

Chapitre IX

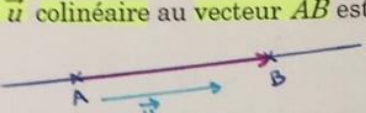
Equations de droites et systèmes

I-Vecteur directeur d'une droite et équations cartésiennes d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts appartenant à une même droite $\mathcal{D}$.

Tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Illustration :  $\vec{u}$ est porté par une droite parallèle à (AB) !

Remarque : une droite donnée admet donc une infinité de vecteurs directeurs deux à deux colinéaires.

On dit aussi que $\vec{u}$ dirige la droite $\mathcal{D}$ pour dire que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple : Dans un repère du plan, si $A(1; -4)$ et $B(-1; 2)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la

droite (AB) , tout comme $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = 2 - (-4) = 6 \end{pmatrix}$

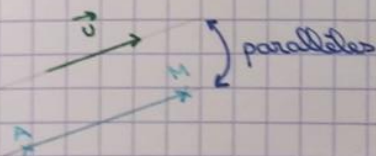
Propriété

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

c'est-à-dire tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

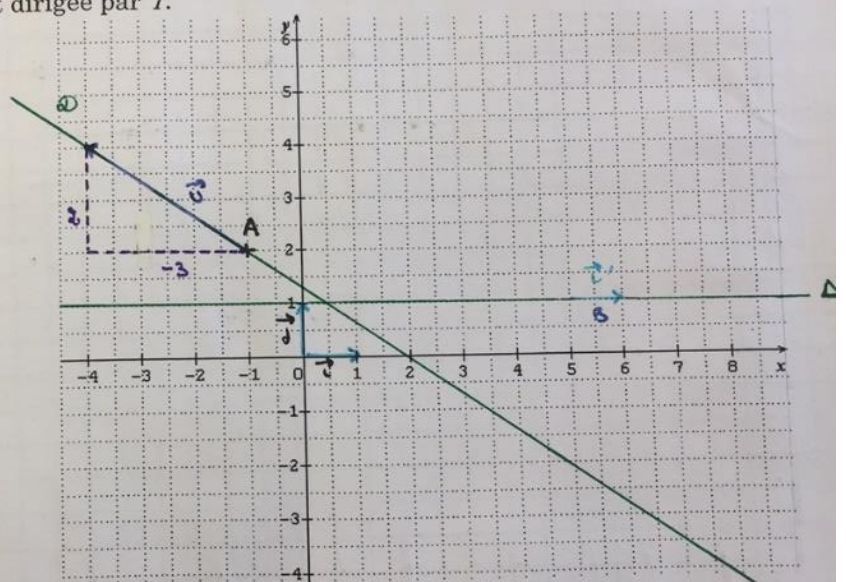


✕

Exercice 1 Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, construire :

a) La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(-1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) La droite Δ passant par $B(5 ; 1)$ et dirigée par $\vec{i}$.



Remarque importante

Soient $\mathcal{D}$ et Δ deux droites respectivement dirigées par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\mathcal{D}$ et Δ sont **parallèles** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont... **colinéaires**.....

$\mathcal{D}$ et Δ sont **sécantes** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas ... **colinéaires**.....

Dans l'exemple précédent, $\mathcal{D}$ et Δ sont **sécantes**... car :

$\mathcal{D}$ est dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Δ est dirigé par $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times 0 - 1 \times 2 = -2$$

$-2 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires donc $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes.

♥♥ **Théorème XI** ♥♥

Quelle que soit la droite $\mathcal{D}$ du plan, il existe trois réels a , b et c , tels que, pour tout point $M(x; y)$ du plan, M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si : $ax + by + c = 0$

De plus, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite $\mathcal{D}$.
équ^e cartésienne de la droite $\mathcal{D}$

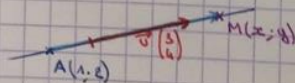
Preuve: En 2 tps: d'abord sur un cas particulier.

Ensuite de le cas général: se traite de la même façon avec $A(\alpha; \beta)$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$...

Cas particulier :

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1; 2)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

But: Donnons une équ^e de $\mathcal{D}$.



Soit $M(x; y)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$.

On a: $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ qui st colinéaires, ce qui revient à dire que :

$$\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 \quad \text{avec : } \vec{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A = x - 1 \\ y_M - y_A = y - 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \times 4 - (y-2) \times 3 = 0$$

$$\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

Conclusion: $M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 4x - 3y + 2 = 0$

On dit que $4x - 3y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Rq: Ici, par rapport à la propriété: $a = 4$; $b = -3$ et $c = 2$ car on a une équation de la forme:
 $ax + by + c = 0$.

Enfin $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{v} = \vec{u}$ et dirige $\mathcal{D}$.

