Chapitre XIII :

« Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition. » Laurent Schwartz

Chapitre XIII — Calcul intégral

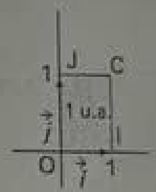
I – Idée intuitive de la notion d'aire plane

a) Généralités

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire :
– le plan, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$;
– f désignant une fonction, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$;
– a et b sont deux réels tels que a est inférieur ou égal à b.

Définition 1

On appelle **unité d'aire,** que l'on note u.a., l'unité de mesure des aires telle que : 1 u.a. $= \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$,
c'est-à-dire l'aire du rectangle OICJ où I, J et C sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$.



▸ On considère qu'une unité de longueur a été choisie pour le calcul des normes.

On sait calculer l'aire de parties du plan telles que les rectangles, les triangles, les disques….

Nous allons apprendre à calculer l'aire de nouvelles parties du plan, c'est l'un des objectifs du calcul intégral.

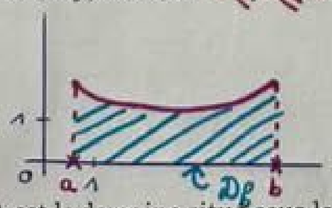
Définition

Soit f une fonction définie, ***continue et positive*** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Notons D_f le domaine du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$.

On a : $D_f = \{M(x\,;\,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.

Illustration :



On dit que D_f est le domaine situé sous la courbe représentant f.

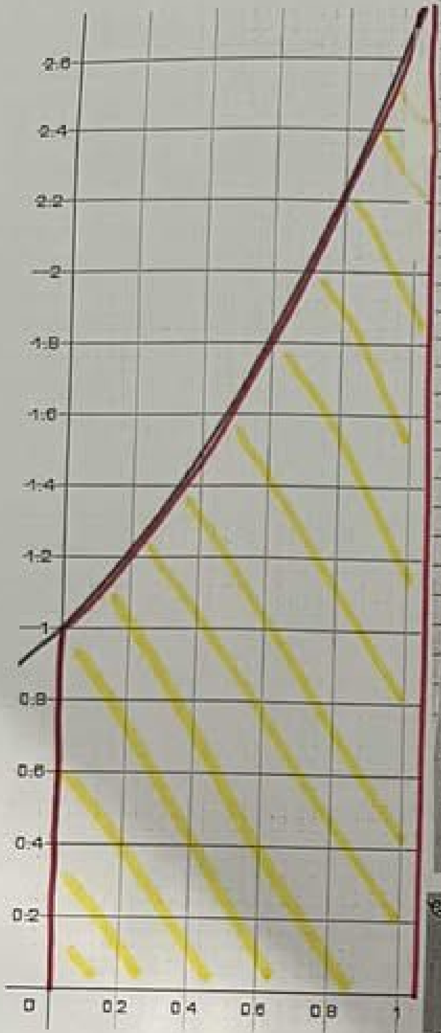
Propriété admise

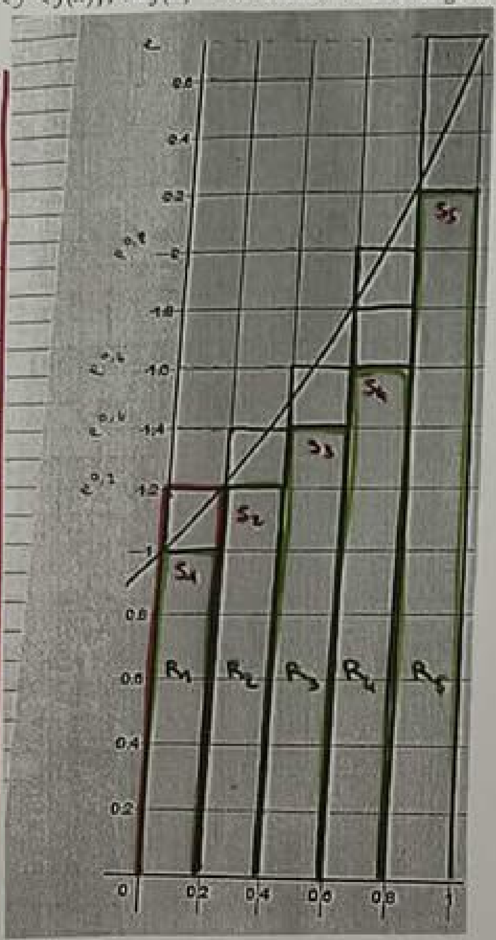
Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors le domaine D_f décrit précédemment admet une aire.

Ce résultat d'apparence anodine est délicat à prouver. On va apprendre à calculer l'aire d'un tel domaine.

A titre d'exemple, essayons de calculer l'aire d'un tel domaine : on va par exemple décomposer ce domaine en rectangles, dont on sait facilement calculer les aires.

A l'aide du dessin ci-dessous, proposer, après avoir hachuré D_f, un premier encadrement de l'aire de D_f où $D_f = \{M(x\,;y) \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, où $f(x) = e^x$. Utiliser 5 rectangles.





$$\underbrace{\sum_{i=1}^{5} A(R_i)} \leqslant \mathcal{A}(D_f) \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{5} A(S_i)}$$

D_f où $f(x) = e^x$

$$A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) + A(R_5) \leq A(D_f)$$

→ chacun des rectangles a pr largeur : $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

$A(R_1) = 0{,}2 \times e^0 = 0{,}2$

$A(R_2) = 0{,}2 \times e^{0,2}$

$A(R_3) = 0{,}2 \times e^{0,4}$

$A(R_4) = 0{,}2 \times e^{0,6}$

$A(R_5) = 0{,}2 \times e^{0,8}$

Donc $0{,}2 + 0{,}2e^{0,2} + 0{,}2e^{0,4} + 0{,}2e^{0,6} + 0{,}2e^{0,8} \leq A(D_f)$

$0{,}2(1 + e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8}) \leq A(D_f)$

$\approx 1{,}55 \leq A(D_f)$

De m̂ : $A(D_f) \leq \sum_{i=1}^{5} A(S_i)$ avec $A(S_1) = 0{,}2 \times e^{0,2}$

$A(S_2) = 0{,}2 \times e^{0,4}$

$A(D_f) \leq 0{,}2(e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8} + e)$ $\quad A(S_3) = 0{,}2e^{0,6}$

$\approx 1{,}90$ $\quad A(S_4) = 0{,}2e^{0,8}$

$A(S_5) = 0{,}2e$

Ainsi : $\boxed{1{,}55 \leq \mathcal{A}(D_f) \leq 1{,}90}$

Pour affiner le précédent encadrement, on va partager le domaine en des rectangles de largeur plus petite.

Soit n un entier naturel non nul fixé.
On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n petits segments de même longueur égale à $\frac{1}{n}$.

Encadrons l'aire de D_f par deux suites (i_n) et (s_n) que l'on va définir :

i_n = somme des aires des n rectangles situés en-dessous C_f $= \frac{1}{n}\times e^{0} + \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{n} e^{\frac{n-1}{n}}$

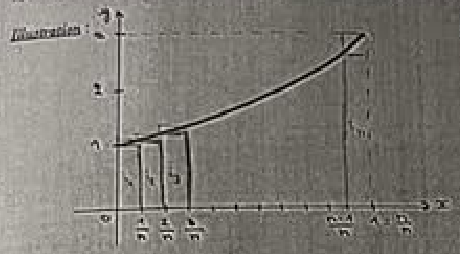
$i_n = \frac{1}{n}\left(e^{0} + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$

s_n = somme des aires des n rectangles situés au-dessus de C_f

$s_n = \frac{1}{n}\times e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\times e^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} e^{\frac{n}{n}}$

$s_n = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}\right)$

Illustration :



Rq : $i_n = \frac{1}{n}\left(1 + \underline{e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}}\right)$

$s_n = \frac{1}{n}\left(\underline{e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}} + e^{1}\right)$

Donc $s_n = i_n + \frac{e}{n} - \frac{1}{n}$

$s_n = i_n + \frac{e-1}{n}$

Déterminer les limites des deux suites (i_n) et (s_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$i_n = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{0}{n}} + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$

$i_n = \frac{1}{n}\left(\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^0 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right)$

↳ somme des termes d'une suite géo de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$ ($\neq 1$ car $\frac{1}{n} \neq 0$)

↳ Rappel : si $q \neq 1$, $S = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1}$

$S = \frac{1-q^n}{1-q}$

$i_n = \frac{1}{n}\times\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\times\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

$i_n = (1-e)\times\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

Cherchons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$. Or $\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{-1}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}$

Posons $X = \frac{1}{n}$; $n \to +\infty$: $X \to 0$

$\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X-1}{X} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X-e^0}{X-0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = -1$

Enfin, par limite de produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = (1-e)\times(-1) = e-1$

$s_n = i_n + \frac{e-1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = e-1$, donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e-1$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $i_n \leq A(D_f) \leq s_n$

D'après le th. des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} A(D_f) = A(D_f) = e-1$ u.a

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, C_f sa courbe représentative, et enfin D_f le domaine situé sous C_f.

