Exercice I

Partie A : étude de la fonction f.

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x, \quad \text{sur }]0\,;\,+\infty[$$

1. a.

• Limite en 0 : On sait que $\lim_{x\to 0^+} x-2 = -2$ et que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim_{x\to +\infty} x = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle : $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$.

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et
$2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1 + \frac{1}{2x}$ on obtient :

$f''(x) = 0 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0\,;\,+\infty[$

2. a. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1 - 2 + 0,5 \times \ln 1 = -1$ et
$f(2) = 2-2+\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1\,;\,2]$ montre que $\alpha \in [1\,;\,2]$.

b. On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :

$\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha = 0 \iff \frac{1}{2}\ln\alpha = 2 - \alpha \iff \ln\alpha = 2(2-\alpha)$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0; 1]$, $\quad g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0;\ 1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et
$g'(x) = -2\times\dfrac{7}{8}x+1-\dfrac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{7}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x-x\dfrac{1}{4} = -\dfrac{8}{4}x+1-\dfrac{1}{2}x\ln x =$
$1-2x-\dfrac{x\ln x}{2}$.
Puisque $x\neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x\left(\dfrac{1}{x}-2-\ln x\dfrac{1}{2}\right)$.
Posons $X=\dfrac{1}{x} \iff x=\dfrac{1}{X}$; en remarquant que $X=\dfrac{1}{x}\Rightarrow \ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$, on peut écrire :
$g'(x) = \dfrac{1}{X}\left(X-2+\dfrac{1}{2}\ln X\right)$, soit $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. a. On a vu dans la partie A que $0<x<\alpha\Rightarrow f(x)<0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :
$\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{x}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$.
b. D'après le tableau de signes admis comme $0<x\leqslant 1$ on en déduit par produit que :
- $g'(x)>0$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0;\ 1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. a. On sait que sur l'intervalle $]0;\ 1]$, $\ln x\leqslant 0$ et comme $x^2\geqslant 0$, on conclut que $-\dfrac{1}{4}x^2\ln x\geqslant 0$.
Conclusion : sur l'intervalle $]0;\ 1]$, $-\dfrac{7}{8}x^2+x\leqslant -\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g.
b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x\longmapsto x^2\ln x$, on effectue une intégration par parties en posant
$$\begin{array}{rcl} u(x) &=& \ln x \\ v'(x) &=& x^2 \end{array} \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{rcl} u'(x) &=& \dfrac{1}{x} \\ v(x) &=& \dfrac{x^3}{3} \end{array}.$$
Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\alpha}\,;\,1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,
donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\dfrac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} =$
$-\dfrac{1}{9}-\left(\dfrac{1}{3\alpha^3}\ln\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{9\alpha^3}\right) = -\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-\ln\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$,
soit en remplaçant $\ln\alpha$ par $2(2-\alpha)$,
$\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3\alpha^3}\left(-4+2\alpha-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{3\alpha^3}-\dfrac{2}{3\alpha^2}+\dfrac{1}{9\alpha^3} =$
$\dfrac{-\alpha^3+12-6\alpha+1}{9\alpha^3} = \dfrac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}$.

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$$\mathscr{A}=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x\right)\mathrm{d}x,$$ soit par linéarité de l'intégrale :

$$\mathscr{A}=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(x^2\ln x\right)\mathrm{d}x,$$

soit d'après le calcul précédent :

$$\mathscr{A}=-\frac{1}{4}\times\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}=\frac{\alpha^3+6\alpha-13}{36\alpha^3}\approx 0,07.$$

Exercice II

$X \sim \mathcal{B}(70\,;0{,}4)$.

a) $E(X)=np=70\times 0{,}4=28$. $V(X)=np(1-p)=70\times 0{,}4\times 0{,}6=16{,}8$

b) Rappel : L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (notée I.B.T.) dit que :

$\forall \delta>0,\ P(|X-E(X)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{\delta^2}$.

Prenons $\delta=20\ (>0)$: Ici $E(X)=28$ et $V(X)=16{,}8$, donc : $P(|X-28|\geqslant 20)\leqslant\frac{16{,}8}{20^2}$

Or $\frac{16{,}8}{20^2}=\frac{16{,}8}{400}=0{,}042$. donc $\boxed{P(|X-28|\geqslant 20)\leqslant 0{,}042}$

Exercice III

1) S suit la loi binomiale de paramètres : $n=3600$ et $p=\frac{1}{6}$ (dé équilibré).
En effet, lancer un dé équilibré est une épreuve de Bernoulli, le succès est ici obtenir 1 : $p=\frac{1}{6}$
On répète 3600 fois cette même épreuve de Bernoulli de façon indépendante.
Donc S qui est égale au nombre de succès obtenus lors de ces répétitions suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3600\,;\frac{1}{6})$.   Car $S\sim\mathcal{B}(3600\,;\frac{1}{6})$.

