

Exercice I

1)

a) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses.

Ici, $f(x)=0$ lorsque : $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 3$: $\mathcal{S} = \{-1 ; 1 ; 3\}$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessus de l'axe des abscisses, en y incluant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses car symbole $\geq$!

Ici, $f(x) \geq 0$ équivaut à : $-1 \leq x \leq 1$ ou $3 \leq x \leq 4$: $\mathcal{S} = [-1 ; 1] \cup [3 ; 4]$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.

Ici, $f(x) < 2$ équivaut à : $-4 \leq x < 3,7$. (3,7 étant une valeur approchée ici).

c) ♥♥ $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f , notée C_f , en son point d'abscisse x ♥♥.

♥♥ Dire que $f'(x)=0$ signifie qu'au point de C_f d'abscisse x , il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (on dit tangente horizontale). ♥♥

♥♥ Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ revient donc à chercher les abscisses des points de C_f en lesquels il y a une tangente horizontale. ♥♥ Ici, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 2$: $\mathcal{S} = \{0 ; 2\}$.

d) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f en son point d'abscisse -1 .

On trace donc approximativement la tangente à C_f en son point d'abscisse -1 , qui est ici le point nommé A de coordonnées : A(-1 ; 0).

Manifestement, cette tangente passe par le point B(-2 ; -2).

Le coefficient directeur de cette tangente est m , avec : $\boxed{m} = f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{-2 - (-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$.

e)

x	-2	0	2	4	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-3	1	-1	3	

2a) Ici $g'(x)=0$ lorsque g' rencontre l'axe des abscisses.

$g'(x)=0$ a donc pour solutions : $x = -1$; $x = 1$ et $x = 3$: $\mathcal{S} = \{-1 ; 1 ; 3\}$.

2b)

x	-2	-1	1	3	4	
Signe de $g'(x)$	-	0	+	0	-	+
$g(x)$						

Diagram illustrating the sign of the first derivative $g'(x)$ and the function $g(x)$ across intervals defined by critical points $x = -2, -1, 1, 3, 4$.

The sign of $g'(x)$ is indicated by the symbols: $-$ (negative), 0 (zero), and $+$ (positive).

The function $g(x)$ is represented by arrows indicating its behavior: it decreases from $x = -2$ to $x = -1$, increases from $x = -1$ to $x = 1$, decreases from $x = 1$ to $x = 3$, and increases from $x = 3$ to $x = 4$.

Exercice II

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 11$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x + 5 = 3x^2 + 8x + 5$.

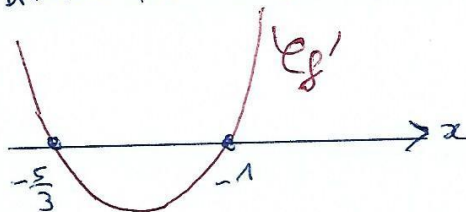
Étudions à présent le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$ est une fonction trinôme de la forme $f'(x) = ax^2 + bx + c$

avec: $\begin{cases} a=3 \\ b=8 \\ c=5 \end{cases}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times 5 = 64 - 60 = 4$.

$\Delta > 0$, donc ce trinôme admet deux racines réelles: $\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 - 2}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{4}}{6} = \frac{-8 + 2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$

Croquis: $a=3$, donc $a > 0$ et $\mathcal{C}_{f'}$ est une parabole de la forme "branche tournée vers le haut":



Par suite, sur $]-\frac{5}{3}; -1[$, $\mathcal{C}_{f'}$ est située au-dessous de l'axe des abscisses, donc

Si $-\frac{5}{3} < x < -1$, alors $f'(x) < 0$, donc f décroît sur $]-\frac{5}{3}; -1[$.

Sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{5}{3}]$ et $[-1; +\infty[$ on a $f'(x) \geq 0$, donc f croît sur $]-\infty; -\frac{5}{3}]$ et f croît sur $[-1; +\infty[$.

