

Exercice 0

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)) dx$$

Notons $f(x) = -2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)$.

La dérivée par primitive F ou $F(x) = -2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)$

$$I = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \quad \text{avec:} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - (-3)$$

$$I = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 5.$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Donc $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2$

$$F(0) = -2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0)$$

$\cos(0) = 1$ $\sin(0) = 0$.

Donc $F(0) = -2 - 1 = -3$.

$$J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \text{Posons:} \quad \begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

donc $\boxed{J} = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \frac{1}{2} \times \left[2\sqrt{u(x)} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \times 2 \times \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2}-1}$

(Rappel : $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ a primitive en $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$).

$$K = \int_{-1}^0 \frac{3e^{4x}}{2e^{4x}+1} dx \quad \text{Posons:} \quad \begin{cases} u(x) = 2e^{4x}+1 \\ u'(x) = 2 \times 4e^{4x} + 0 = 8e^{4x} \end{cases}$$

donc $\frac{3e^{4x}}{2e^{4x}+1} = \frac{3}{8} \times \frac{8e^{4x}}{2e^{4x}+1} = \frac{3}{8} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$K = \int_{-1}^0 \frac{3}{8} \times \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{3}{8} \times \int_{-1}^0 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{3}{8} \left[\ln(|u(x)|) \right]_{-1}^0$$

OR $\forall x \in [-1; 0]$, $e^{4x} > 0$, donc $2e^{4x}+1 > 0$, donc $K = \frac{3}{8} \left[\ln(2e^{4x}+1) \right]_{-1}^0$

$$K = \frac{3}{8} \left(\ln(2e^0+1) - \ln(2e^{-4}+1) \right) = \frac{3}{8} \left(\ln(3) - \ln\left(\frac{2}{e^4}+1\right) \right)$$

$$K = \frac{3}{8} \left(\ln(3) - \ln\left(\frac{2+e^4}{e^4}\right) \right) = \frac{3}{8} \left(\ln(3) - (\ln(2+e^4) - \ln(e^4)) \right)$$

$$K = \frac{3}{8}(\ln(3) - \ln(2 + e^4) - 4) = \frac{3}{8} \ln\left(\frac{3}{2+e^4}\right) - \frac{3}{2} \text{ en développant.}$$

$L = \int_0^1 x e^{-x} dx$. Faisons une intégration par parties :
 Posons : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ } on prend v' !

$$L = \int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$$

$$L = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx$$

$$L = -e^{-1} - 0 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} - (-e^0))$$

$$\boxed{L} = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} = \boxed{\frac{e-2}{e}}$$

Exercice I

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

- On a $f(x) = 0 \iff a \ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1$.
- F est une différence de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc sur cet intervalle :

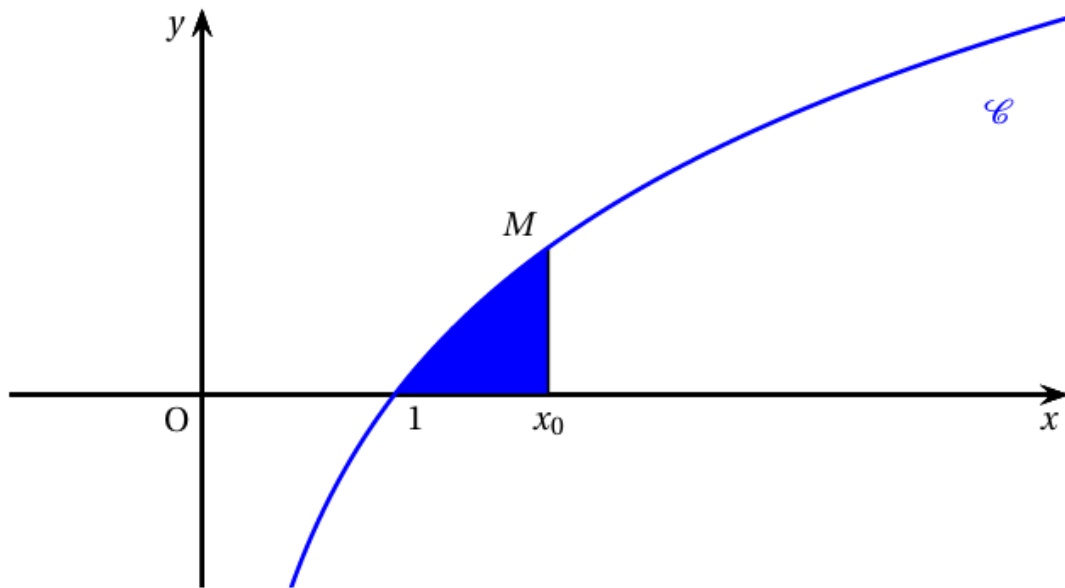
$$F'(x) = a \left[\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a \ln(x) = f(x)$$
, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- On a vu que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geq 1$, soit $\ln(x) \geq 0 \Rightarrow a \ln(x) \geq 0$.

