed{7^{-7}}$

$B = \left(\frac{3}{5}\right)^7 \times 5^5 \times 3^{-5} = \frac{3^7 \times 5^5 \times 3^{-5}}{5^7} = 3^2 \times 5^{5-7} = 3^2 \times 5^{-2}$

$\boxed{B} = 3^2 \times \frac{1}{5^2} = \boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$

$\boxed{C} = 16 \times 2^9 = 2^4 \times 2^9 = \boxed{2^{13}}$

$\boxed{D} = \frac{27^6 \times 3^7}{9^8} = \frac{(3^3)^6 \times 3^7}{(3^2)^8} = \frac{3^{18} \times 3^7}{3^{16}} = \frac{3^{25}}{3^{16}} = \boxed{3^9}$

$\boxed{E} = \frac{4^6}{2^4} + \frac{2}{2^{-7}} = \frac{(2^2)^6}{2^4} + \frac{2^1}{2^{-7}} = \frac{2^{12}}{2^4} + 2^{1-(-7)} = 2^{12-4} + 2^8 = 2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = \boxed{2^9}$

$\boxed{F} = \frac{(3^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}} = \frac{3^{28}}{(2\times5)^{28}} = \frac{3^{28}}{10^{28}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{28} = \boxed{0{,}3^{28}}$

$G = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^3 \times x^{2n+1} = \left(x^{-(-n)}\right)^3 \times x^{2n+1}$

$\boxed{G} = (x^n)^3 \times x^{2n+1} = x^{3n} \times x^{2n+1} = \boxed{x^{5n+1}}$

2) $E = a^{-14} b^{-6} (ab)^3 = a^{-14} \times b^{-6} \times a^3 \times b^3$

$\boxed{E} = a^{-14} \times a^3 \times b^{-6} \times b^3 = \boxed{a^{-11} \times b^{-3}}$

3)

$$\boxed{G} = x^2 - 13 = x^2 - (\sqrt{13})^2 = \boxed{(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})}$$

4)

$$\boxed{m} = \frac{5^{2020} + 5^{2021} + 5^{2022}}{5^{2020}} = \frac{5^{2020}(1+5+5^2)}{5^{2020}} = 1+5+5^2 = \boxed{31}$$

Exercice V

2) $300 \times 10^6 \, m/s = 300 \times 10^6 \times 10^{-3} \, Km/s$ car $1m = 10^{-3} Km$.

$300 \times 10^6 \, m/s = 300 \times 10^3 = 3 \times 10^2 \times 10^3 = 3 \times 10^5 \, Km/s$.

Dans une année, assimilée à 365 jours, il y a : $365 \times 24 \times 3600$ secondes.

Avec la relation : $D = V.t$, on a : $D = 3 \times 10^5 \times 365 \times 24 \times 3600$, $\boxed{D \approx 9,46 \times 10^{12} \, Km}$

1) $\boxed{A} = \frac{2,5 \times (10^{-3})^2 \times 4 \times 10^7}{0,8 \times 10^{-3}} = \frac{2,5 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^7}{0,8 \times 10^{-3}} = \frac{10 \times 10^{-6} \times 10^7}{0,8 \times 10^{-3}} = \frac{1}{0,8} \times 10^{1-6+7+3} = \boxed{1,25 \times 10^4}$

3) 802500 est "proche" de 8×10^5 et 1995874561 est proche de 2×10^9

Donc un ordre de grandeur de 802500×1995874561 est :

$$8 \times 10^5 \times 2 \times 10^9 = 16 \times 10^{14} = \boxed{1,6 \times 10^{15}}$$

Exercice VI

$n \in \mathbb{N}$ et $A(n) = \frac{9^n + 9^{n+1}}{(3^n)^2}$

a) $\boxed{A(0)} = \frac{9^0 + 9^1}{(3^0)^2} = \frac{1+9}{1^2} = \boxed{10}$ || $\boxed{A(1)} = \frac{9^1 + 9^2}{(3^1)^2} = \frac{9+81}{9} = \frac{90}{9} = \boxed{10}$

$\boxed{A(2)} = \frac{9^2 + 9^3}{(3^2)^2} = \frac{9^2 + 9^3}{9^2} = \frac{9^2}{9^2} + \frac{9^3}{9^2} = 1 + 9^{3-2} = 1+9 = \boxed{10}$