∞_{∞} :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	-1	$+\infty$	
Signe de $g'(x)$	+	○	-	○	+
$g(x)$		$-\frac{347}{27}$	-13		

$f(-1) = -13$

$f(-\frac{5}{3}) = -\frac{347}{27}$

(calculatrice).

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a = \frac{1}{2}$.

Par suite, $\mathcal{C}_f$ admet en le point $A(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2}))$ une tangente notée T_A dont l'équation réduite

est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec ici $a = \frac{1}{2}$ = abscisse du point A .

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{2} - 11 = \frac{1}{8} + 1 + \frac{5}{2} - 11 = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{20}{8} - \frac{88}{8} = \frac{-59}{8}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \times \frac{1}{2} + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 4 + 5 = \frac{3}{4} + 9 = \frac{3}{4} + \frac{36}{4} = \frac{39}{4}$$

La tangente à la courbe en $x = \frac{1}{2}$ a pour équation réduite : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

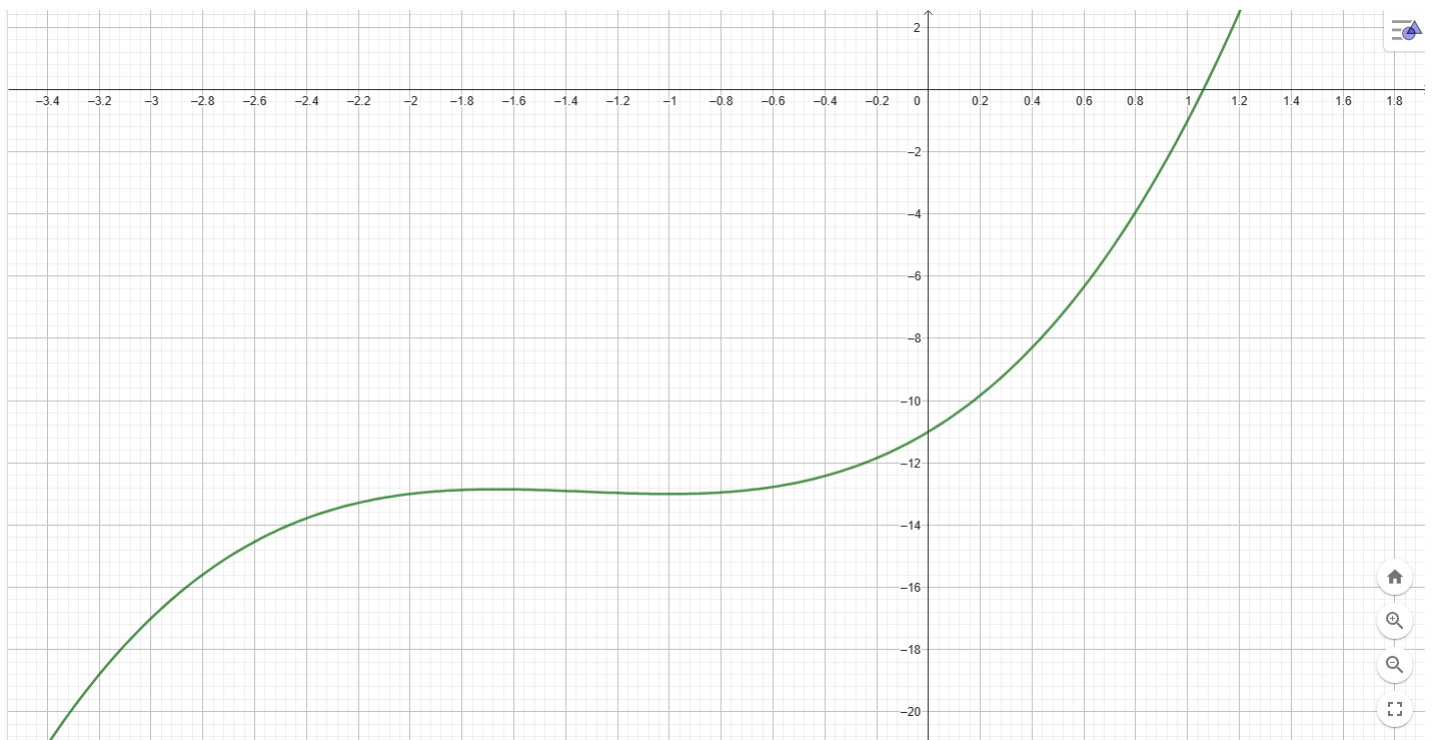
$$y = \frac{39}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{39}{8} - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{20}{8}$$

