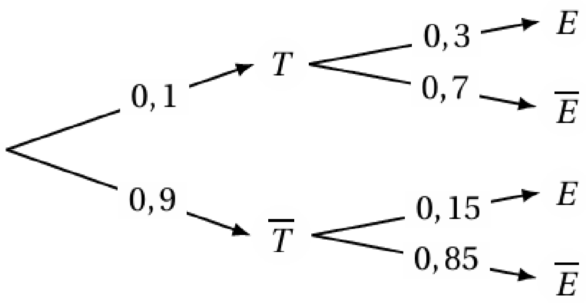
Terminale Maths Groupe 2 **Corrigé du DM13** **Mai 2026**

Exercice I

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



$P\left(\overline{T}\cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P\left(T\cap E\right) + P\left(\overline{T}\cap E\right)$

On a donc : $P(E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,165.$

La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à 0,165.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1\times 0,3}{0,165} \approx 0,1818.$

La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ 0,18, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

2. $P(X=5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{15-5}.$

$$= 3\,003 \times 0,165^5 \times 0,835^{10}$$

$$\approx 0,0605$$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X=5) \approx 0,06$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut 0,06.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,933\,1$.

   La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut 0,93.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

   Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

   $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,835^n$

   On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   On veut donc que $1 - 0,835^n \geqslant 0,99$.

   $$\begin{aligned} 1 - 0,835^n \geqslant 0,99 &\iff 0,01 \geqslant 0,835^n \\ &\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,835^n\right) \text{ car la fonction logarithme est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\ &\iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,835) \\ &\iff \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \leqslant n \text{ car } \ln(0,835) < 0 \text{ donc son inverse aussi} \end{aligned}$$

   or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

   Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,175$.

   Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

   et $V(X_1) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,755\,5$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$

   Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

   $V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,266\,5$.

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $|S - 10| < 4$ et

   $P\left(|S - 10| < 4\right) = 1 - P\left(|S - 10| \geqslant 4\right)$.

   Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   $P\left(|S - E(S)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{t^2}$

   Pour $t = 4$ on obtient : $P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \leqslant \dfrac{8,2665}{4^2}$.

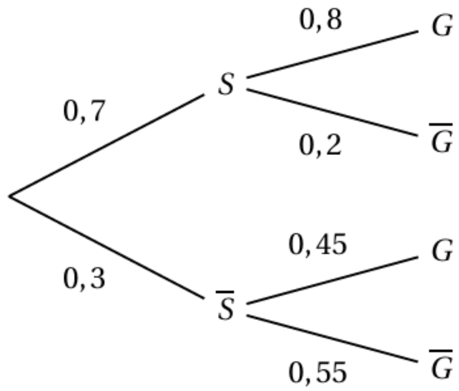
   D'où $P\left(|S - 10| < 4\right) = 1 - P\left(|S - 10| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \dfrac{8,2665}{16}$.

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,483\,3$

donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à 0,48.

Exercice II

1. $\overline{S}$ est l'événement : « Abel ne réussit pas son premier service. ».
   On traduit la situation par un arbre pondéré.



2. $P(S \cap G) = P(S) \times P_S(G) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$
3. $\left\{S, \overline{S}\right\}$ forme une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(G) = P(S \cap G) + P\left(\overline{S} \cap G\right) = 0,56 + 0,3 \times 0,45 = 0,695$
4. Abel a gagné le point. La probabilité qu'il ait réussi son premier service est :
   $P_G(S) = \dfrac{P(S \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,56}{0,695} \approx 0,806$

5. On a :
   - $P(S \cap G) = 0,56$
   - $P(S) \times P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4865$

   $P(S \cap G) \neq P(S) \times P(G)$ donc les événements S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
   a. L'épreuve élémentaire consiste à voir si une balle est conforme, avec une probabilité de $0,85$, ou si elle ne l'est pas.
   On exécute cette épreuve élémentaire 20 fois et on considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise.
   Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.
   b. À la calculatrice, $P(X \leqslant 18) \approx 0,824$.
   c. La probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées est égale à la probabilité qu'au plus 18 balles soient conformes, c'est-à-dire $P(X \leqslant 18)$ soit environ $0,824$.
   d. L'espérance de X est $E(X) = np = 20 \times 0,85 = 17$.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0,85$.