Autrement dit pour $x \geq 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1; x_0]$ avec $x_0 \geq 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

$$\int_1^{x_0} f(x) dx = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0 \ln(x_0) - x_0] - a[1 \ln(1) - 1] = .$$

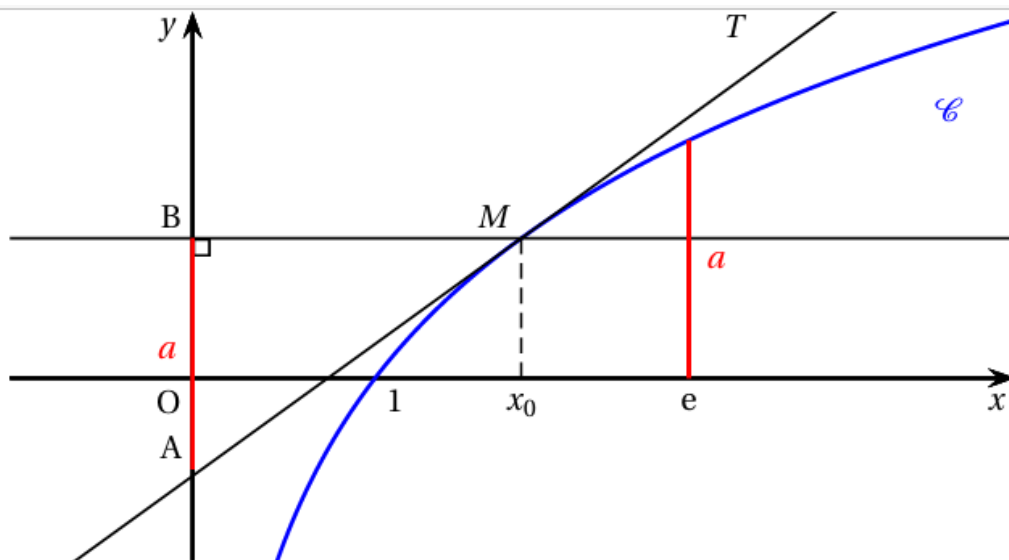
L'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0 \ln(x_0) - x_0] + a = a[x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1]$.

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0 \ln(x_0) - x_0] + a = a[x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$$M(x; y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0).$$

- $f(x_0) = a \ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \frac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$$M(x; y) \in T \iff y - a \ln x_0 = \frac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a \ln x_0 + \frac{ax}{x_0} - a.$$

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a \ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a \ln(x_0)$.

On a $AB = |y_B - y_A| = |a \ln(x_0) - (a \ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

Remarque : On a $f(e) = a \ln e = a \times 1 = a$.

$f(e) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !

Exercice II

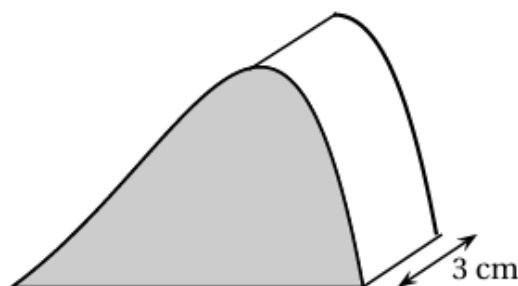


Figure 1

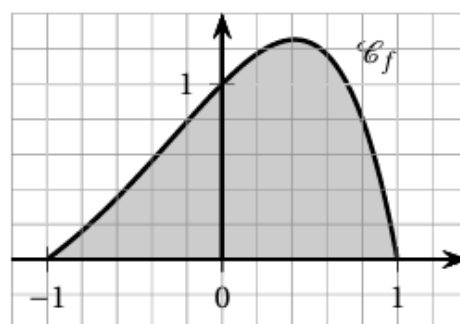


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par : $f(x) = (1 - x^2) e^x$.

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. a. Pour tout réel x , on a $e^x > 0$, et si $x \in [-1 ; 1]$, on a $1 - x^2 \geq 0$.

Donc pour tout x de $[-1 ; 1]$, on a $f(x) \geq 0$.

- b. Soit $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

On pose $u(x) = 1 - x^2$ et $v'(x) = e^x$. Donc $u'(x) = -2x$ et $v(x) = e^x$.

Par intégration par parties : $\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$.

$$\text{Donc } I = [(1 - x^2) e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-2x) e^x dx = 0 + 2 \int_{-1}^1 x e^x dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par : $\mathcal{V} = 3 \times S$ où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

On calcule $\int_{-1}^1 x e^x dx$ par une intégration par parties.

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x e^x dx &= [x e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \times e^x dx = [x e^x]_{-1}^1 - [e^x]_{-1}^1 = [1 e^1 - (-1) e^{-1}] - [e^1 - e^{-1}] \\ &= e + e^{-1} - e + e^{-1} = 2e^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx = 4e^{-1}.$$

$$\mathcal{V} = 3 \times S = 12e^{-1} \text{ donc } \mathcal{V} \approx 4,4 \text{ cm}^3.$$

Exercice III

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$f \text{ est dérivable sur } [0; 1] \text{ avec pour tout } x \in [0; 1] : f'(x) = \frac{-(-1)e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} = \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}.$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{1-x} > 0$ et $(1 + e^{1-x})^2 > 0$.

On en déduit que pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) > 0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

2. En remarquant que $e = e^1$, et que pour tout réel x , $e^{-x} \times e^x = 1$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e \times e^{-x}} = \frac{e^x}{(1 + e \times e^{-x})e^x} = \frac{e^x}{e^x + e}.$$

3. f est dérivable sur $[0; 1]$ donc continue et est de la forme $\frac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x \in [0; 1]$ la fonction F définie par : $F(x) = \ln(e^x + e)$.

$$\text{On en déduit que : } \int_0^1 f(x) dx = \left[\ln(e^x + e) \right]_0^1 = \ln(2e) - \ln(1 + e) = \ln(2) + \ln(e) - \ln(1 + e) = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e).$$

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par : $f_n(x) = \frac{1}{1 + n e^{1-x}}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.

$$\text{Pour tout } x \in [0; 1], \text{ on a : } f_0(x) = \frac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} = 1.$$

La courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y = 1$ avec $x \in [0; 1]$.

2. Soit n un entier naturel.

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}} > 0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a en particulier $u_0 = \int_0^1 1 \, dx = [x]_0^1 = 1$

3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{1 + (n+1)e^{1-x}} - \frac{1}{1 + ne^{1-x}} = \frac{-e^{1-x}}{(1 + ne^{1-x})(1 + (n+1)e^{1-x})} < 0$.