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

L'équation: $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est appelée une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$
dont un vecteur directeur est: $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Remarques

- $M(x_M; y_M)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne: $ax + by + c = 0$ si et seulement si les coordonnées de M rendent vraies l'égalité précédente (on dit fréquemment que les coordonnées du point M vérifient l'équation: $ax + by + c = 0$), c'est-à-dire lorsqu'on a: $a \times x_M + b \times y_M + c = 0$.
- Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes: par exemple, $x + 2y + 5 = 0$ est une équation de droite, $4x + 8y + 20 = 0$ est une autre équation de cette même droite, tout comme: $0,5x + y + 2,5 = 0$ ou encore: $-3x - 6y - 15 = 0$ etc.....

Exercice 2

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne: $x + 2y - 3 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, ainsi que les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Construire la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous:

Prenons $A(1; 1)$: Ici $x_A = 1$ et $y_A = 1$ et $x_A + 2y_A - 3 = 1 + 2 \times 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

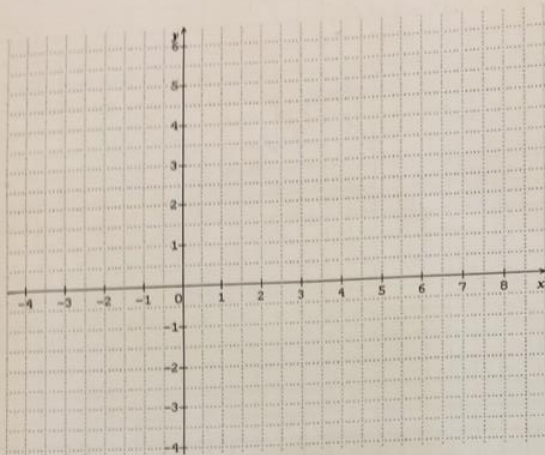
Donc $A(1; 1) \in \mathcal{D}$.

$B(7; -2)$: Ici $x_B = 7$; $y_B = -2$ et $x_B + 2y_B - 3 = 7 + 2 \times (-2) - 3 = 7 - 4 - 3 = 0$

Donc $B(7; -2) \in \mathcal{D}$.

$C(3; 0) \in \mathcal{D}$.

Rq: $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.



Rq: pr trouver les coordonnées d'un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, il suffit de fixer une valeur x de son choix et de déduire celle de y correspondante.

b) Le point $B(51; -24)$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? Même question avec $C(-150; 76)$.

b) $B(51; -24)$ Rappel: $B(x_B; y_B) \in \mathcal{D}$ si $x_B + 2y_B - 3 = 0$.

Ici, calculons: $x_B + 2y_B - 3 = 51 + 2 \times (-24) - 3 = 51 - 48 - 3 = 3 - 3 = 0$.

Donc $B(51; -24) \in \mathcal{D}$

c) $C(-150; 76)$

$$x_C + 2y_C - 3 = -150 + 2 \times 76 - 3 = -150 + 152 - 3 = 2 - 3 = -1.$$

Or $-1 \neq 0$, donc $C(-150; 76) \notin \mathcal{D}$

Exercice 3

Déterminer, par deux méthodes différentes, une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(-1; 2)$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Méthode 1: Soit $M(x; y) \in \mathcal{D}$ équivaut à dire que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ st colinéaires.

$$\text{càd: } M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \text{avec } \vec{AM} \begin{pmatrix} x_B - x_A = x - (-1) = x+1 \\ y_B - y_A = y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (x+1) \times 4 - (y-2) \times (-3) = 0 \Leftrightarrow 4(x+1) + 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 4x+4+3y-6=0$$

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 4x+3y-2=0$$

Conclusion: $\mathcal{D}$ a pr équ^e cartésienne: $4x + 3y - 2 = 0$.

Méthode 3: Rappel de cours: Une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ admet une équ^e cartésienne de la forme: $ax + by + c = 0$

Ici, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$: donc $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} -b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$.

Donc $\mathcal{D}$ a pr équ^e: $4x + 3y + c = 0$

Enfin, $A(-1, 2) \in \mathcal{D}$ dc: $4x_A + 3y_A + c = 0$

$$4 \times -1 + 3 \times 2 + c = 0$$

$$-4 + 6 + c = 0$$

$$2 + c = 0$$

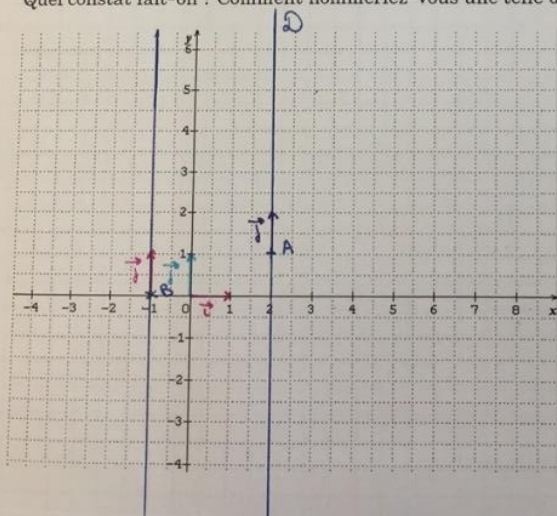
$$c = -2$$

Conclusion: $\mathcal{D}$ a pr équ^e cartésienne: $4x + 3y - 2 = 0$.