On appelle intégrale de f entre a et b, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine D_f.

Cette intégrale est notée : $\int_a^b \underbrace{f(x)dx}_{\text{aire d'un "petit" rectangle}}$. On lit : intégrale entre a à b de la fonction f, ou encore, somme de a à b de $f(x)dx$.

$f(x)$ (L) ; dx (l)

$\int$ = symbole intégrale

Sans entrer dans les détails (*cf.* cours de l'enseignement supérieur, pour vraiment comprendre ce qu'est une intégrale), tout comme on l'a fait dans l'exemple précédent, l'aire d'un tel domaine peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles, d'où le nom de somme parfois utilisé au lieu d'intégrale.

Le terme $f(x)dx$ peut être vu comme l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont : $f(x)$ et dx.

Les nombres a et b sont appelés <u>les bornes</u> de l'intégrales : a est la borne du bas, et b la borne du haut.

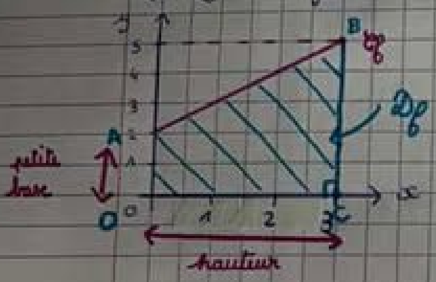
x est appelée la variable d'intégrale, la lettre désignant la variable n'a pas d'importance et aurait pu s'appeler t, u, v,...

Le symbole $\int$ est donc l'analogue, pour une variable continue, du symbole $\sum$ pour une variable discrète.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 3]$ par : $f(x) = x + 2$. Calculer $\int_0^3 f(x)dx$ après avoir représenté le domaine associé à cette intégrale.

- $0 \leqslant x \leqslant 3$ et $f(x) = x + 2$



- $\mathcal{A}(\mathcal{D}f) = \int_0^3 f(x)\,dx = \mathcal{A}(OABC)$ où OABC est un trapèze rectangle

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{\text{base} + \text{Base}}{2} \times \text{hauteur}$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{OA + CB}{2} \times OC = \frac{2+5}{2} \times 3 = 10{,}5 \text{ u.a.}$$

(unité d'aire)

<u>Propriétés évidentes de l'intégrale</u>

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel $a \in$ I, on a :

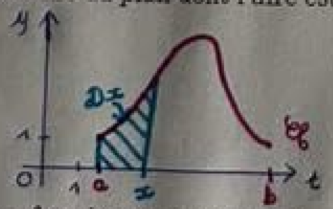
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ (ici rectangle de largeur nulle)
- Si f est constante sur $[a\ ;\ b]$, et vaut k, alors, $\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$......

$\forall x \in [a;b], f(x) = k$

<u>b) Fonction définie par une intégrale</u>

Considérons une fonction f continue et positive, définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Soit x un réel quelconque situé dans $[a\ ;\ b]$.

Hachurer le domaine du plan dont l'aire est : $\int_a^x f(t)dt$. On admet que cette aire ne dépend que de la valeur de x.



$$x \in [a;b] \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

On crée donc une fonction, notée F, définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

Pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

The Théorème

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$, et, pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$, on a : $F'(x) = f(x)$

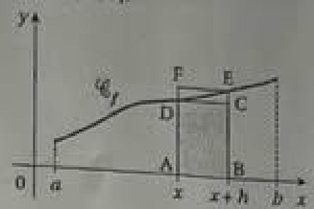
Preuve : Ce théorème est admis dans le cas général.

On le démontre ici pour une fonction continue, positive **et croissante**.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour x fixé, calculons $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ avec $h\neq 0$, $x\in[a\,;\,b]$ et $x+h\in[a\,;\,b]$.

- **Premier cas : h strictement positif,** soit $a\leqslant x<x+h\leqslant b$.



$F(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\,;\,x+h]$.

$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\,;\,x]$.

La différence $\Delta=F(x+h)-F(x)$ est donc, par additivité de l'aire, l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.

La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre x et $x+h$: $f(x)\leqslant f(z)\leqslant f(x+h)$.

Ce qui permet de dire que Δ est comprise entre $h\times f(x)$, l'aire du rectangle ABCD, et $h\times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABEF.

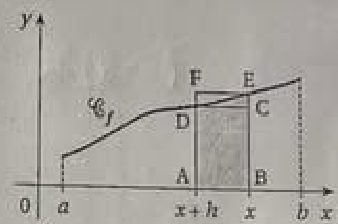
En divisant la double inégalité $h\times f(x)\leqslant F(x+h)-F(x)\leqslant h\times f(x+h)$ par $h>0$, on obtient :

$$f(x)\leqslant\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x+h)$$

Comme la fonction f est continue en x, lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

- **Deuxième cas : h strictement négatif,** soit $a\leqslant x+h<x\leqslant b$.



$\Delta=F(x+h)-F(x)$ est l'opposé de l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.

La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre $x+h$ et x : $f(x+h)\leqslant f(z)\leqslant f(x)$.

Ce qui permet de dire que $-\Delta$ est compris entre $(-h)\times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABCD, et $(-h)\times f(x)$, l'aire du rectangle ABEF.

En divisant la double inégalité $(-h)\times f(x+h)\leqslant-[F(x+h)-F(x)]\leqslant(-h)\times f(x)$ par $-h>0$, on obtient :

$$f(x+h)\leqslant\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leqslant f(x)$$

Comme la fonction f est continue en x, lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

- D'après l'étude des deux cas, la fonction F est dérivable en tout x de $[a\,;\,b]$ et $F'(x)=f(x)$. ■

II – Lien entre primitives et intégrales

$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=\mathcal{A}(D_x)$

dérivée $F'(x)=x^2$ Donc $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.

La fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est LA primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque : cela établit que toute fonction continue et positive sur un intervalle admet des primitives.

Preuve : $F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et F est une primitive de f sur I d'après la propriété "Th théorème"

Toute fonction ***continue*** sur un intervalle I ***admet des primitives*** sur cet intervalle I.

Ce point est très utile en pratique.
Sa démonstration est plus délicate et sera donc admise.

Théorème *(qui permet de calculer des intégrales).*

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ♥♥♥♥♥ où F est une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$.

On convient de noter : $[F(x)]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

On écrira donc : ♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ ♥♥♥♥♥

Cette dernière relation est parfois appelée formule de ***Newton-Leibniz.***

Preuve : Découle propriété d'avant (en faisant $x = b$ dans cette dernière)

Remarques

Le réel $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ **ne dépend pas de la primitive de f choisie.** car si G autre primitive de f alors $G(x) = F(x) + k$

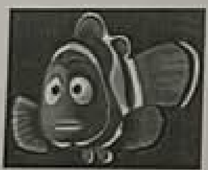
On admettra que ce théorème reste vrai pour toute fonction f continue sur $[a\,;b]$, même si f n'est pas de signe positif sur $[a\,;b]$.

Cela amène naturellement à la définition de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a\,;b]$:

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de cet intervalle, et F une primitive de f sur I.

♥♥♥♥ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F une primitive de f sur I. ♥♥♥♥



Bien retenir : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I. En pratique, pour alléger les calculs, on prend systématiquement la constante nulle dans l'expression de F.