On en déduit que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n , $\int_0^1 f_{n+1}(x) \, dx < \int_0^1 f_n(x) \, dx$ et $u_{n+1} < u_n$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a : $f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}} > 0$ et donc $\int_0^1 f_n(x) \, dx > 0$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.

Exercice IV

o) $x > 0$ et $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

o) $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

or $x > 0$, donc $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a même signe que $1 - \ln(x)$.

Ainsi, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow e^1 \geq e^{\ln(x)} \Leftrightarrow x \leq e$.

o'w :

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$		+	-
$f'(x)$		$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

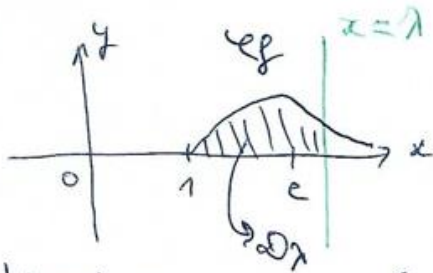
$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

1) $f(1)=0$.

Croquis :



Alors $D_\lambda = \{u(x,y) / 1 \leq x \leq \lambda; 0 \leq y \leq f(x)\}$

L'aire d'un disque de rayon 1 est $\pi \times 1^2 = \pi$.

on cherche donc le réel $\lambda > 1$ tel que : $\mathcal{A}(D_\lambda) = \pi$

Or f est continue et positive sur $[1; \lambda]$, donc $\mathcal{A}(D_\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$.

Ainsi, on résout l'équation d'inconnue $\lambda > 1$:

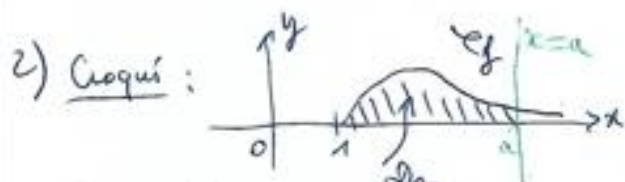
$$\int_1^\lambda \frac{\ln(x)}{x} dx = \pi \quad \left(\begin{array}{l} u(x) = \frac{1}{x} ; v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = -\frac{1}{x^2} ; v'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right) \Rightarrow \int_1^\lambda u'(x) v(x) dx = \pi$$

ce qui se primitive en $\frac{1}{2} u^2$.

$$\left[\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_1^\lambda = \pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln^2(\lambda) = \pi \Leftrightarrow \ln^2(\lambda) = 2\pi$$

Or $\lambda > 1$, donc $\ln(\lambda) > 0$, donc on a: $\ln(\lambda) = \sqrt{2\pi}$
 or $e^{\ln(\lambda)} = e^{\sqrt{2\pi}}$

$$\boxed{\lambda = e^{\sqrt{2\pi}}}$$



$a > 1$,
 sur $[1; a]$, $f(x) \geq 0$.

$$\boxed{A(da)} = \int_1^a f(x) dx = \int_1^a \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_1^a = \boxed{\frac{\ln^2(a)}{2}} \text{ car } \ln(1) = 0.$$

Or, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \ln(a) = +\infty$, donc par produit et quotient: $\boxed{\lim_{a \rightarrow +\infty} A(da) = +\infty}$.

donc l'aire des damiers da tend vers une quantité non finie lorsque a tend vers $+\infty$.

Alors, de voir! "Il y a de moins en moins de "place" entre C_f et l'axe des x , mais quand $x \rightarrow +\infty$ l'aire de da tend vers $+\infty$!

3a)

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ avec $x > 0$.