On considère la variable aléatoire $M_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i}{n} = \dfrac{X_1}{n} + \dfrac{X_2}{n} + \dfrac{X_3}{n} + \ldots + \dfrac{X_n}{n}$

a. D'après le cours, on peut dire que les n variables aléatoires X indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,85$ ont pour espérance $p = 0,85$ et pour variance $p(1-p) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$.

Soit S_n la loi somme définie par $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- D'après la linéarité de l'espérance, on a :
$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 0,85 = 0,85n$
- Les variables X_i étant indépendantes, on utilise l'additivité de la variance :
$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 0,1275 = 0,1275n$

M_n est la loi moyenne définie par $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

- On sait que $E(aX) = aE(X)$, donc :
$E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n} S_n\right) = \dfrac{1}{n} E(S_n) = \dfrac{0,85n}{n} = 0,85.$
- On sait que $V(aX) = a^2 V(X)$ donc :
$V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n} S_n\right) = \dfrac{1}{n^2} V(S_n) = \dfrac{0,1275n}{n^2} = \dfrac{0,1275}{n}.$

b. Si X est une variable aléatoire et t un réel strictement positif, on a :
$P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2}$. C'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On en déduit que : $P\left(\left|X - E(X)\right| < t\right) \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{t^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} P\left(\left|X - E(X)\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{t^2} &\iff P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{V(M_n)}{t^2} \\ &\iff P\left(\left|M_n - 0,85\right| < t\right) \geqslant 1 - \frac{0,1275}{nt^2} \end{aligned}$$

On prend $t = 0,1$. On a donc :

- $\left|M_n - 0,85\right| < t \iff \left|M_n - 0,85\right| < 0,1 \iff -0,1 < M_n - 0,85 < 0,1$
$\iff 0,75 < M_n < 0,95$
- $1 - \dfrac{0,1275}{nt^2} = 1 - \dfrac{0,1275}{n \times 0,1^2} = 1 - \dfrac{12,75}{n}$

On déduit donc : $P(0,75 < M_n < 0,95) \geqslant 1 - \dfrac{12,75}{n}$.

c. Pour trouver un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75 ; 0,95[$ avec une probabilité supérieure à $0,9$, il suffit que : $1 - \dfrac{12,75}{n} \geqslant 0,9$. On résout cette inéquation.

$1 - \dfrac{12,75}{n} \geqslant 0,9 \iff 0,1 \geqslant \dfrac{12,75}{n} \iff 0,1n \geqslant 12,75 \iff n \geqslant 127,5$

Donc il faut un échantillon de taille supérieure à $n = 128$ pour que la moyenne du nombre de balles conformes appartenant à l'intervalle $]0,75 ; 0,95[$ ait une probabilité supérieure à $0,9$

Exercice III

$X \sim \mathcal{B}(70\,;0,4)$.

a) $\underline{E(X)} = np = 70 \times 0,4 = \underline{28}$. $\underline{V(X)} = np(1-p) = 70 \times 0,4 \times 0,6 = \underline{16,8}$

b) <u>Rappel</u> : <u>L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev</u> (notée I.B.T.) dit que :

$\forall \delta > 0$, $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.

Prenons $\delta = 20$ (>0) : Ici $E(X) = 28$ et $V(X) = 16,8$, donc : $p(|X-28| \geq 20) \leq \dfrac{16,8}{20^2}$

OR $\dfrac{16,8}{20^2} = \dfrac{16,8}{400} = 0,042$. donc $\boxed{p(|X-28| \geq 20) \leq 0,042}$

<u>METHODE BIS</u> : Ici on sait que X suit une loi binomiale, la condition :

$|X - 28| \geq 20$ est équivalente à : $X - 28 \geq 20$ *ou* $X - 28 \leqslant -20$ c'est-à-dire : $X \geq 48$ ou $X \leqslant 8$.

Grâce à sa calculatrice on calcule $p(X \geq 48)$ puis $p(X \leqslant 8)$, et enfin la probabilité ici cherchée est la somme : $p(X \leqslant 8) + p(X \geq 48)$.