Application fondamentale au calcul d'intégrales :

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x^2+3x+1)dx$; $\int_0^1 e^{-x}dx$; $\int_1^2 (\frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3})dx$; $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx$; $\int_0^1 3xe^{-x^2}dx$; $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}dx$;

- $I = \int_0^1 (x^2+3x+1)\,dx$

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2+3x+1$

→ Une primitive de f sur $[0;1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 1x$

$I = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$

$I = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{0}{3} + \frac{3\times 0}{2} + 0\right)$

$\boxed{I} = \frac{2}{6} + \frac{9}{6} + \frac{6}{6} = \boxed{\frac{17}{6}}$

- $J = \int_0^1 e^{-x}\,dx$ $\rightarrow$ Posons $f(x) = e^{-x}$

<u>Donc</u> $F(x) = -e^{-x}$ est une primitive de f

$J = [F(x)]_0^1 = [-e^{-x}]_0^1$

$J = -e^{-1} - (-e^0)$

$J = -e^{-1} + 1$

$\boxed{J = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{-1+e}{e}}$

- $K = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3}\right) dx$ (ici $1 \leqslant x \leqslant 2$)

$f(x) = \frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x} - x + x^{-3} = 3 \times \frac{1}{x} - x + x^{-3}$

<u>Donc</u> $F(x) = 3\ln(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$

$F(x) = 3\ln(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2}}{-2}$

$\boxed{F(x) = 3\ln(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}}$

$K = \left[3\ln(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^2$

$K = \underbrace{\left(3\ln(2) - \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2\times(2)^2}\right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(3\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2\times 1^2}\right)}_{F(1)}$

$K = 3\ln(2) - 2 - \frac{1}{8} + 1$

$\boxed{K = 3\ln(2) - \frac{9}{8}}$

- $L = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx$ $\rightarrow$ Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+x+4 \\ u'(x) = 2x+1 \end{cases}$

<u>Donc</u> $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(x^2+x+4)$

$L = F(1) - F(0) = \ln(1^2+1+4) - \ln(0+0+4)$

$L = \ln(6) - \ln(4) = \ln\left(\frac{6}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

- $M = \int_0^1 3xe^{-x^2}\,dx$ $\rightarrow$ $f(x) = 3xe^{-x^2} = 3 \times \frac{(-2x)\times e^{-x^2}}{-2} = -\frac{3}{2}u'(x)e^{u(x)}$

Posons $\begin{cases} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2x \end{cases}$ $\Rightarrow P(u'e^u) = e^u$

<u>Donc :</u> $F(x) = -\frac{3}{2}e^{u(x)}$

$F(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2}$

$M = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$

$M = -\frac{3}{2}e - \left(-\frac{3}{2}e^0\right)$

$M = -\frac{3}{2}e + \frac{3}{2}$

$$\bullet\ N = \int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$$

Soit $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + u'(x)\times u(x)$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\times 2\times u'(x)\times u(x)$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$

$(u^2)' = 2u'u$

Donc : $F(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}u^2(x)$

$F(x) = \ln(x) + \frac{(\ln(x))^2}{2}$

Donc : $N = F(e) - F(1)$

$$N = \Big(\underbrace{\ln(e)}_{=1} + \frac{(\ln(e))^2}{2}\Big) - \Big(\underbrace{\ln(1) + \frac{(\ln(1))^2}{2}}_{=0}\Big)$$

$$\boxed{N = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$$

III – Propriétés de l'intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a et b appartenant à I, on a :

- ♥♥ $\int_a^a f(x)dx = 0$ ♥♥ $\Rightarrow$ Soit F une primitive de f sur $[a;b]$: $\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$
- ♥♥ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ ♥♥ $\Rightarrow$ $\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b)$ $= -(F(b) - F(a))$

Preuve : $\longrightarrow$ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Propriété " Relation de Chasles"

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a, b et c dans I on a :

♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ ♥♥♥♥♥

Par analogie avec les vecteurs, cette relation est appelée la relation de Chasles.

Preuve : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; $\int_b^c f(x)dx = F(c) - F(b)$ donc $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \cancel{F(b)} - F(a) + F(c) - \cancel{F(b)}$ $= F(c) - F(a) = \int_c^a f(x)dx$

Propriété fondamentale (*appelée propriété de linéarité de l'intégrale*)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et k un réel quelconque.
Pour tous nombres a et b situés dans I, on a :

① ♥♥ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

♥♥ $\int_a^b k\times f(x)dx = k\times \int_a^b f(x)dx$

En particulier, ♥♥ $\int_a^b (kf(x)+g(x))dx = k\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ♥♥

Ces propriétés se résument en disant : propriétés de *linéarité de l'intégrale*.

Preuve :

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$.

a) Déterminer $u_0 + u_1$.

b) Calculer u_1. En déduire u_0.

a) $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

$$\underbrace{u_0} + \underbrace{u_1} = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}}\,dx} + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}}\,dx}$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \left(\frac{e^0}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1$$

$$\boxed{u_0 + u_1 = 1 - 0 = 1}$$

b) $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ Posons $\begin{cases} u(x) = 1+e^{-x} \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$$

<u>Donc</u> $u_1 = -\left[\ln(u(x))\right]_0^1 = -\left[\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$

$$u_1 = -\left(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^0)\right)$$

$$u_1 = -\left(\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - \ln(2)\right)$$

$$u_1 = -\ln\left(\frac{e+1}{e}\right) + \ln(2)$$

$$u_1 = \ln(2) - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$$

$$\boxed{u_1 =} \ln\left(\frac{2}{\frac{e+1}{e}}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)}$$

$u_0 + u_1 = 1$ (qa)

$$u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e}{\frac{2e}{e+1}}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{e}(e+1)}{2\cancel{e}}\right)$$

$$\boxed{u_0 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

<u>Signe d'une fonction, signe d'une intégrale et inégalités</u>

Soit a et b deux réels tels que : $a \leqslant b$.

- ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ ...*(propriété de positivité de l'intégrale).* ♥♥♥♥♥

- ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ ♥♥♥♥♥

<u>Preuve</u> : Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.

- Or $\forall x \in [a\,;b]$; $f(x) \geqslant 0$ et $F'(x) = f(x)$ Donc $F'(x) \geqslant 0$ et F croît sur $[a\,;b]$.

$\Rightarrow$ Donc $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \} \geqslant 0$ car F croît sur $[a\,;b]$, $a \leqslant b$ donc $F(a) \leqslant F(b)$

On retiendra que ***lorsqu'on intègre dans le bon ordre*** (c'est-à-dire quand $a \leqslant b$), une ***fonction de signe constant***, l'***intégrale*** de cette fonction ***a le même signe que cette dernière***.

♥♥♥♥♥*Propriété* *(croissance de l'intégrale)* ♥♥♥♥♥

C_f au dessous de C_g

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, telles que pour tout réel $x \in [a\,;b]$, on ait : $f(x) \leq g(x)$.

Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Retenir : Lorsqu'on intègre dans le bon ordre, ***l'intégrale conserve le sens des inégalités***.

Preuve : $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$

→ Par propriété de positivité de l'intégrale : $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0$

→ Par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Corollaire

Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$

Preuve : $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Par croissance de l'intégrale : $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Exercice 4

a) Démontrer que : $0 \leq \int_1^e \ln(x)dx \leq e-1$. On commencera par se demander à quel intervalle x appartient-il ?

b) Justifier que pour tout réel $t \geq 0$, $\int_0^t xe^{-x}dx \geq 0$.

c_1) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$.

c_2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis en déduire la nature et la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Remarque : *les questions c_1 et c_2 peuvent être à la base d'un très joli développement au grand oral : Comment l'infini nous permet-il d'appréhender de nouvelles notions mathématiques (ici les séries) ? L'exemple précédent montre que non, on appelle série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Par-contre, la série de Riemann $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ elle converge ! En posant $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout entier n non nul, on peut facilement montrer que (v_n) est une suite croissante, et que $v_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$, en remarquant que : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.*

• $\int_1^e \ln(x)\,dx$: $1 \leqslant x \leqslant e$

Pour encadrer une intégrale on commence tjrs par encadrer la fonction intégrée

Ici : $1 \leqslant x \leqslant e$

Donc $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(e)$ par croissance de ln sur $[1, e]$

$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$

Par croissance de l'intégrale : $\underbrace{\int_1^e 0\,dx}_{=0} \leqslant \int_1^e \ln(x)\,dx \leqslant \int_1^e 1\,dx$

$0 \leqslant \int_1^e \ln(x)\,dx \leqslant \underbrace{1(e-1)}_{e-1}$

b) $t \geqslant 0$ et $I = \int_0^t x e^{-x}\,dx$

Ici on a : $0 \leqslant x \leqslant t$

Donc $x \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$

Donc $xe^{-x} > 0$

Par positivité de l'intégrale $\int_0^t xe^{-x}\,dx \geqslant 0$ Donc $I \geqslant 0$

c) $k \geqslant 1$, mq : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$ ← classique bac

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $k \leqslant x \leqslant k+1$ (Bornes !)