II - Equation réduite d'une droite

1) Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(2; 1)$ et dirigée par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La tracer dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Quel constat fait-on? Comment nommeriez-vous une telle droite?



Constat: $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées

(ou $\mathcal{D}$ est verticale)

2) Soit Δ la droite dont une équation cartésienne est: $x + 1 = 0$. Trouver un vecteur directeur de Δ et la construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Constat?

3) Soit d la droite dont une équation cartésienne est: $x + 2y - 1 = 0$.

Expliquer pourquoi cette droite est non parallèle à l'axe des ordonnées.

Isoler y dans l'équation cartésienne de d .

x

2) Δ a pr équ^a cartésienne $x+1=0$ (ou $1x+0y+1=0$)

de la forme : $ax+by+c=0$ avec $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$

D'après le cours, $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige Δ .

Donc ici $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige Δ ! Rq : $\vec{v} = \vec{j}$.

Suite : $B(-1; 0) \in \Delta$ d'où le tracé!

Libre de mettre ce qu'on veut car l'équ^a $x+1=0$ ne contient pas de y !

3) d la droite qui a pr équ^a : $x+2y-1=0$

de la forme : $ax+by+c=0$ avec $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$

M/ D'après le cours, $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dirige la droite d.

Donc $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige la droite d.

Or, $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige l'axe des ordonnées : Testons s'il y a colinéarité ou pas entre les valeurs $\vec{v}$ et $\vec{j}$.

$$\det(\vec{v}, \vec{j}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 1 \times 0 = -2.$$

$-2 \neq 0$, donc $\vec{v}$ et $\vec{j}$ ne st pas colinéaires.

Donc d n'est pas parallèle à l'axe des y .

M/ $K(1; 0) \in d$

$L(1; -3) \in d$

$x_K \neq x_L$, dc d non verticale!

$$x+2y-1=0$$

$$2y=1-x$$

$$y=\frac{1-x}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

↳ l'équ^a réduite de la droite d.

Propriété et définition

Dans un repère orthogonal :

- toute droite $\mathcal{D}$ **non verticale** du plan admet une unique équation de la forme : $y = mx + p$. Cette dernière équation est appelée **l'équation réduite** de la droite $\mathcal{D}$.
- Toute droite **verticale** admet une unique équation de la forme : $x = k$ où k est un réel.



L'équation est **réduite** lorsque **y est isolé**, c'est-à-dire $y = mx + p$.

Tous les points appartenant à une **même droite verticale ont la même abscisse**, d'où la forme des équations des droites verticales : $x = k$.

Preuve :

$\mathcal{D}$ est une droite du plan, donc elle admet comme équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

De plus, $\mathcal{D}$ n'est pas verticale, donc $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $\det(\vec{u}, \vec{j}) \neq 0$

Donc $\begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc : $-b \times 1 - a \times 0 \neq 0$ donc $-b \neq 0$, donc $b \neq 0$.

Par suite : $ax + by + c = 0$ équivaut à : $by = -ax - c$ et donc comme $b \neq 0$, on peut effectuer la division

par b : $y = \frac{-ax - c}{b} = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$.

En posant : $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on obtient : $y = mx + p$.

Si Δ est une droite verticale, alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige Δ qui admet donc pour équation cartésienne

$(-b=0 \text{ et } a=1 \text{ donc } a=1 \text{ et } b=0) : 1x + 0y + c = 0$ où c est un réel, donc $x + c = 0$ donc $x = -c$.

En posant $k = -c$, on obtient pour équation de Δ : $x = k$.

Remarques : toute droite du plan admet des équations cartésiennes. (de la forme : $ax + by + c = 0$)

Seules les droites **non verticales** du plan admettent une **équation réduite**. (de la forme : $y = mx + p$)

Une droite est **non verticale** dès qu'elle contient deux points n'ayant pas la même abscisse.

Fondamental : si une droite $\mathcal{D}$ a pour équation réduite : $y = mx + p$, alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$mx + p - y = 0$
 $mx - y + p = 0$
de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $\begin{cases} a = m \\ b = -1 \end{cases}$

Exemple

1) Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ qui a pour équation cartésienne : $-10x + 5y + 15 = 0$.

2) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ d'équation : $y = \frac{1}{3}x + 1$.

1) Δ a pr équ^a cartésienne : $-10x + 5y + 15 = 0$.

But : isoler y !

$$-10x + 5y + 15 = 0$$

$$5y = 10x - 15$$

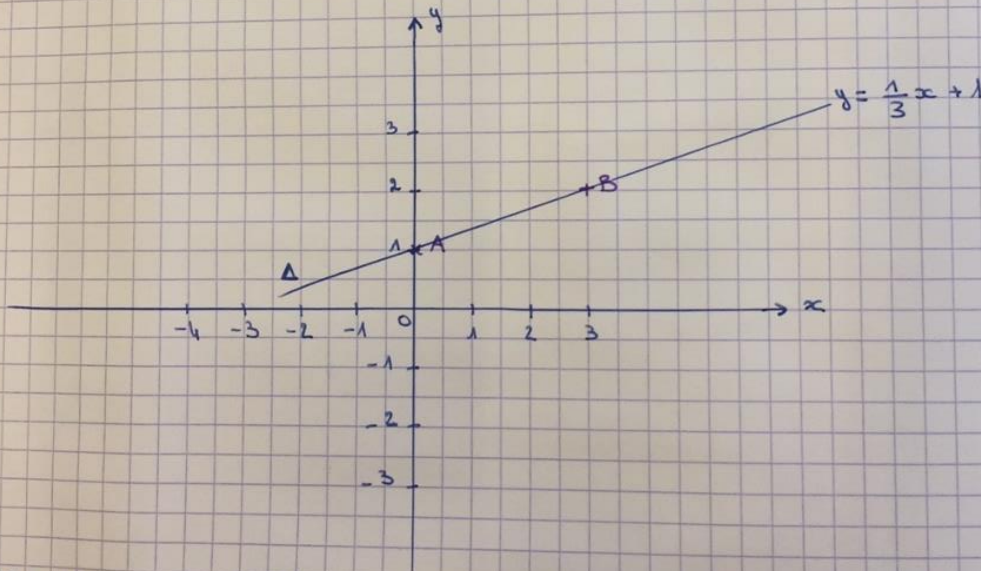
$$y = \frac{10x - 15}{5}$$

$$y = \frac{10}{5}x - \frac{15}{5}$$

$$y = 2x - 3$$

↳ équ^a réduite de la droite Δ

2) Δ a pr équ^a réduite : $y = \frac{1}{3}x + 1$ $\begin{cases} A(0; 1) \in \Delta \\ B(3; 2) \in \Delta \end{cases}$ (obtenus par calcul mental)



M₂: $A(0; 1) \in \Delta$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m = \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dirige A et aussi $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige Δ .
 $\vec{v} = 3\vec{u}$

×

Remarque : la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite : $y = mx + p$ est la courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$.

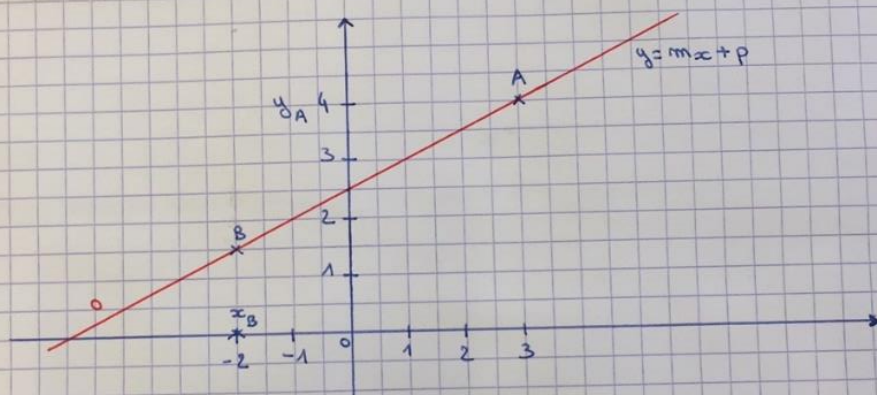
Propriété

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite : $y = mx + p$.

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points ^{distincts} appartenant à $\mathcal{D}$.

Alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\text{différence ordonnées}}{\text{différence abscisses}}$ A Prendre de la m^{ème} ordre

Preuve et illustration :



Preuve : $\mathcal{D}$ a pr équ^e réduite $y = mx + p$

$A(x_A; y_A) \in \mathcal{D}$ donc $y_A = mx_A + p$ ①

$y_B = mx_B + p$ ②

Donc : ② - ① : $y_B - y_A = (mx_B + p) - (mx_A + p)$

$y_B - y_A = mx_B + p - mx_A - p$

$y_B - y_A = mx_B - mx_A = m(x_B - x_A)$

Donc $\hat{=}$ A et B $\neq$ distincts, $x_A \neq x_B$, $x_B - x_A \neq 0$

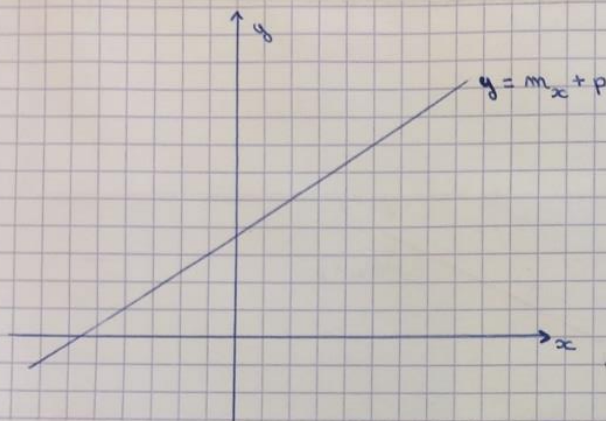
Donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Définition : m est appelé le **coefficient directeur** (ou encore la pente) de la droite $\mathcal{D}$.

La valeur de m ne dépend pas du choix effectué des deux points appartenant à $\mathcal{D}$ dans le calcul précédent.

p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite $\mathcal{D}$: c'est l'ordonnée du **point d'intersection** de $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées.

Illustration :



$$f(x) = m_x + p : \text{fonc}^\circ \text{ affine de}$$

La courbe est $\mathcal{D}$

$$f(a) = m \times a + p = p \text{ donc } K(C; p) \in \mathcal{D}$$

☞☞ On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des **droites non verticales**. Les droites verticales **n'ont pas** de coefficient directeur **ni** d'ordonnée à l'origine !

Exemple

Déterminer, pour chacune des deux droites suivantes, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

La droite $\mathcal{D}_1$ qui a pour équation réduite : $y = -3x + 1$

La droite $\mathcal{D}_2$ qui a pour équation réduite : $y = x - 2$

La droite $\mathcal{D}_3$ qui a pour équation réduite : $y = 3$.

La droite $\mathcal{D}_4$ qui a pour équation : $3x - 4y + 11 = 0$.

Ici $m = -3$ et $p = 1$

Ici $m = 1$ et $p = -2$

3) Ici $m = 0$ et $p = 3$ (car $y = 3 \Leftrightarrow y = 0x + 3$)

4) $\mathcal{D}$ a pr équation $3x - 4y + 11 = 0$

On se ramène d'abord à l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

Remarque fondamentale : les droites dont le coefficient directeur est égal à zéro sont **les droites horiz** (à l'axe des abscisses) et réciproquement, les droites **horizontales** ont pour coefficient directeur zéro.

Exercice 4

Déterminer l'équation réduite de la droite D qui passe par le point $K(1; -4)$ et qui a pour coefficient directeur -2 .

D a pr équ^a : $y = mx + p$ et d'après l'énoncé $m = -2$.

Donc D a pr équ^a réduite : $y = -2x + p$

$K(1; -4) \in D$ signifie que : $y_K = 2x_K + p$

$$-4 = -2 \times 1 + p$$

$$-4 = -2 + p$$

Donc $p = -4 + 2 = -2$ D a pr équ^a réduite $y = -2x - 2$.

Exercice 5

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1; 5)$ et $B(4; 10)$.

$D = (AB)$ avec $A(-1; 5)$ et $B(4; 10)$.

$x_A \neq x_B$ car $-1 \neq 4$, donc (AB) n'est pas verticale.

Elle admet donc pr équ^a réduite : $y = mx + p$

On cherche ici les valeurs de m et p :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 5}{4 - (-1)} = \frac{5}{5} = 1.$$

Par suite (AB) a pr équ^a réduite : $y = 1x + p = x + p$.

$B(4; 10) \in (AB)$ donc on a $y_B = x_B + p$

$$10 = 4 + p, \text{ donc } p = 10 - 4 = 6.$$

Donc (AB) a pr équ^a réduite : $y = x + 6$.

Exercice 6

Construire dans un repère la droite D qui passe par $A(-2198; -2202)$ et $B(1892; 1888)$.

Déterminons l'équa^o réduite de D : cela permettra de donner les coordonnées des nouveaux points sur D .

D n'est pas verticale car $x_A \neq x_B$ ($-2198 \neq 1892$), donc elle admet pr équa^o réduite :
 $y = mx + p$, avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1888 - (-2202)}{1892 - (-2198)} = \frac{4090}{4090} = 1$.

