« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. » Eric Temple Bell

Chapitre IX — Fonction logarithme népérien

I – Généralités

On sait que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :

Donc, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet……………………………

Définition

Soit ***a* un réel strictement positif.**

♥On appelle logarithme népérien de a, noté $\boldsymbol{ln(a)}$, ***l'unique* réel solution de l'équation :** $\boldsymbol{e^x = a}$***, d'inconnue x.*** ♥

Conséquences

La fonction logarithme népérien, notée ***ln***, est définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$, et à tout réel x strictement positif, elle associe le réel $ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.

$ln :]0\ ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto ln(x)$ avec par définition : $\boxed{e^{ln(x)} = x}$.

Important : On a donc : ♥♥ $\boxed{x>0 \text{ et } y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y}$ ♥♥

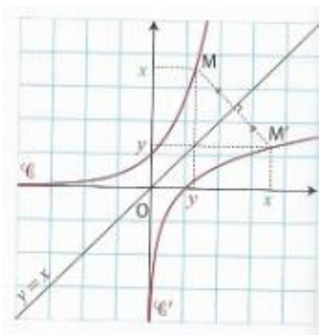
On a donc immédiatement : ♥♥♥

- Pour tout réel ***x strictement positif***, $e^{ln(x)}$ = …..
- Pour tout réel x, $\boldsymbol{ln(e^x)}$ = …….
- $\boldsymbol{ln(1)}$ = ………
- $\boldsymbol{ln(e)}$ = …………

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et celle de la fonction *ln* sont donc ……………………………………………………………

Illustration et justification :

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x > 0$ et y, dire que $M'(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y\,;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Pour tous réels a et b strictement positifs, on a l'équivalence : ♥♥ $\boxed{ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b}$. ♥♥

Exercice 1

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $ln(x) = -3$ b) $ln(x) = 4$ c) $e^x = 2$ d) $ln(x+5) = ln(4x-8)$ e) $3e^{2x} - 5 = 0$

✂---

II – Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème **(*relation fonctionnelle* de *ln*)**

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : ♥♥♥♥ ***ln(xy) = ………………………..***♥♥♥♥

Remarque : La fonction ln transforme donc……………………………………………………………….

(Soit l'action……………………………………………………………………………………………..).

Preuve :

♥♥♥ ***Propriétés importantes de la fonction ln*** ♥♥♥

1) Pour tout réel $x > 0$, $\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{x}\right)} =$ ………

2) Pour tous réels x et y strictement positifs, $\boldsymbol{ln\left(\frac{x}{y}\right)} =$ …………

3) Pour tout réel $x>0$ et pour tout entier relatif n, $\boldsymbol{ln(x^n)} =$ ………..

4) Pour tout réel $x>0$, $\boldsymbol{ln(\sqrt{x})} =$ …………………

Preuve :

Exercice 2

1) Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, chacune des expressions suivantes :

A = $\ln(6)$; B = $\ln(9)$; C = $\ln(\frac{2}{3})$; D = $\ln(\frac{1}{12})$; E = $\ln(\sqrt{12})$; F = $\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)$

2) Simplifier les écritures : G = $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ H = $\ln(e^4) + \ln(2e^{-1})$.

13 a) Démontrer que pour tout réel x,

$$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1).$$

b) Résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$.

14 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0.$$

15 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2x + 3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right).$$

✂--

III – Sens de variation de la fonction ln et conséquences

Propriété

1) ♥♥♥ $\ln$ est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$. ♥♥♥

2) $\ln$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, ♥♥♥ $(\ln)'(x)$= ……… ♥♥♥

3) La fonction $\ln$ est ……………………sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Preuve :

Conséquences : Etude du signe de $ln(x)$, pour $x > 0$:

- $ln(1) =$ …..
- $ln(x) < 0 \Leftrightarrow$…………………………..
- $ln(x) > 0 \Leftrightarrow$…………………………..

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $ln(x) < ln(y) \Leftrightarrow$……………….
  $ln(x) \geq ln(y) \Leftrightarrow$……………….

♥♥♥On retiendra donc que sur……………., la fonction ln est à valeurs ……………………, et que sur ……….., la fonction ln est à valeurs strictement………………♥♥♥

Preuve :

Illustration graphique : premier tracé de la courbe représentant la fonction ln.

Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = ln(4-2x)$.

$2a$) Etudier le signe de $u(x) = ln(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.
$2b$) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = x\,ln(x) - 3x$ sur $]0\;;\;+\infty[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$ln(x+3) + ln(x-2) \leq ln(6)$

✂--

Exercice 4 ***(Fondamental XXL, bac)***

a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $0{,}95^n \leq 10^{-8}$; $2^n > 10^6$.

b) n est un entier naturel non nul. On lance n fois d'affilée un dé cubique non truqué.

Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée p_n, de l'événement suivant noté A_n :
A_n : "Obtenir au moins une fois six lors des n lancers".

b') Déterminer, algébriquement, le nombre minimal de lancers à effectuer, pour que p_n soit supérieure à 0,99.