<u>Exercice III</u>

1) S suit la loi <u>binomiale de paramètres : $n = 3600$ et $p = \frac{1}{6}$ (dé équilibré)</u>.
En effet, lancer un dé équilibré est une épreuve de Bernoulli, le succès est ici obtenir 1 : $p = \frac{1}{6}$
On répète 3600 fois cette même épreuve de Bernoulli de <u>façon indépendante</u>.
Donc S qui est égale au nombre de succès obtenus lors de ces répétitions suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3600\,;\frac{1}{6})$. Car $S \sim \mathcal{B}(3600\,;\frac{1}{6})$.

2) $\underline{E(S)} = n \times p = 3600 \times \frac{1}{6} = \underline{600}$ et $\underline{V(S)} = np(1-p) = 600 \times \frac{5}{6} = \underline{500}$.

3) $480 < S < 720 \iff 480 - 600 < S - 600 < 720 - 600 \iff 120 < S - 600 < 120$
Ainsi, $S - 600 \in]-120\,;120[$ intervalle centré en 0, donc la distance entre $S - 600$ et 0 est strictement inférieure à 120 : $|S - 600| < 120$.
<u>Rappel</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall r \in [0\,;+\infty[$, $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$

4) Grâce à 3) : $480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120$.
Donc $\underline{p(480 < S < 720)} = p(|S-600| < 120) = \underline{1 - p(|S - 600| \geq 120)}$.
(*)
Si on note A l'événement : $|S-600| < 120$.
$p(A) = 1 - p(\bar{A})$ et $\bar{A}$ est : $|S - 600| \geq 120$.
D'après l'I.B.T : $p(|S - E(S)| \geq 120) \leq \dfrac{V(S)}{120^2}$ et $E(S) = 600\,;V(S) = 500$.
$p(|S-120| \geq 120) \leq \dfrac{500}{120^2}$, donc $1 - p(|S-120| \geq 120) \geq 1 - \dfrac{500}{120^2}$
OR $1 - \dfrac{500}{120^2} \simeq 0,965$ donc $1 - \dfrac{500}{120^2} \geq 0,96$.
Ainsi (*) conduit à : $\boxed{p(480 < S < 720) \geq 0,96}$

Exercice IV

1) $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si au } i^{\text{ème}} \text{ lancer on obtient } 4. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$ (dé équilibré).

$X_i = x_i$	0	1
$P(X_i = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\boxed{E(X_i)} = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$V(X_i) = \frac{3}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$

$\boxed{V(X_i)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{12}{64} = \boxed{\frac{3}{16}}$

2) $\boxed{M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_i}{n}}$

3) $E(M_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n} \times \left(E(X_1) + \cdots + E(X_n)\right)$ par linéarité de l'espérance.

$\underline{E(M_n)} = \frac{1}{n} \times \left(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}}_{n \text{ termes égaux à } \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{4} = \underline{\frac{1}{4}} = 0{,}25.$

L'énoncé dit que : $P(0{,}24 < M_n < 0{,}26) \geq 0{,}95$: un risque d'erreur inférieur à 5% signifie une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Or, $0{,}24 < M_n < 0{,}26 \iff 0{,}24 - 0{,}25 < M_n - 0{,}25 < 0{,}26 - 0{,}25$

$0{,}24 < M_n < 0{,}26 \iff -0{,}01 < M_n - 0{,}25 < 0{,}01 \iff |M_n - 0{,}25| < 0{,}01.$

Ainsi on doit avoir : $\boxed{P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 0{,}95}$.

4) L'inégalité de concentration appliquée à M_n dit que :

$\forall \delta > 0, \quad P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta^2) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$ avec $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X_i) \overset{(1)}{=} \frac{3}{16n}$

on prend $\delta = 0{,}01$:

$P(|M_n - 0{,}25| \geq 0{,}01) \leq \frac{3}{16n} \times \frac{1}{0{,}01^2}$ avec $\frac{1}{0{,}01^2} = 10000.$

$P(|M_n - 0{,}25| \geq 0{,}01) \leq \frac{15000}{8n}.$

Donc $1 - P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \leq \frac{15000}{8n}$

donc $P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 1 - \frac{15000}{8n}.$

Pour que $P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 0{,}95$, il suffit que : $1 - \frac{15000}{8n} \geq 0{,}95.$

<u>Oubli question 2</u> : M_n est la fréquence d'apparition du 4 au cours des n lancers.

$$1-0{,}95 \geqslant \frac{15000}{8n} \iff \frac{15000}{8n} \leqslant 0{,}95 \iff 15000 \leqslant 8\times 0{,}95n$$

$$\iff n \geqslant \frac{15000}{8\times 0{,}95} \quad \text{avec} \quad \frac{15000}{8\times 0{,}95} \approx 1973{,}7.$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n \geqslant 1974$: Tout entier n supérieur ou égal à 1974 convient.