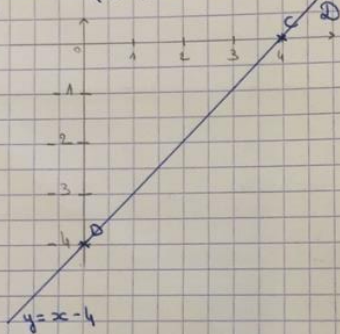
Par suite on a : $y = 1x + p = x + p$.

Enfin $B(1892; 1888) \in D$ donc $y_B = x_B + p$

$$1888 = 1892 + p \text{ donc } p = 1888 - 1892 = -4.$$

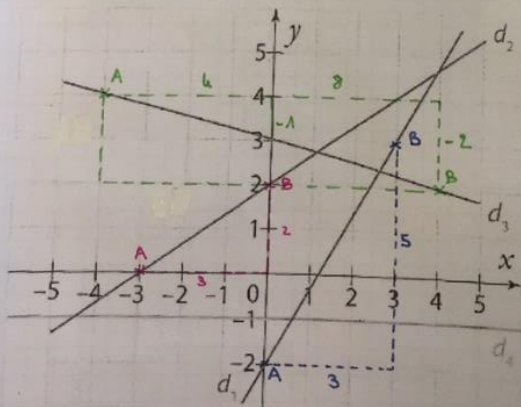
Donc D a pr équa^o réduite : $y = x - 4$.

Grâce à cette équa^o : $C(4; 0)$ et $D(0; -4) \in D$.



Exercice 7 (clé)

Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites tracées :



Soit m_x le coefficient directeur de la droite d_x :

M_1 : En utilisant la rela^o : $m_x = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

où $A(0; -2)$ et $B(3; 3)$.

$$\text{Donc } m_1 = \frac{3 - (-2)}{3 - 0} = \frac{5}{3}.$$

M_2 : En utilisant le calcul mental :

$$m_1 = \frac{y_{AB}}{x_{AB}} \quad \text{lecture graphique}$$

$$m_1 = \frac{5}{3}$$

Soit m_2 le coefficient directeur de la droite d_2 :

$$M_1 \quad m_2 = \frac{y_{AB}}{x_{AB}} = \frac{2}{3}$$

Soit m_3 le coeff. directeur de d_3 :

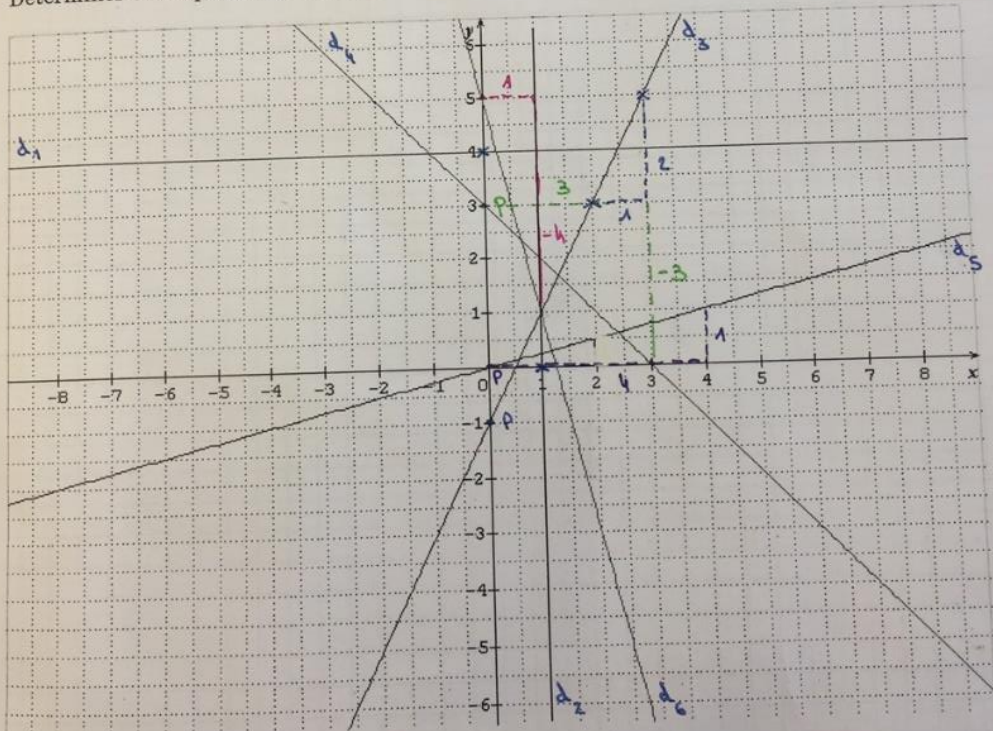
$$m_3 = \frac{y_{AB}}{x_{AB}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Soit m_4 le coeff. directeur de d_4 :

$$m_4 = 0 \quad \text{car } d_4 \text{ est "horizontale".}$$

Exercice 8 (clé)