Donc $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k+1}$ car la fonct° inverse décroît sur $]0;+\infty[$

Donc : $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$

Par croissance de l'intégrale : $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$

constantes vis à vis de x.

Donc $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$\frac{1}{k+1} \times (k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k} \times (k+1-k)$

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k} \quad (\#)$$

c₂) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$

Écrivons successivement $(\#)$ avec $k=1$; $k=2$; ; $k=n$

$k=1$: $\frac{1}{2} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{1}$ / $k=2$: $\frac{1}{3} \leqslant \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{2}$

• $k=3$: $\frac{1}{4} \leqslant \int_3^4 \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{3}$ ... $k=n$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{n}$

somme de mb à mb de ces n inégalités doubles :

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1} \leqslant \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx}_{\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx} \leqslant \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \left[\ln(x)\right]_1^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{0}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)} \Longrightarrow u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

→ On a : $u_n \geqslant \ln(n+1)$ (*)

Or $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composée $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ (**)

Donc par théorème de comparaison (*) et (**) font que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

d) V-F : $\int_a^b (f(x))^2\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$?

Faux : ct. ex : $a=0$ et $b=0$

$f(x) = x$

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{0} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\,dx\right)^2 = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \text{FAUX}$$

∘ g continue sur $[0;1]$

Si $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$ alors $\underbrace{f=g \text{ sur } [0;1]}_{\forall x \in [0;1],\ f(x)=g(x)}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

et $g(x)=1$, $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

Donc : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$ et $f \neq g$ sur $[0;1]$ AFFIRMATION FAUSSE

IV- L'intégration par parties

Voici un ***puissant outil*** qui permet de calculer certaines intégrales de fonctions écrites sous la forme d'un produit de deux fonctions.

Formule de l'intégration par parties (***notée IPP***), ***très importante pour le bac et le supérieur !!!***

Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle [a ; b], dérivables sur cet intervalle, et telles que u' et v' soient continues sur [a ; b].

On a : ♥♥♥♥♥ $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ ♥♥♥♥♥

Preuve : $(uv)' = u'v + uv'$ donc $uv' = (uv)' - u'v$ (égalité fonctionnelle)

Donc $\forall x \in [a;b]$, $u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$

Or Si $f = g$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Donc : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b \left((uv)'(x) - u'(x)v(x)\right)dx$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Or une primitive de $(uv)'$ est uv !

Donc : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Rq : la formule de l'IPP s'écrit aussi

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

La formule de l'intégration par parties permet donc parfois, de calculer l'intégrale d'une fonction qui est écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions.

Exemples d'utilisation

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$; $J = \int_1^e \ln(x)\,dx$ (♥♥retenez bien l'astuce classique ici♥♥).

$K = \int_1^e (x^2 + 2x)\ln(x)\,dx$

2) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer $L = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{x}_{\text{on dérive}}\,\underbrace{e^x}_{\text{on primitive}}\,dx$ Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$ primitive

Par la formule de l'IPP : $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)\,dx$

$I = \left[xe^x\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1 \times e^x\,dx$

$I = 1e^1 - 1e^0 - \left[e^x\right]_0^1$

$\boxed{I =} e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = \boxed{1}$

$J = \int_1^e \ln(x)\,dx$

grosse astuce : $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$

$J = \int_1^e 1 \times \ln(x)\,dx$ Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \text{ donc } v(x) = x \end{cases}$

Par IPP $J = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx$

$J = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x\,dx$

$J = e\ln(e) - 1\ln(1) - \int_1^e 1\,dx$

$J = e - [x]_1^e = e - (e-1)$

$\boxed{J = 1}$

$K = \int_1^e (x^2+2x)\ln(x)\,dx$ Posons : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = x^2+2x \\ v(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 \end{cases}$

Par IPP : $K = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx$

$K = \left[\ln(x) \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)dx$

Or $\frac{1}{x} \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) = \frac{x^2}{3} + x$

Donc $K = \left[\ln(x) \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + x\right)dx$

$K = \ln(e)\left(\frac{e^3}{3} + e^2\right) - \ln(1)\left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - \left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right]_1^e$

$K = \frac{e^3}{3} + e^2 - \left(\frac{e^3}{9} + \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1^3}{9} + \frac{1^2}{9}\right)\right)$

$K = \frac{e^3}{3} + e^2 - \frac{e^3}{9} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$

$\boxed{K = \frac{2e^3}{9} + \frac{e^2}{2} + \frac{11}{18}}$

2) $L = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$ $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Par IPP : $L = [-x^2e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 2x \times (-e^{-x})\,dx$

$L = -e^{-1} - (0) + \int_0^1 2x e^{-x}\,dx$

$L = -e^{-1} + [-2xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x}\,dx$

$L = -e^{-1} - 2e^{-1} - (2\times 0) + 2\int_0^1 e^{-x}\,dx$

$L = -3e^{-1} + 2[-e^{-x}]_0^1$

$L = -3e^{-1} + 2(-e^{-1} - (-e^0))$

$\boxed{L = -5e^{-1} + 2}$

$L = -3e^{-1} - 2e^{-1} + 2$

Exercice 5

Soit $x > 0$.

$a)$ Effectuer une intégration par parties pour calculer : $\mathrm{I}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

$b)$ En déduire les primitives de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- $x > 0$

a) $I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} \, dt = \int_1^x \ln(t) \times \frac{1}{t^2} \, dt$

Posons : $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ u'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$ et $\begin{array}{l} v'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = \frac{-1}{t} \end{array}$

$I(x) = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)\,dt$

$I(x) = \left[\frac{-\ln(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt$

$I(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \left(\frac{-\ln(1)}{1}\right) + \int_1^x \frac{dt}{t^2}$

$I(x) = \frac{-\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$

$I(x) = \frac{-\ln(x)}{x} + \left(-\frac{1}{x} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right)$

$I(x) = \frac{-\ln(x) - 1}{x} + 1 = \frac{x - \ln(x) - 1}{x}$

b) f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

$I(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ Donc I est la primitive de f qui s'annule lorsque $x = 1$

Donc $F(x) = I(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{x - \ln(x) - 1}{x} + C$

Exercice 6

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

$a)$ A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

$b)$ Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

$c)$ En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

$n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\, dx$$

a) $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x}\, dx$ $\quad n=1$

$\begin{cases} u(x) = 1-x \\ u'(x) = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Par IPP $\quad I_1 = \int_0^1 u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\, v(x)\, dx$

$$I_1 = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -(-1)e^{-x} dx$$

$$I_1 = [(x-1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$I_1 = (1-1)e^{-1} - (0-1)e^0 + [e^{-x}]_0^1$$

$$I_1 = 1 + [e^{-1} - (-e^0)] = 1 + e^{-1} - 1 = \frac{1}{e}$$

b) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$

⇨ Lorsqu'on a une suite d'intégrales, pour trouver une relation de recurrence entre I_{n+1} et I_n on fait systematiquement une IPP.

Soit $u(x) = (1-x)^{n+1}$ $\quad$ et $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

dérivé composée

Donc $\quad I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times \left([-(1-x)^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 +(n+1)(1-x)^n e^{-x} dx \right)$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times [0 + 1e^0] - \frac{(n+1)}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \quad \text{car } \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

$I_2 = \frac{1}{2!} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ $\quad n=1$

$I_3 = \frac{1}{3!} - I_2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{e}$ $\quad n=2$

Remarque : Soit f est continue sur $[a ; b]$, et m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à $[a ; b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$, que peut-on dire de la valeur moyenne de f sur $[a ; b]$?