$$\boxed{y = \frac{39}{4}x - \frac{15}{4}}$$

c)



Exercice III

Remarque : On explique pourquoi $b \neq 1$ (admis dans l'énoncé).

$$f(x) = \frac{ae^x}{be^x - 1}$$

1) Si $b=1$, alors on aurait: $f(x) = \frac{ae^x}{e^x - 1}$

OR, $e^x - 1 = 0$ équivaut à: $e^x = 1$ et $1 = e^0$, donc $e^x = e^0$ c'est à dire $x=0$.
Par suite, le dénominateur de l'expression de $f(x)$ s'annulerait lorsque $x=0$, donc f ne serait pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est contraire à la donnée de l'énoncé " f est définie sur $\mathbb{R}$ ".

Ainsi, $b \neq 1$.

2) $f(x) = \frac{ae^x}{be^x - 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec:
$$\begin{cases} u(x) = ae^x \\ u'(x) = ae^x \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = be^x - 1 \\ v'(x) = be^x \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et:

(a et b sont des constantes vis à vis de x on dérive donc des "multiples" de fonctions).

♥ $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

♥ (dérivée d'un quotient). ⚠ attention à l'ordre des termes des une soustraction!

$$\boxed{f'(x)} = \frac{ae^x(be^x - 1) - ae^x \times be^x}{(be^x - 1)^2} = \frac{\cancel{a}b\cancel{e^x}e^{\cancel{x}} - \cancel{a}e^x - \cancel{a}b\cancel{e^x}e^{\cancel{x}}}{(be^x - 1)^2} = \boxed{\frac{-a}{(be^x - 1)^2}}$$

3) $\boxed{\text{Cg passe par } K(0;2), \text{ donc } f(0)=2}$ ♥♥

OR $f(x) = \frac{ae^x}{be^x - 1}$, donc $f(0) = \frac{ae^0}{be^0 - 1} = \frac{a \times 1}{b \times 1 - 1} = \frac{a}{b-1}$ (*)

Par suite, $f(0)=2$ équivaut à dire que: $\frac{a}{b-1} = 2$ ou encore $\boxed{a = 2(b-1)}$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en K passe par L , donc (KL) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en K .

Par le cours, le coefficient directeur de (KL) est donc le nombre dérivé de f en l'abscisse de K , à savoir 0: $\boxed{f'(0)} = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{3-2}{1-0} = \boxed{1}$

OR d'après la question 2), $f'(x) = \frac{-a}{(be^x - 1)^2}$ (portant $x=0$).

donc $f'(0) = \frac{-ae^0}{(be^0 - 1)^2} = \frac{-a}{(b-1)^2}$ et donc: $\boxed{\frac{-a}{(b-1)^2} = 1}$ (**)

$(*)$ et $(**)$ donnent :
$$\begin{cases} a = 2(b-1) & (*) \\ \frac{-a}{(b-1)^2} = 1 & (**) \end{cases}$$
 ou encore :
$$\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -a = (b-1)^2 \end{cases}$$

résoudre le système :
$$\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -2(b-1) = (b-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)^2 + 2(b-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b-1+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(b-1) \\ b+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2(-1-1) = 2 \times (-2) = -4 \end{cases}$$

$$b \neq 1 (q.i.), \text{ donc } b-1 \neq 0, \text{ on peut donc simplifier la dernière égalité par } b-1 : \text{ on obtient : } b+1=0$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \underset{a}{(-4)} ; \underset{b}{-1} \right\}$$

En conclusion, pour tout réel x ,
$$f(x) = \frac{-4e^x}{-e^x - 1} = \frac{-4e^x}{-(e^x + 1)} = \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

Exercice IV

0) On commence le protocole à $t = 0$, donc on calcule $f(0)$: $f(0) = 3 \times 0 \times e^{-0,5 \times 0 + 1} = 0$.