IV – Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln

Propriété	♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = \cdots$	*et*	$\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} ln(x) = \cdots$ ♥♥♥

Preuve :

✂---

Application

Donner le tableau de variation complet de la fonction ln, et tracer dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan sa courbe représentative.
On donnera les équations des tangente à C_{ln} aux points A(1 ; 0) et B(e ; 1).
Justifier que C_{ln} est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur $]0\ ;+\infty[$.

✂---

Propriété (croissances comparées)

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,(x)}{x} = \cdots$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln\,(x)}{x^n} = \cdots$

En d'autres termes, la fonction ln est négligeable devant l'identité au voisinage de $+\infty$.

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} x\,ln(x) = \cdots$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} x^n ln(x) = \cdots$

Preuve :
✂---

Exercice 5

1) Déterminer les limites suivantes : *a)* $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} (x-\ln(x))$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$ *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}$

2) Pout tout réel $x > 0$, $f(x) = ln(e^x+3x) - x$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = ln(1+\frac{3x}{e^x})$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{ln\,(1+h)}{h} = \cdots$ ♥♥(post-bac).

V- Fonctions composées et logarithme népérien

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = ln(u(x))$.

Alors g est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a : ♥♥♥ $g'(x) =$ ………..♥♥♥.

Preuve :

Exercice 6

1) Calculer la dérivée de : $f(x) = ln(2x^2 + 1)$. Préciser l'intervalle de dérivabilité de f.

2) Même question avec : $g(x) = ln(4+2e^x)$.

3) Même question avec : $h(x) = ln(e^{-x} + 1)$.

✂---

VI – Logarithme décimal (celui utilisé en Physique, Chimie, SVT, SI)

Définition : On appelle fonction logarithme décimal (ou logarithme à base 10), la fonction notée log, définie sur ………….. par : $log(x)$ = ………..

Remarque : $log(x)$ est donc égale au produit d'une constante multiplicative et de $ln(x)$.

Calculer :

$log(1)$ = ….

$log(10)$ = ….

$log(100)$ = ….

$log(10^n)$ = ….. où n est un entier naturel.

La fonction log a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, elle a aussi même sens de variation et mêmes limites aux bornes de l'ensemble de définition que la fonction ln. Montrons par exemple une de ces propriétés :

La fonction ***log*** est par exemple utilisée en Chimie : $\boldsymbol{pH = -\,log[H_3O^+]}$.

Par exemple, si on dilue 10 fois une solution de monoacide fort, que fait le pH de la solution initiale ?

La fonction log est aussi utilisée dans de nombreux domaines tels l'acoustique.

Une utilité de la fonction log en arithmétique : elle permet de déterminer le nombre de chiffres d'un entier écrit dans le système décimal.

__Rappel__ : Soit A entier naturel. Il existe un unique entier naturel n, tel que : ……………………..

__Remarque__ : l'écriture décimale de A est donc composée de ………… chiffres au total.

On a de plus :

Donc, le nombre total de chiffre de l'écriture décimale de A est égal à : …………………..

__Application__ : Combien de chiffre comporte l'écriture décimale de $A = 2^{2026}$?

__Exercice complémentaire__

__Complément__ : Fonctions puissances.

Pour tout réel $x > 0$, on définit, pour tout réel a, x^a par : $x^a = $ ……..

Etudier suivant les valeurs du réel a, le sens de variation et les limites de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^a$

✂--

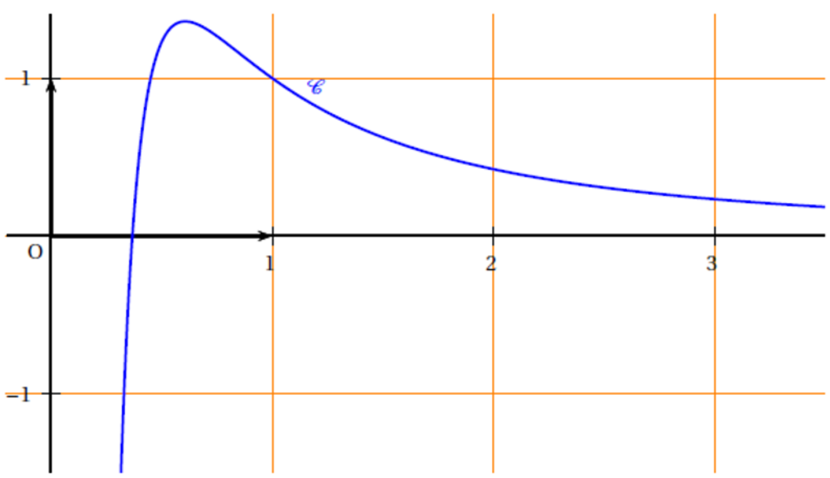
VII – Quelques exercices de type bac

__Exercice I__

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice II

Vrai ou Faux : justifier comme il se doit :

1)

Affirmation 1 : $\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^7)} = \frac{e^{\ln(2)+\ln(3)}}{e^{\ln(3)-\ln(4)}}$

2)

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 : $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente horizontale en un unique point nommé S_n dont l'ordonnée est égale à n^2.