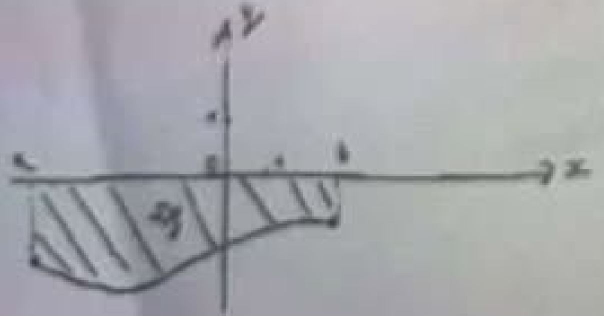
On a : $m \leqslant \mu \leqslant M$ où $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$

En effet : si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors par ↗ de l'intégrale : $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$

b) Intégrale d'une fonction de signe quelconque sur un intervalle et aire.

α) Cas d'une fonction à valeurs négatives sur [a ; b]

Soit f une fonction continue et *négative* sur $[a ; b]$, et C_f sa courbe représentative, et D_f le domaine au-dessus de la courbe compris entre les verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.



Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx, \quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \cos(x)\,dx.$$

1. Calculer I_0.
2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx.$$

   b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

   c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

1

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\cos(\pi) = -1$
- $\cos(0) = 1$