2) $E(S)=n\times p=3600\times\frac{1}{6}=600$ et $V(S)=np(1-p)=600\times\frac{5}{6}=500$.

3) $480<S<720 \iff 480-600<S-600<720-600 \iff 120<S-600<120$
Ainsi, $S-600\in\,]-120\,;120[$ intervalle centré en 0, donc la distance entre $S-600$ et 0 est strictement inférieure à 120 : $|S-600|<120$.

Rappel : $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall r\in[0\,;+\infty[,\ |x-a|<r\iff a-r<x<a+r$

4) Grâce à 3) : $480<S<720\iff|S-600|<120$.

Donc $P(480<S<720)=P(|S-600|<120)=1-P(|S-600|\geqslant 120)$.   (*)

Si on note A l'événement : $|S-600|<120$.
$P(A)=1-P(\bar{A})$ or $\bar{A}$ est : $|S-600|\geqslant 120$.

D'après l'I.B.T : $P(|S-E(S)|\geqslant 120)\leqslant\frac{V(S)}{120^2}$ or $E(S)=600$; $V(S)=500$.

$P(|S-120|\geqslant 120)\leqslant\frac{500}{120^2}$, donc $1-P(|S-120|\geqslant 120)\geqslant 1-\frac{500}{120^2}$

Or $1-\frac{500}{120^2}\simeq 0{,}965$ donc $1-\frac{500}{120^2}\geqslant 0{,}96$.

Ainsi (*) conduit à : $\boxed{P(480<S<720)\geqslant 0{,}96}$

Exercice IV

1) $X_i = \begin{cases} 1 \text{ si au } i^{\text{ème}} \text{ lancer on obtient } 4. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$ (dé équilibré).

$X_i = x_j$	0	1
$P(X_i = x_j)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\boxed{E(X_i)} = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

$V(X_i) = \frac{3}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$

$\boxed{V(X_i)} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{12}{64} = \boxed{\frac{3}{16}}$

2) $\boxed{M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_i}{n}}$

3) $E(M_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \times \left(E(X_1) + \dots + E(X_n)\right)$ par linéarité de l'espérance.

$\underline{E(M_n)} = \frac{1}{n} \times \Big(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{n \text{ termes égaux à } \frac{1}{4}}\Big) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{4} = \underline{\frac{1}{4}} = 0{,}25.$

L'énoncé dit que : $P(0{,}24 < M_n < 0{,}26) \geq 0{,}95$: un risque d'erreur inférieur à 5%. signifie une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Or, $0{,}24 < M_n < 0{,}26 \iff 0{,}24 - 0{,}25 < M_n - 0{,}25 < 0{,}26 - 0{,}25$

$0{,}24 < M_n < 0{,}26 \iff -0{,}01 < M_n - 0{,}25 < 0{,}01 \iff |M_n - 0{,}25| < 0{,}01.$

Ainsi on doit avoir : $\boxed{P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 0{,}95}$.

4) L'inégalité de concentration appliquée à M_n dit que :

$\forall \delta > 0, \quad P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta^2) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$ avec $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X_i) \overset{Q1}{=} \frac{3}{16n}$

on prend $\delta = 0{,}01$:

$P(|M_n - 0{,}25| \geq 0{,}01) \leq \frac{3}{16n} \times \frac{1}{0{,}01^2}$ avec $\frac{1}{0{,}01^2} = 10000$.

$P(|M_n - 0{,}25| \geq 0{,}01) \leq \frac{15000}{8n}$.

Donc $1 - P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \leq \frac{15000}{8n}$

donc $P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 1 - \frac{15000}{8n}$.

Pour que $P(|M_n - 0{,}25| < 0{,}01) \geq 0{,}95$, il suffit que : $1 - \frac{15000}{8n} \geq 0{,}95$.