Il n'y avait donc aucune trace de médicament dans le sang du patient début de protocole.

$3h30min$ est égal à $3,5h$. On calcule donc $f(3,5)$: $f(3,5) = 3 \times 3,5 \times e^{-0,5 \times 3,5 + 1}$, et avec une calculatrice on trouve que $f(3,5) \approx 5$. Il y avait donc environ 5 mg de médicament dans le sang du patient au bout de $3h30min$ de protocole.

1) $h(t) = e^{at+b}$ se dérive en : $h'(t) = a e^{at+b}$.

2) a) $f(t) = 3t \times e^{-0,5t+1}$ est écrite sous la forme d'un produit : ♥♥ $f(t) = u(t)v(t)$ avec :

$$\begin{cases} u(t) = 3t \\ u'(t) = 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(t) = e^{-0,5t+1} \\ v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1} \end{cases} \text{ (grâce à la question 1), avec ici } a = -0,5 \text{ et } b = 1.$$

f est dérivable sur $[0 ; 10]$ et :

$$\text{♥♥ } f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \text{ ♥♥♥}$$

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5e^{-0,5t+1}) = (3 - 1,5t)e^{-0,5t+1} = 3(1 - 0,5t)e^{-0,5t+1} \text{ en factorisant par 3.}$$

b) Etudions le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$: cela nous permettra d'avoir le sens de variation de f sur $[0 ; 10]$.

En effet, rappelons le résultat fondamental de première suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

♥♥ Si pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I . ♥♥

♥♥ Si pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I . ♥♥

Ici, $f'(t) = 3(1 - 0,5t)e^{-0,5t+1}$.

♥♥ La fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives ♥♥, donc pour tout réel t appartenant à $[0 ; 10]$, $e^{-0,5t+1} > 0$. Or $3 > 0$, donc $f'(t)$ a le même signe que $1 - 0,5t$ sur $[0 ; 10]$.

Ainsi, résoudre l'inéquation : $f'(t) \geq 0$ équivaut à : $1 - 0,5t \geq 0$ c'est-à-dire $1 \geq 0,5t$, et donc $\frac{1}{0,5} \geq t$ (on ne change pas le sens des inégalités en divisant chacun de ses membres par le même nombre strictement positif).

Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $t \leq 2$.

D'où le tableau de variation suivant, en tenant compte du fait que f est seulement définie sur $[0 ; 10]$:

t	0	2	10
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	6	$30e^{-4}$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(2) &= 6e^0 = 6 \\ f(10) &= 30e^{-5+1} = 30e^{-4}. \end{aligned}$$

c) f croît sur $[0; 2]$ et décroît sur $[2; 10]$.
Donc le maximum de f est atteint pour $t = 2$ et ce maximum est égal à $f(2) = 6$:
La dose maximale de médicament dans le sang sera atteinte au bout de 2 heures et sera égale à 6 mg.

3)

Le rôle de cet algorithme est d'afficher **quelle est la durée minimale**, après le début du protocole, pour que la quantité de médicament dans le sang du patient soit **strictement supérieure à 3mg**.

En le programmant sur python, on trouve : $t = 0,464$ h. ($0,464 \times 3600 = 1670,4$).

C'est à la 1671^{ième} seconde (soit au bout de 27 minutes et 51 secondes) que la quantité de médicament dépasse les 3 mg. (1671 divisé par 60 a pour quotient 27 et pour reste 51).