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3      n = 0
4      I = 2
5      While I>=0,1
6          n = n+1
7          I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8      return n
```

$\Rightarrow$ Sur $[0;\pi]$ sin $\oplus$

$\Rightarrow$ Sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ cos $\oplus$

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx$

1) $I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0x} \sin(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

$I_0 = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$

$I_0 = -(-1) + 1 = 2$

2) a) $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx$

Or $0 \leqslant x \leqslant \pi$ donc $\sin(x) \geqslant 0$

et $e^{-nx} > 0$

Donc $\forall x \in [0;\pi]$, $e^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$

Par propriété de positivité de l'intégrale : $\int_0 e^{-nx} \sin(x)\,dx \geqslant 0$ $\quad I_n \geqslant 0$

2) b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} \sin(x)\,dx - \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$

Par linéarité de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right) \sin(x)\,dx$$

Or $e^{-(n+1)x} = e^{-nx-x} = e^{-nx} \times e^{-x}$:

Donc (facto par e^{-nx} sous l'intégrale)

$$I_{n+1} - I_n = \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-nx}(e^{-x} - 1) \sin(x)\,dx}_{\text{factorisé}}$$

Or $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (Bornes) et sin à valeur positive sur $[0;\pi]$

Donc $\forall x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ (*)

$e^{-nx} > 0$ (**)

Enfin, $x \geqslant 0$ donc $-x \leqslant 0$

donc $e^{-x} \leqslant 0$ ($\nearrow$ de l'exp sur $\mathbb{R}$)

$e^{-x} \leqslant 1$

Donc $e^{-x} - 1 \leqslant 0$ (***)

Grâce à la règle des signes d'un produit : (*) ; (**) , (***) font que :

$\forall x \in [0;\pi]$, $e^{-nx}(e^{-x} - 1) \sin(x) \leqslant 0$

Par propriété de positivité de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ donc (I_n) décroît

c) D'après q. a) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$ donc (I_n) est minorée par 0.

D'après q. b), (I_n) décroît

(I_n) converge car décroissante et minorée.

3) a) $I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx$

$\forall x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \leqslant 1$

Donc comme $e^{-nx} > 0$; $e^{-nx} \sin(x) \leqslant 1 \times e^{-nx}$

$e^{-nx} \sin(x) \leqslant e^{-nx}$

b) $\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{e^0}{-n}$

$\int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx = \frac{-e^{-n\pi}}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$

c) On a : $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$ $\nearrow$ $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$

Remarque : Soit f est continue sur $[a\,;\,b]$, et m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à $[a\,;\,b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$, que peut-on dire de la valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$?

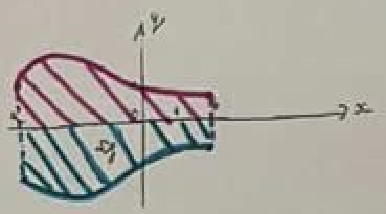
On a : $m \leqslant \mu \leqslant M$ où $\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,dx$

En effet : si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors par $\nearrow$ de l'intégrale : $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$

b) Intégrale d'une fonction de signe quelconque sur un intervalle et aire.

α) Cas d'une fonction à valeurs négatives sur $[a\,;\,b]$

Soit f une fonction continue et ***négative*** sur $[a\,;\,b]$, et C_f sa courbe représentative, et D_f le domaine au-dessus de la courbe compris entre les verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.



Preuve : $\forall x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant 0$ Donc $-f(x) \geqslant 0$

Or $\mathcal{C}f$ et $\mathcal{C}\text{-}f$ sont symétriques par rapport à l'axe des x

Or une symétrie axiale conserve les aires

Donc : $\mathcal{A}(\mathcal{D}f) = \mathcal{A}(\mathcal{D}\text{-}f)$

Or $-f \geqslant 0$ donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}\text{-}f) = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

On a : $Aire(D_f) = -\int_a^b f(x)\,dx$

Donc, si f est continue et négative sur $[a\,;\,b]$, $\int_a^b f(x)dx = -$ Aire $(\mathcal{D}f)$

β) Cas d'une fonction de signe variable sur $[a\,;\,b]$

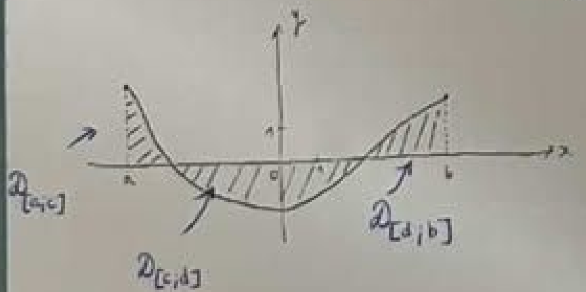
Soit f une fonction de signe variable sur $[a; b]$. L'aire du domaine D coloré ci-dessous est donné par :

$Aire\ (D) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_{[a;c]}) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_{[c;d]}) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_{[d;b]})$

Aire $(\mathcal{D}) = \int_a^c f(x)\,dx + \left(-\int_c^d f(x)\,dx\right) + \int_d^b f(x)\,dx$

Enfin, si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x)$

si $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x)$



Ainsi : $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^d |f(x)|\,dx + \int_d^b |f(x)|\,dx$

Avec la relation de Chasles :

$$\boxed{\text{Aire }(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

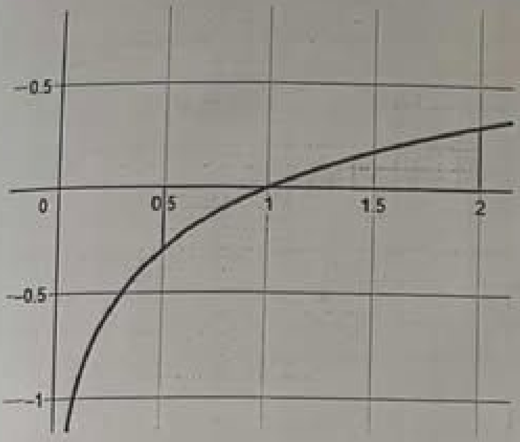
On a donc dans cet exemple : $\int_a^b f(x)dx =$

Méthode : On découpe $[a\,;\,b]$ en intervalles sur lesquels f garde un signe constant (ce sera toujours possible en terminale), et on se sert de la définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs positives (aire sous la courbe) et de l'intégrale d'une fonction à valeurs négatives (opposé de l'aire au-dessus de la courbe).

De façon plus générale, on peut retenir que : ♥♥ $Aire\ (D) = \int_a^b |f(x)|dx$.♥♥

Exemple

Calculer l'aire du domaine ci-dessous associé à la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = ln(x)$.



Sur $[0{,}5\,;1]$, $\ln(x)<0$ et sur $[1;2]$, $\ln(x)>0$

Donc Aire $(\mathcal{D}) = \displaystyle\int_{0{,}5}^{1} \underbrace{-\ln(x)}_{|\ln(x)|}\,dx + \int_{1}^{2} \underbrace{\ln(x)}_{|\ln(x)|}\,dx$

car $\ln(x)<0$ sur $[0{,}5;1]$

Par IPP triviale une primitive de $x\mapsto \ln(x)$ et $x\mapsto x\ln(x)-x$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = [-x\ln(x)+x]_{0{,}5}^{1} + [x\ln(x)-x]_{1}^{2}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = -1\ln(1)+1-(-0{,}5\ln(0{,}5)+0{,}5)+2\ln(2)-2-(1\ln(1)-1)$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \cancel{1}+0{,}5\ln(0{,}5)-0{,}5+2\ln(2)\cancel{-2}\cancel{+1}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+2\ln(2)$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}+2\ln(2) = \frac{3}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}$

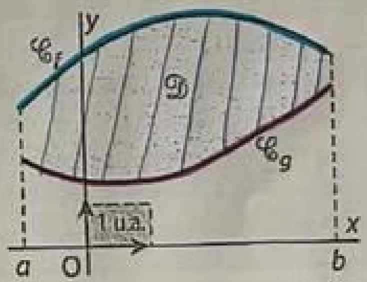
$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{3\ln(2)-1}{2}}$

c) Aire d'une portion du plan autre qu'un domaine.

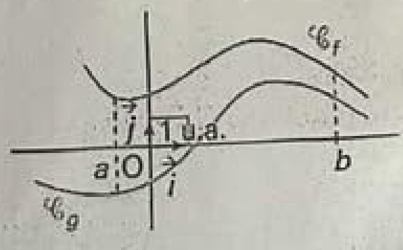
Propriété

Aire d'un domaine entre deux courbes sur $[a\,;b]$

Si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire du domaine $\mathfrak{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$ est aire $(\mathfrak{D}) = \int_a^b (f-g)(t)\,dt$.
En effet, lorsque f et g sont positives (voir schéma ci-contre),
aire$(\mathfrak{D}) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f(t)-g(t))\,dt$.
On admet que ce résultat reste valable dans le cas général.



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Soit f et g deux fonctions définies et continues sur I telles que :
pour tout x appartenant à $[a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, et $\mathfrak{D}$ le domaine du plan délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:



$\mathfrak{D} = \{M(x\,;y) \in \mathscr{P}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$.
L'aire $\mathscr{A}(\mathfrak{D})$, en u.a., du domaine $\mathfrak{D}$ est égale à $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

V - Compléments

a) Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ non réduit à un point.

♥ ♥On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, le réel noté μ défini par :

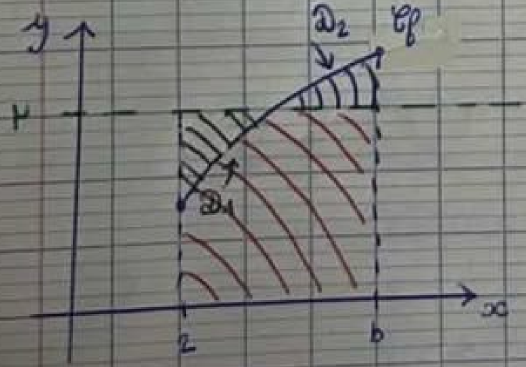
♥ ♥$\mu = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ♥♥ (ie: $\underbrace{\mu(b-a)}_{\text{aire d'un rectangle de largeur } \mu \text{ et de longueur } b-a} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction carrée sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

$$\mu = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Interprétation géométrique de la valeur moyenne d'une fonction dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$. μ est la largeur d'un rectangle qui a m̂ aire que $\mathcal{D}_f$ (domaine sous courbe) et pour longueur celle des abscisses des pts de $\mathcal{D}_f$



μ est telle que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$