<u>Exercice V</u>

<u>Partie A</u> $\quad E(C) = 150$; $V(C) = 900$.

1) Montrons que : $P(90 \leqslant C \leqslant 210) \geqslant 0{,}75$ ← au moins 75%

$$90 \leqslant C \leqslant 210 \iff 90-150 \leqslant C-150 \leqslant 210-150 \iff -60 \leqslant C-150 \leqslant 60.$$

$$\iff |C-150| \leqslant 60$$

(*) Si $|C-150| > 60$, alors $|C-150| \geqslant 60$ est vrai

On $P(|C-150| \leqslant 60) = 1 - P(|C-150| > 60) \geqslant 1 - P(|C-150| \geqslant 60)$

Avec l'I.B.T et pour $\delta = 60\ (>0)$: $P(|C-150| \geqslant 60) \leqslant \frac{V(C)}{60^2}$

$$P(|C-150| \geqslant 60) \leqslant \frac{900}{3600} = \frac{1}{4}.$$

donc $\quad -P(|C-150| \geqslant 60) \geqslant -\frac{1}{4}$

donc $\quad \underbrace{1 - P(|C-150| \geqslant 600)}_{=} \geqslant 1 - \frac{1}{4}$ avec $1-\frac{1}{4} = 0{,}75$.

$$\boxed{P(90 \leqslant C \leqslant 210) \geqslant 0{,}75}$$

(*) $P(|C-150| > 60) \leqslant P(|C-150| \geqslant 60)$

donc $1 - P(|C-150| > 60) \geqslant 1 - P(|C-150| \geqslant 60)$.

2) On cherche à savoir si : $P(|C-150| < 90) > 0{,}85$ est vraie ou fausse.

Or $P(|C-150| < 90) = 1 - P(|C-150| \geqslant 90)$

Avec l'I.B.T appliquée avec $\delta = 90\ (>0)$: $P(|C - \overset{E(C)}{150}| \geqslant 90) \leqslant \frac{V(C)}{90^2}$ avec $\frac{V(C)}{90^2} = \frac{900}{8100} = \frac{1}{9}$

donc $\quad \underbrace{1 - P(|C-150| \geqslant 90)}_{P(|C-150| < 90)} \geqslant 1 - \frac{1}{9}$.

$P(|C-150| < 90) \geqslant \frac{8}{9}$. Or $\frac{8}{9} \approx 0{,}889$. donc $\frac{8}{9} > 0{,}85$ et l'affirmation est VRAIE.

Partie B

1) $Z = X+Y$ donc $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance.

$\underline{E(Z)} = 3+2 = \underline{5}$

rappel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
donc $V(X) = \sigma(X)^2$

X et Y sont indépendants, donc $\underline{V(Z)} = V(X+Y) = V(X)+V(Y) = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 = 0{,}15^2 + 0{,}1^2$

$\underline{V(Z)} = 0{,}0225 + 0{,}01 = \underline{0{,}0325}$

2) on cherche : $P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6)$, plus exactement que peut-on dire de la probabilité de l'événement : $(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6)$.

Or $(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) \iff 4{,}4-5 \leqslant Z-5 \leqslant 5{,}6-5 \iff -0{,}6 \leqslant |Z-5| \leqslant 0{,}6 \iff |Z-5| \leqslant 0{,}6$

idem partie A.

donc $P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) = P(|Z-5| \leqslant 0{,}6) = 1 - P(|Z-5| > 0{,}6) \geqslant 1 - P(|Z-5| \geqslant 0{,}6)$

On applique l'I.B.T pour $\delta = 0{,}6$ à Z : $P(|Z-E(Z)| \geqslant 0{,}6) \leqslant \dfrac{V(Z)}{0{,}6^2}$.

donc $P(|Z-5| \geqslant 0{,}6) \leqslant \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2}$, donc $\underbrace{1 - P(|Z-5| \geqslant 0{,}6)} \geqslant 1 - \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2}$.

Or $1 - \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2} \approx 0{,}909$, donc : $\underline{P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) \geqslant 0{,}909}$