Oubli question 2 : M_n est la fréquence d'apparition du 4 au cours des n lancers.

$$1-0,95 \geqslant \frac{15000}{8m} \iff \frac{15000}{8m} \leqslant 0,95 \iff 15000 \leqslant 8\times 0,95m$$

$$\iff m \geqslant \frac{15000}{8\times 0,95} \quad \text{avec} \quad \frac{15000}{8\times 0,95} \approx 1973,7.$$

Or $m \in \mathbb{N}^*$, donc $m \geqslant 1974$: Tout entier m supérieur ou égal à 1974 convient.

Exercice V

Partie A $\quad E(C)=150$; $V(C)=900$.

1) Montrons que : $P(90 \leqslant C \leqslant 210) \geqslant 0,75$ ← au moins 75%

$$90 \leqslant C \leqslant 210 \iff 90-150 \leqslant C-150 \leqslant 210-150 \iff -60 \leqslant C-150 \leqslant 60.$$

$$\iff |C-150| \leqslant 60$$

(*) Si $|C-150|>60$, alors $|C-150| \geqslant 60$ est vrai

On $P(|C-150| \leqslant 60) = 1-P(|C-150|>60) \overset{(*)}{\geqslant} 1-P(|C-150| \geqslant 60)$

Avec l'I.B.T et pour $\delta = 60 (>0)$: $P(|C-150| \geqslant 60) \leqslant \frac{V(C)}{60^2}$

$$P(|C-150| \geqslant 60) \leqslant \frac{900}{3600} = \frac{1}{4}.$$

donc $\quad -P(|C-150| \geqslant 60) \geqslant -\frac{1}{4}$

donc $\quad \underbrace{1-P(|C-150| \geqslant 600)}_{=} \geqslant 1-\frac{1}{4}$ avec $1-\frac{1}{4}=0,75$.

$$\boxed{P(90 \leqslant C \leqslant 210) \geqslant 0,75}$$

(*) $P(|C-150|>60) \leqslant P(|C-150| \geqslant 60)$

donc $1-P(|C-150|>60) \geqslant 1-P(|C-150| \geqslant 60)$.

2) On cherche à savoir si : $P(|C-150|<90)>0,85$ est vraie ou fausse.

Or $P(|C-150|<90) = 1-P(|C-150| \geqslant 90)$

Avec l'I.B.T appliquée avec $\delta = 90 (>0)$: $P(|C-\overset{E(C)}{150}| \geqslant 90) \leqslant \frac{V(C)}{90^2}$ avec $\frac{V(C)}{90^2} = \frac{900}{8100} = \frac{1}{9}$

donc $\quad \underbrace{1-P(|C-150| \geqslant 90)}_{P(|C-150|<90)} \geqslant 1-\frac{1}{9}$.

$P(|C-150|<90) \geqslant \frac{8}{9}$. Or $\frac{8}{9} \approx 0,889$. donc $\frac{8}{9} > 0,85$ et l'affirmation est VRAIE.

Partie B

1) $Z = X+Y$ donc $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance.

$\underline{E(Z)} = 3+2 = \underline{5}$

rappel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ donc $V(X) = \sigma(X)^2$

X et Y sont indépendants, donc $\underline{V(Z)} = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 = 0{,}15^2 + 0{,}1^2$

$\underline{V(Z)} = 0{,}0225 + 0{,}01 = \underline{0{,}0325}$

2) on cherche : $P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6)$, plus exactement que peut-on dire de la probabilité de l'évènement : $(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6)$.

OR $(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) \Longleftrightarrow 4{,}4-5 \leqslant Z-5 \leqslant 5{,}6-5 \Longleftrightarrow -0{,}6 \leqslant |Z-5| \leqslant 0{,}6 \Longleftrightarrow |Z-5| \leqslant 0{,}6$

idem partie A.

donc $P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) = P(|Z-5| \leqslant 0{,}6) = 1 - P(|Z-5| > 0{,}6) \geqslant 1 - P(|Z-5| \geqslant 0{,}6)$

on applique l'I.B.T pour $\delta = 0{,}6$ à Z : $P(|Z-E(Z)| \geqslant 0{,}6) \leqslant \dfrac{V(Z)}{0{,}6^2}$.

donc $P(|Z-5| \geqslant 0{,}6) \leqslant \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2}$, donc $\underbrace{1 - P(|Z-5| \geqslant 0{,}6)} \geqslant 1 - \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2}$.

OR $1 - \dfrac{0{,}0325}{0{,}6^2} \approx 0{,}909$, donc : $\underline{\underline{P(4{,}4 \leqslant Z \leqslant 5{,}6) \geqslant 0{,}909}}$