Affirmation 3 : l'équation : $ln(x-1) - ln(x+2) = ln(4)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

✂---

Exercice III

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.

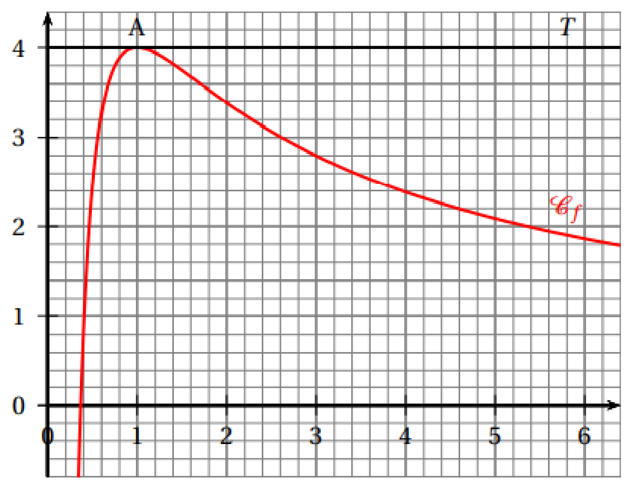
1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\,;\,\alpha]$ alors $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

✂---

Exercice IV Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A$(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

✂---

Exercice V

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\frac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3.

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction g est définie sur :

a. $\mathbb{R}$

c. $]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$

c. $]-2\,;\,+\infty[$

d. $]-2\,;\,1[$

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
Une équation de T est :

a. $y = (3-\mathrm{e})x$

b. $y = \left(\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$

c. $y = \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$

d. $y = (\mathrm{e}-1)x + 1$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à

a. $\dfrac{2}{3}$;

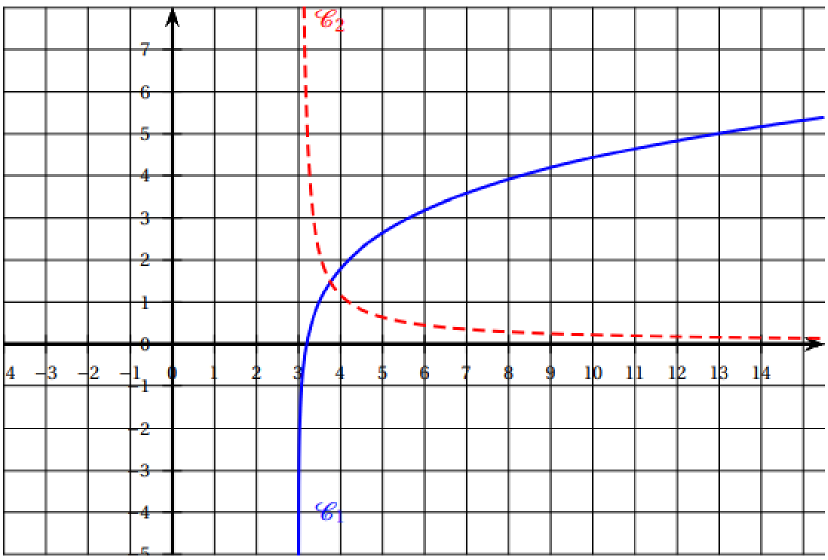
b. $+\infty$;

c. $-\infty$;

d. 0.

Exercice VI

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2-x-6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x)=\ln\left(x^2-x-6\right)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5;\ 6[$.

   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. **a.** Justifier que $f''(x)=\dfrac{-2x^2+2x-13}{\left(x^2-x-6\right)^2}$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

Exercice VII

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x)=1+x^2[1-2\ln(x)].$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

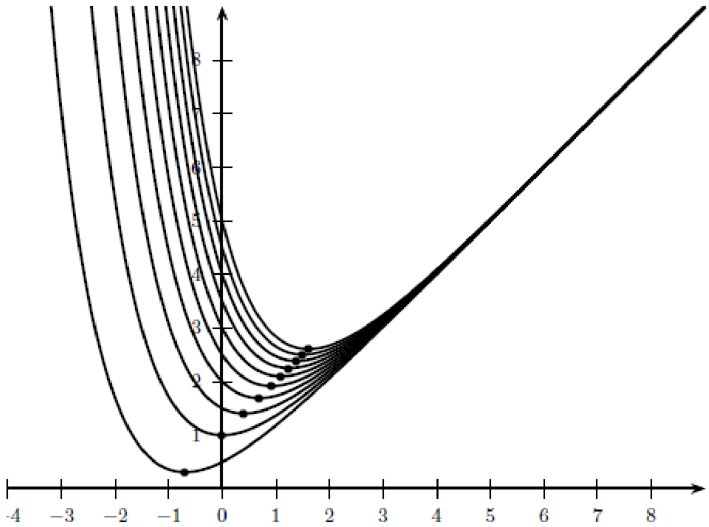
3. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x)=-4x\ln(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
   c. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Exercices supplémentaires au chapitre

I- Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

II- On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.

3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions sur R de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).