$\mathcal{A}(\text{Rouge}) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_f)$

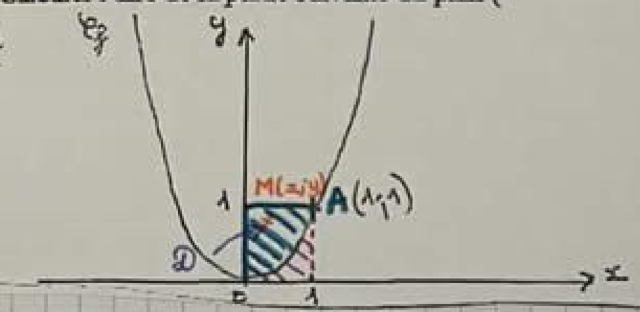
$\mathcal{A}(\text{Noire}) + \mathcal{A}(\text{Rouge}) =$ Aire rectangle de taille μ par $b-a = \mathcal{A}(\mathcal{D}_f)$

Donc : $\mathcal{A}(\cancel{\text{Rouge}}) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}(\cancel{\text{Rouge}})$

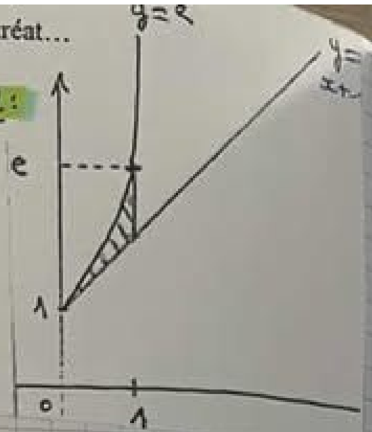
Application : attention, il y a souvent une question de ce genre au baccalauréat…

Exemple 1 : Calculer l'aire de la partie suivante du plan

où $f(x)=x^2$



Ex 2 :



Ex 1 : $\mathcal{D} = \{M(x;y) ;\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$ = Aire carré unité − Aire sous la courbe

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1^3}{3} - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{3}$ u.a

Ex 2 : $y = x+1$ est la tangente à $\mathcal{C}_{exp}$ en $A(0;1)$

exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_{exp}$ est au dessus de la droite d'équation : $y = x+1$

Donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^1 (e^x - (x+1))\,dx$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^1 (e^x - x - 1)\,dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = e^1 - \frac{1}{2} - 1 - (e^0 - 0 - 0)$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = e - \frac{3}{2} - 1 = e - \frac{5}{2}$ u.a

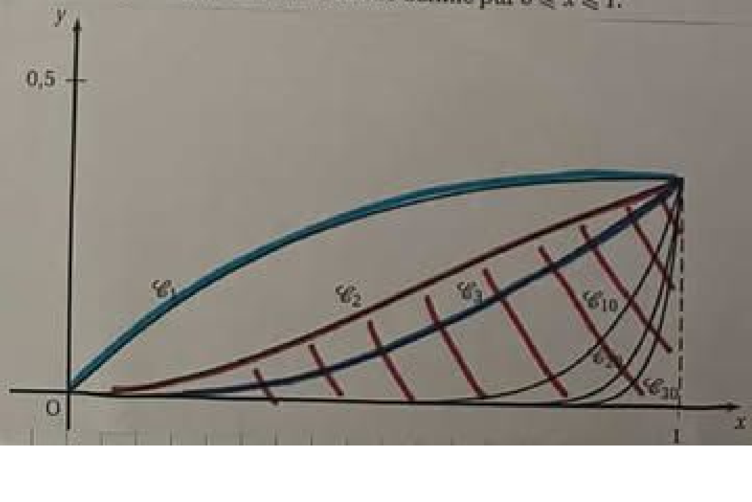
Exercice III (*exercice fondamental dans la démarche utilisée*)

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx.$$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)$.

1) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$ $\qquad \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$

$I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$

$I_1 = -e^{-1} + \int_0^1 -e^{-x}\,dx$

$I_1 = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0$

$I_1 = 1 - \frac{2}{e}$

2) a) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$\forall x \in [0;1]$; $x^n e^{-x} \geqslant 0$ (car $x^n \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$)

Donc $f_n(x) \geqslant 0$

Ainsi I_n est l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}_n$ entre les abscisses 0 et 1

Constat : Lorsque n augmente, l'aire du domaine sous $\mathcal{C}_n$ diminue (voir courbe)

Donc I_n semble être décroissante

Rq : (I_n) semble même converger vers 0 !

b) Méthode de la différence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x})\,dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \times (x-1)\,dx$

Or $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc $x-1 \leqslant 0$ et $x^n \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$ donc par règle des signes :

$\forall x \in [0,1]$; $x^n e^{-x}(x-1) \leqslant 0$

Par propriété de positivité de l'intégrale on a : $\int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\,dx \leqslant 0$

$I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, donc $I_{n+1} \leqslant I_n$

Donc I_n décroît.

c) $I_n = \text{Aire}(\mathcal{D}_n) \geqslant 0$

(I_n) décroît (q. b) et elle est minorée par 0

$\Rightarrow$ Donc (I_n) converge d'après le théorème de convergence des suites monotones.

d) Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

⚠ $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \neq \int_0^1 \left(\lim\limits_{n \to +\infty} x^n e^{-x} \right) dx$

- On ne sait pas en terminale primitiver $x \mapsto x^n e^{-x}$

Donc calcul de l'intégrale impossible.

Donc on ENCADRE I_n :

$0 \leqslant I_n$ et $\forall x \in [0;1]$, $x^n e^{-x} \leqslant x^n$

car $-x \leqslant 0$ Donc $e^{-x} \leqslant e^0$ par croissance de l'exp.

Donc $x^n e^{-x} \leqslant x^n$

Ainsi : $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 \, dx \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx \leqslant \int_0^1 x^n \, dx$$

$$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

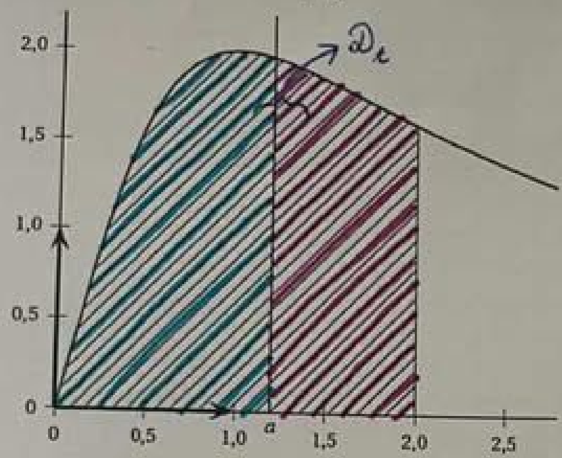
D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

Exercices sur l'intégration

Exercice I

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}.$$



La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x = a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est :

Réponse A : $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ Réponse B : $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ Réponse C : $\ln 5 - 0{,}5$ Réponse D : $\frac{10}{9}$

$0 \leqslant x \leqslant 2$ donc $4x \geqslant 0$ et $x^2+1 \geqslant 1 \geqslant 0$

Donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0;2]$

Donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_t) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ donc $F(x) = 2\ln(x^2+1)$

$\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ Donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_t) = \left[2\ln(x^2+1)\right]_0^2 = 2\ln(5) - \cancel{2\ln(1)}$

On cherche a avec $(0 \leq a \leq 2)$ tel que :

$\underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{D}_a)} = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\mathcal{D}_t)$

$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{2} \times 2\ln(5) = \ln(5)$

$\underbrace{\int_0^a \frac{4x}{x^2+1}\,dx} = \ln(5)$

$\left[2\ln(x^2+1)\right]_0^a = \ln(5)$

$2\ln(a^2+1) - 2\ln(1) = \ln(5)$

$\ln(a^2+1) = \frac{\ln(5)}{2}$

$x > 0$; $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Or $\frac{\ln(5)}{2} = \ln(\sqrt{5})$

Donc $\ln(a^2+1) = \ln(\sqrt{5}) \Leftrightarrow a^2+1 = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ (>0)

$\Leftrightarrow |a| = \sqrt{\sqrt{5}-1}$

RÉPONSE B

Exercice II

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\,dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

4. **Déterminer la limite de la suite (u_n).**

1) $u_0 = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x)\,dx}$

$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x) = u'(x)u(x)$ où $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x}\end{cases}$

$P(u'u) = \frac{u^2}{2}$

$u_0 = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln(2))^2}{2} - \underbrace{\frac{(\ln(1))^2}{2}}_{0} = \frac{(\ln(2))^2}{2}$

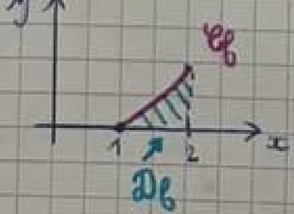
Ici $1 \leqslant x \leqslant 2$; $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Donc $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ par $\nearrow$ de $\ln$ sur $]0;+\infty[$

$0 \leqslant \ln(x)$ et $x > 0$ donc $f(x) \geqslant 0$

$u_0 = \int_1^2 f(x)\,dx$ est donc l'aire du domaine

$\mathcal{D}_f$ situé sous la courbe de $\mathcal{C}$ entre les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$



2) $x \in [1;2]$, donc $1 \leqslant x \leqslant 2$: $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ par croissance de $\ln$ sur $[1,2]$

$0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$

Donc : $\frac{0}{x^{n+1}} \leqslant \frac{\ln(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{\ln(2)}{x^{n+1}}$ car $x^{n+1} > 0$ vu que $x \geqslant 1$

$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$

3) D'après q 2)

$\forall x \in [1;2] : 0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\underbrace{\int_1^2 0\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}} \leqslant \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{u_n}} \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2)\,dx$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2) \times \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,dx \quad \text{Par linéarité de } \int$$

Or $\frac{1}{x^{n+1}} = x^{-(n+1)} = x^{-n-1}$ Donc $x \mapsto \frac{1}{x^{n+1}}$ se primitive en $x \mapsto \frac{x^{-n}}{-n}$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2) \times \left[\frac{x^{-n}}{-n}\right]_1^2$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{-\ln(2)}{n} \left[\frac{1}{x^n}\right]_1^2$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant -\frac{\ln(2)}{n} \times \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{1^n}\right)$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n} \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (*)$$

4) $2 > 1$ donc $\lim_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Par somme : $\lim_{n \mapsto +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$

$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par produit : $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0$ $(**)$

Or $\lim_{n \mapsto +\infty} 0 = 0$ $(***)$

D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur R par :

$$f_a(x) = a e^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.
2. On pose dans cette question $a = 1$.
   On étudie donc la fonction f_1 définie sur R par :

   $$f_1(x) = e^x + 1.$$

   a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