$\boxed{A(3)} = \frac{9^3 + 9^4}{(3^3)^2} = \frac{9^3 + 9^4}{(3^2)^3} = \frac{9^3 + 9^4}{9^3} = \frac{9^3}{9^3} + \frac{9^4}{9^3} = 1+9 = \boxed{10}$

b) Il semblerait que $A(n)$ soit égale à 10, quelle que soit la valeur de l'entier n.

c) $\boxed{A(n)} = \frac{9^n + 9^{n+1}}{(3^n)^2} = \frac{9^n(1+9)}{(3^2)^n} = \frac{9^n \times 10}{9^n} = \boxed{10}$: résultat indépendant de n : la conjecture du b) est donc valide pour tout entier n.

Exercice VII

$$1)\ \boxed{A} = \sqrt{147} = \sqrt{7\times 21} = \sqrt{7\times 7\times 3} = \boxed{7\sqrt{3}}$$

$$\boxed{B} = \sqrt{8}\times\sqrt{56} = \sqrt{8}\times\sqrt{8\times 7} = \sqrt{8}\times\sqrt{8}\times\sqrt{7} = \boxed{8\sqrt{7}}$$

$$\boxed{C} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{4\times 3} + \sqrt{100\times 3} = 3\sqrt{3} - 2\times 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$$

$$2)\ \boxed{A} = (1-\sqrt{3})^2 = 1 - 2\times 1\times\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \boxed{4-2\sqrt{3}}$$

$$B = (2\sqrt{6}+5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2\times 2\sqrt{6}\times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2$$

$$B = 2^2\times\sqrt{6}^2 + 20\times\sqrt{3\times 2}\times\sqrt{2} + 5^2\times\sqrt{2}^2$$

$$B = 4\times 6 + 20\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3} + 25\times 2$$

$$\boxed{B} = 24 + 50 + 40\sqrt{3} = \boxed{74 + 40\sqrt{3}}$$

$$C = 7\sqrt{75} - 2\sqrt{48}$$

$$C = 7\sqrt{25\times 3} - 2\sqrt{16\times 3}$$

$$C = 7\times\sqrt{25}\times\sqrt{3} - 2\times\sqrt{16}\times\sqrt{3}$$

$$\boxed{C} = 35\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = \boxed{27\sqrt{3}}$$

$$4)\ B = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$\boxed{B} = a + 2\sqrt{ab} + b = \boxed{a+b+2\sqrt{ab}}$$

$$C = (\sqrt{a} - 3\sqrt{b})^2$$

$$C = \sqrt{a}^2 - 2\times\sqrt{a}\times 3\sqrt{b} + (3\sqrt{b})^2$$

$$\boxed{C} = a - 6\sqrt{ab} + 9b = \boxed{a+9b-6\sqrt{ab}}$$

$$D = (\sqrt{2a} - \sqrt{3b})(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})$$

$$\boxed{D} = (\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{3b})^2 = \boxed{2a-3b}$$

$$E = (5a^7 + 2b^3)^2 = (5a^7)^2 + 2\times 5a^7\times 2b^3 + (2b^3)^2$$

$$\boxed{E} = \boxed{25a^{14} + 20a^7b^3 + 4b^6}$$

Exercice VIII

Supposons que B mente : alors son affirmation est fausse, donc son contraire est vrai, donc B serait le plus petit.

Les trois autres diraient vrai, en particulier D dit vrai, il serait lui aussi le plus petit : en contradiction au fait qu'ils ont des tailles différentes (et donc qu'il y a un seul plus petit kangourou).

Donc **B dit vrai**, et ce n'est donc pas le plus petit.

Supposons que A mente : alors A est le plus grand ou le plus petit des kangourous, et comme C et D seraient alors vraies, on aurait deux kangourous qui sont les plus grands ou les plus petits, ce qui est impossible.

A dit donc vrai : il n'est ni le plus grand ni le plus petit.

Supposons que D mente : alors il n'est pas le plus petit, donc comme les phrases A, B et C seraient justes, il n'y aurait aucun kangourou qui est le plus petit : c'est absurde.

Ainsi, **D dit vrai**, et **le menteur est donc C** : C n'est pas le plus grand.

Les phrases A et D étant justes, il en résulte que c'est **le kangourou B le plus grand.**