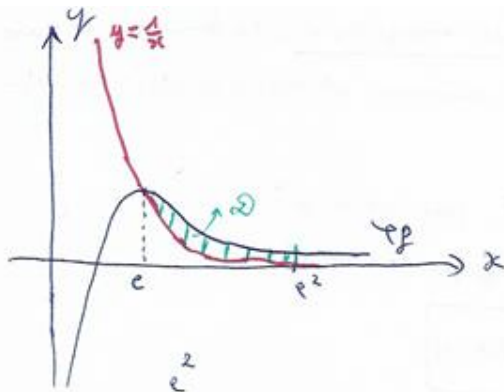
$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{\ln(x)-1}{x}$. Vu que $x > 0$, $f(x) - \frac{1}{x}$ a le même signe que $\ln(x)-1$:

$\ln(x)-1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^1 \Leftrightarrow x > e$.

Donc:
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & e & +\infty \\ \hline f(x) - \frac{1}{x} & || & - & + \end{array}$$

Si $0 < x < e$, alors C_f est situé en dessous de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$
 Si $x > e$, alors C_f est au-dessus de l'hyperbole.
 Si $x = e$, alors C_f est l'hyperbole d'équation: $y = \frac{1}{x}$ x coïncide.

3b)



$$A(\infty) = \int_e^{e^2} \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{car sur } [e; e^2] \subset [e; +\infty[, \text{ } f \text{ est au-dessus de l'hyperbole.}$$

$$A(\infty) = \int_e^{e^2} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln|x| \right]_e^{e^2} \quad \text{car } \frac{\ln x}{x} = \frac{u'}{u} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } p\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u|.$$

$$A(\infty) = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 - \ln(x) \right]_e^{e^2}$$

$$A(\infty) = \frac{1}{2} (\ln(e^2))^2 - \ln(e^2) - \left(\frac{1}{2} (\ln(e))^2 - \ln(e) \right)$$

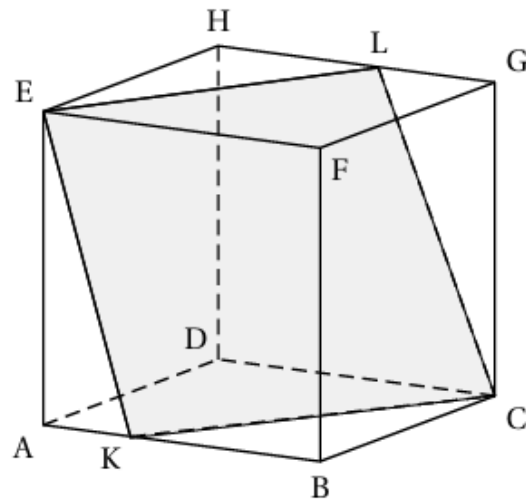
$$\underline{A(\infty)} = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 \right) = 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ U. A.}$$

Exercice V

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1).$$



1. Le point E a pour coordonnées $(0; 0; 1)$.

Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1; 1; 0)$.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1; 1; 1)$ est confondu avec le point G, le point K $(0; 0; 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

- a. • ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}$.
 • Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{DB}$.
 • Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est normal au plan (GEA).

- b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées (0; 0; 0) donc $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.

Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m .

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.

- a. • $K \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 • $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CL}$ donc CKEL est un parallélogramme.

- b. $K \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = x_{\overrightarrow{KC}} \times x_{\overrightarrow{KE}} + y_{\overrightarrow{KC}} \times y_{\overrightarrow{KE}} + z_{\overrightarrow{KC}} \times z_{\overrightarrow{KE}} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = m(m-1)$$

- c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit
 si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KE}$
 si, et seulement si, $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0$
 si, et seulement si, $m(m-1) = 0$
 si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$

4. Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

- a. • $K \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 • $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 • $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{KL} \perp \overrightarrow{EC}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

b. • $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$; or $m = \frac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{4}$

• $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos(\widehat{CKE})$

• $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } KC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \frac{5}{4} \text{ donc } KC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

• $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } KE^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \text{ donc } KE = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{On a donc : } -\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{CKE})$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \cos(\widehat{CKE}) \text{ et donc } \cos(\widehat{CKE}) = -\frac{1}{5}$$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{CKE} \approx 101,5^\circ$, soit $\widehat{CKE} \approx 102^\circ$.