   b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.
3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2?
   Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

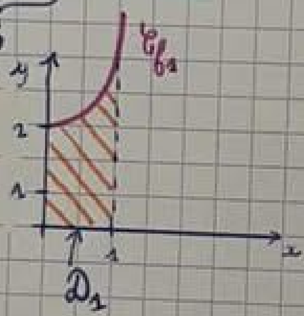
$a \in [0;1]$

1) $f_a(x) = ae^{ax} + a$ et $I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx$

$a = 0$; $I(0) = \int_0^1 \underbrace{(0e^{0x} + 0)}_{0}\,dx = 0$

2) a) $a = 1$

$f_1(x) = e^x + 1$



$I(1) = \int_0^1 f_1(x)\,dx$

$f_1(x) > 0$ sur $[0;1]$

Donc $I(1) = \text{Aire}(\mathscr{D}_1)$

b) $I_1 = \int_0^1 (e^x + 1)\,dx$

$I_1 = [e^x + x]_0^1 = e^1 + 1 - (e^0 + 0)$

$I_1 = e^1 + 1 - 1 = e$

$I_1 \approx 2{,}7$ à 0,1 près

3) $\underbrace{I(a)}_{} = 2$

$\underbrace{\int_0^1 (ae^{ax} + a)\,dx}_{} = 2$ (inconnue : a)

$[e^{ax} + ax]_0^1 = 2$

$e^a + a - (e^0 + 0) = 2$

$e^a + a - 1 = 2$

$e^a + a - 3 = 0$

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par

$g(a) = e^a + a - 3$

Mq l'équation $g(a) = 0$ admet une solution sur $[0;1]$

Or $g'(a) = e^a + 1$

Or $\forall a \in \mathbb{R}$, $e^a > 0$, donc $e^a + 1 > 0$: $g'(a) > 0$

Donc g est strictement croissante.

Donc :

a	0		α		1
$g(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-2$

$g(0) = e^0 - 3 = -2$

$g(1) = e^1 + 1 - 3 = e-2$

*) g est continue car dérivable sur $[0;1]$

**) g est strictement croissante sur $[0;1]$

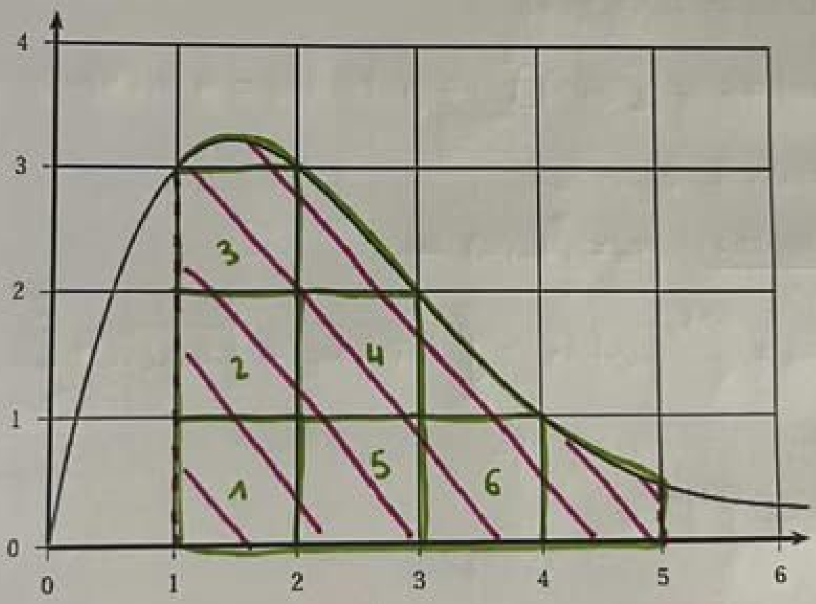
***) $-2 < 0 < e-2$ car $e-2 \approx 0,718$

D'après le CTVI, $g(a) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$, notons la α.

Avec la machine : $0,79 < \alpha < 0,80$ à 10^{-2}

Bribes de QCM / vrai-faux :

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x)\,dx$ est :

A. $0 \leqslant I \leqslant 4$

B. $1 \leqslant I \leqslant 5$

C. $5 \leqslant I \leqslant 10$

D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

Aire $(D) = \int_5^1 f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ D contient 6 carreaux et en contient $\ominus$ de 10

Donc $5 \leqslant I \leqslant 10$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln(x^2+4)$.

Alors $\underbrace{\int_0^2 g'(x)\,dx}_{}$ $= [g(x)]_0^2$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9
B. 8,3
C. 1,7
D. 7,5

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \,dx.$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

③ $g(x) = x^2 \ln(x^2+4)$

$\int_0^2 g'(x)\,dx = [g(x)]_0^2 = g(2) - g(0) = 4\ln(8) - 0 = 4\ln(8) \approx 8{,}31$

RÉPONSE B : 8,3

Affirmation 5 : $v_n = \int_1^n \ln(x)\,dx$

$v_{n+1} - v_n = \underbrace{\int_1^{n+1} \ln(x)\,dx}_{} - \int_1^n \ln(x)\,dx = \underbrace{\int_1^n \ln(x)dx + \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx}_{\text{Charles}} - \int_1^n \ln(x)\,dx$

$= \int_n^{n+1} \ln(x)\,dx$

Or $1 \leqslant n \leqslant x \leqslant n+1$

Donc $\ln(1) \leqslant \ln(n) \leqslant \ln(x)$ (Par ↗ du ln sur $]0;+\infty[$

$0 \leqslant \ln(x)$ donc par positivité de $\int$ on a : $\int_n^{n+1} \ln(x)\,dx \geqslant 0$

$v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

Donc (v_n) croît

AFFIRMATION VRAIE

Exercice V (Là on fait de belles Mathématiques !)

122 Irrationnalité du nombre e

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

1. Calculer I_1.

2. n est un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$,
$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n.$$

b) En déduire que :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

3. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1.$$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :
$$k_n = n!\,e - I_n.$$

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n.

b) Calculer k_1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre n de $\mathbb{N}^*$, k_n est un nombre entier naturel.

c) Avec les questions **4. b)** et **2. b)**, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre $n!\,e = k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.

5. a) p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls.
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant q$, le nombre $\dfrac{n!\,p}{q}$ est un entier naturel.

b) En déduire alors que le nombre e est irrationnel.

La découverte des nombres irrationnels (ou incommensurables) remonte sans doute à l'époque de Pythagore avec le calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté 1, cette longueur étant égale à $\sqrt{2}$. L'irrationnalité du nombre e a été prouvée par Leonhard Euler en 1737.

$n \geqslant 1$ et $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

① $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x}\,dx = \int_0^1 x e^{1-x}\,dx$

Par IPP : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^{1-x} \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$

$I_1 = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 1\times(-e^{1-x})\,dx$

$I_1 = -e^0 - (-0) + \int_0^1 e^{1-x}\,dx$

$I_1 = -1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx$

$I_1 = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = 1 + (-e^0 - (-e^1))$

$I_1 = -1 - 1 + e = e - 2$

② $n \geqslant 1$

a) $x \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 0 \geqslant -x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow 1 \geqslant 1-x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 1-x \leqslant 1$

Donc par croissance de exp sur $\mathbb{R}$:

$e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$

$1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$

Or $x^n \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$, donc :

$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n$

2)b) D'après 2)a) : $\forall x \in [0;1]$,

$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n$

Par propriété de ↗ de $\int$:

$\int_0^1 x^n\,dx \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx} \leqslant \int_0^1 e x^n\,dx$

$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{e x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

3) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ u'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = e^{1-x} \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$

Par IPP : $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x}\,dx$

$I_{n+1} = -e^0 + (n+1) \times \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

④ $n \geqslant 1$, $k_n = n!\,e - I_n$ ⊛

a) $k_{n+1} = (n+1)!\,e - I_n$

D'après q.3) $k_{n+1} = (n+1)!\,e - (-1 + (n+1) I_n)$

$k_{n+1} = (n+1)!\,e + 1 - (n+1)\ I_n$

⊛ donne $I_n = n!\,e - k_n$

Donc $k_{n+1} = (n+1)!\,e + 1 - (n+1)\left[n!\,e - k_n\right]$

$k_{n+1} = \cancel{(n+1)!\,e} + 1 - \cancel{(n+1)!\,e} + (n+1) k_n$

$k_{n+1} = 1 + (n+1) k_n$

④ b) $k_1 = 1!\,e - I_n = e - I_1 = e - (-2 + e) = 2$

Soit $P(n)$ la propriété : $k_n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Pour $n = 1$, $k_1 = 2$ et $2 \in \mathbb{N}$ Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier non nul fixé, tel que $P(n)$ vraie

Mq : $\underbrace{k_n \in \mathbb{N}}_{\text{H.de R.}}$

Or 4)a) : $k_{n+1} = 1 + (n+1) k_n$

$n+1 \in \mathbb{N}$ et par H.R. $k_n \in \mathbb{N}$

Donc $(n+1) k_n \in \mathbb{N}$, donc $1 + (n+1) k_n \in \mathbb{N}$

Donc $P(n+1)$ est vraie $k_{n+1} \in \mathbb{N}$

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, k_n \in \mathbb{N}$

4) c) $k_n = n!\,e - I_n$

Donc : $n!\,e = \underbrace{k_n}_{\in \mathbb{N}\text{, d'après 4)b)}} + I_n$

Rappel : q. 2)b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

Donc si $n \geqslant 2$: $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$

$n \geqslant 2$ donc $n+1 \geqslant 3$:

donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{3}$

$0 \leqslant \frac{e}{n+1} \leqslant \frac{e}{3} \approx 0{,}9 < 1$

Donc $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$

Donc $0 < I_n < 1$ donc $I_n \notin \mathbb{N}$

Par suite comme : $n!\,e = k_n + I_n$ avec $k_n \in \mathbb{N}$ et $I_n \notin \mathbb{N}$

on a : $k_n + I_n \notin \mathbb{N}$

Donc $n!\,e \notin \mathbb{N}$

5) a) $p ; q$ = entiers non nuls

n entier avec $n \geqslant q$

$\Rightarrow$ Or $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times q \times \ldots \times n$

Donc : $\frac{n!}{q} = \underbrace{1 \times 2 \times \ldots \times q-1 \times (q+1) \times \ldots \times n}_{\text{entier car produit d'entiers}}$

Donc $\frac{n!}{q} \in \mathbb{N}$

Or $p \in \mathbb{N}$, donc $\frac{n!\,p}{q} \in \mathbb{N}$. car le produit de 2 entiers est entier

b) Spq : e soit rationnel (= quotient de 2 entiers)

Donc $e = \frac{p}{q}$

Donc : $n!\,e = \frac{n!\,p}{q}$

D'après 4) c) : $n!\,e \notin \mathbb{N}$, et 5) a) $\frac{n!\,p}{q} \in \mathbb{N}$

Ainsi $n!\,e$ égal à un entier donc $n!\,e \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Contradiction

Ainsi e n'est pas rationnel.