Déterminer une équation de chacune des droites suivantes :



d_1 a pr équ^a réduite : $y = mx + p = x + p$: $\begin{cases} m=0 \text{ car } d_1 \text{ est horizontale} \\ p=4 \text{ (abscisse d'ordonnée à l'origine)} \end{cases}$

Donc d_1 a pr équ^a réduite : $y = 0x + 4$

$$y = 4$$

d_2 est verticale et a pr équ^a : $x = 1$.

d_3 a pr équ^e réduite : $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = \frac{2}{1} = 2 \\ p = -1 \end{cases}$

$y = 2x - 1$

d_4 a pr équ^e réduite : $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = \frac{-3}{3} = -1 \\ p = 3 \end{cases}$

Donc $y = -x + 3$

d_5 a pr équ^e réduite : $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = 0 \end{cases}$

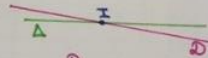
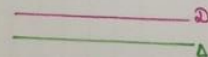
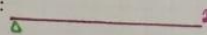
Donc $y = \frac{1}{4}x + 0$

$y = \frac{x}{4}$

d_6 a pr équ^e réduite : $y = mx + p$ avec $\begin{cases} m = \frac{-4}{1} = -4 \\ p = 5 \end{cases}$

Donc $y = -4x + 5$

Rappel: Lorsqu'on a deux droites D et Δ du plan, on sait depuis le collège que :

- D et Δ sont **sécantes** (et se coupent en un point) : illustration : 
- D et Δ sont strictement **parallèles** : illustration : 
- D et Δ sont **confondues** : illustration : 

Etudier la position relative de deux droites du plan, revient à déterminer dans lequel des trois cas rappelés ci-dessus on se trouve.

Propriété

Deux droites D et Δ du plan sont **parallèles** si et seulement si :

Elles **sont toutes les deux verticales** ou bien elles **ont le même coefficient directeur**.

Preuve :

1. Si D et Δ st verticales alors $D \parallel \Delta$ car les 2 droites sont ttes les 2 perpendiculaires à l'axe des abscisses.

2. Si D et Δ ont le m^{ême} coeff. directeur : D a pr équ^e réduite : $y = mx + p$
 Δ a pr équ^e réduite : $y = mx + \tilde{p}$

D est dirigé par le vect^{eur} $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ (# cours)

Δ est dirigé par le m^{ême} vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Donc D et Δ sont parallèles car dirigés par un m^{ême} vecteur directeur !

Remarque : si $\mathcal{D}$ a pour équation : $y = mx + p$ et Δ a pour équation : $y = m'x + p'$, alors :

- $\mathcal{D}$ et Δ sont strictement **parallèles** si et seulement si : $m = m'$... (m. coeff. directeur).....
- $\mathcal{D}$ et Δ sont **confondues** si et seulement si : $m = m'$ et $p = p'$
- $\mathcal{D}$ et Δ sont **sécantes** si et seulement si : $m \neq m'$... (coeff. directeur différents)

Exercice 9

Etudier la position relative des droites suivantes :

1) d_1 a pour équation : $y = 3x - 4$ et d_2 a pour équation : $y = 3x + 8$.

2) Δ_1 a pour équation : $y = 2x + 3$ et Δ_2 a pour équation : $6x - 3y + 9 = 0$. $\Rightarrow \Delta$ ceci n'est pas l'équa. réduite

3) D_1 a pour équation : $y = x$ et D_2 a pour équation : $y = -x + 1$.

1) Ici $m_1 = 3$ et $m' = 3$
 $p_1 = -4$ et $p' = 8$

Donc d_1 et d_2 sont strictement parallèles car : $\begin{cases} m = m' = 3 \\ p \neq p' \end{cases}$

2) Ici $m_1 = 2$ et $p_1 = 3$

Donnons l'équa. réduite de Δ_2 : $6x - 3y + 9 = 0$

$$6x + 9 = 3y$$

$$y = \frac{6x + 9}{3}$$

$$y = 2x + 3$$

Donc Δ_1 et Δ_2 sont confondues car m. coeff. directeur (2) et m. ordonnée à l'origine (3).

3) Ici $m_1 = 1$ et $p = 0$

$$m_2 = -1 \text{ et } p = 0$$

Donc D_1 et D_2 sont sécantes car coeff. directeur différent ($1 \neq -1$).

Remarque : lorsque deux droites dont on a des équations sont **sécantes**, il est assez naturel de chercher à déterminer les **coordonnées du point d'intersection** de ces deux droites. C'est l'un des objectifs du paragraphe suivant.

III - Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un exemple d'introduction :

On dispose d'un stock de stylos tous identiques, et de crayons tous identiques.

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€, tandis que 2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€.

A l'aide de ces informations, nous allons dégager une méthode qui va nous permettre de trouver à quel prix est vendu chaque stylo et chaque crayon.

Mise en équation : Soit x le prix d'un stylo et y celui d'un crayon.
$$\begin{cases} 4x + 1y = 10,40 \\ 2x + 3y = 9,20 \end{cases}$$

Cet exemple sera résolu dans la suite, après avoir dégagé des méthodes de résolution.

Définition

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, tout ensemble formé par **deux équations**, où figurent, dans chacune, **deux inconnues**, notées x et y , [les inconnues étant sans puissance]. On note avec une **accolade** un tel système.

Par exemple :
$$\begin{cases} 2x + 4y = -5 \\ x + 0,2y = 11,3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x + 5y - \sqrt{2} = 0 \\ -2x + 5y + 13,1 = 0 \end{cases}$$
 sont des systèmes de deux équations à

deux inconnues. On dira seulement **système** dans toute la suite.

Définition

On appelle **solution** du système, tout **couple** de réels $(x; y)$ tel que **chacune des deux égalités** figurant dans le système soit **vraie**. Attention à l'ordre des valeurs dans un couple !

On considère le système suivant :
$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Le couple $(3; 1)$ est-il solution du système précédent ? Même question avec le couple $(\frac{9}{7}; \frac{13}{7})$.

Méthode : On teste si chacune des 2 égalités (1) et (2) sont vérifiées (vraies) ou non lorsque $x=3$ et $y=1$.

• Prenons l'égalité (1) : $x + 2y - 5 = 0$

Pour $x=3$ et $y=1$: $3 + 2 \times 1 - 5 = 0$

$$0 = 0$$

L'égalité (1) est vraie lorsque $x=3$ et $y=1$.

De même prenons l'égalité : $3x - y - 2 = 0$

Pour $x=3$ et $y=1$: $3 \times 3 - 1 - 2 = 0$

$$6 = 0 : \text{égalité fautive !}$$

Donc $(3; 1)$ n'est pas solⁿ de l'équaⁿ : $3x - y - 2 = 0$, et par suite $(3; 1)$ n'est pas

soluⁿ du système :
$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

• Prenons l'égalité (1) : $x + 2y - 5 = 0$

Pour $x = \frac{9}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$: $x + 2y - 5 = 0$

$$\frac{9}{7} + 2 \times \frac{13}{7} - 5 = 0$$

$$\frac{9}{7} + \frac{26}{7} - \frac{5}{1} = 0$$

$$\frac{9}{7} + \frac{26}{7} - \frac{35}{7} = 0$$

$$0 = 0$$

L'égalité (1) est vraie lorsque $x = \frac{9}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$.

De m[^] prenons l'égalité (2) : $3x - y - 2 = 0$

Pour $x = \frac{9}{7}$ et $y = \frac{13}{7}$: $3 \times \frac{9}{7} - \frac{13}{7} - 2 = 0$

$$\frac{27}{7} - \frac{13}{7} - \frac{14}{7} = 0$$

$$\frac{14}{7} - \frac{14}{7} = 0$$

Le couple $\left(\frac{9}{7}, \frac{13}{7}\right)$ est solution du système :
$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Une question légitime : le couple $(\frac{9}{7}; \frac{13}{7})$ est-il le *seul* couple solution du précédent système ?

Définition

Résoudre un système, c'est *déterminer* tous les éventuels *couples de solution* du système.

Deux systèmes d'équations sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont le *même ensemble de solutions*.

On *transforme* un système en un *système équivalent* en faisant des opérations licites sur chacune de ses équations : ces opérations sont : ajout d'un même nombre dans chacun des membres d'une égalité, multiplication de chacun des membres par le même réel non nul, permutation des lignes du système, remplacement d'une ligne par la somme ou la différence des deux autres...

↳ But : isoler x et y .

❖ Résolution d'un système par la méthode de substitution

Résoudre le système :
$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Méthode de substitution : Étape 1 : On isole l'une des inconnues de l'une des équations du système (= celle qui génère le moins de calculs possibles) (4 choix possibles) :
Étape 2 : On remplace alors la valeur de cette inconnue par la quantité qui lui est égale de l'autre équation du système : cette dernière équation contient une seule inconnue : on sait la résoudre !
Et on termine la résolution du système.

1. J'isole y de la 1^{re} ligne : $y = 3x + 1$
2. On remplace y par $3x + 1$ de la 2^e ligne.

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + 3(3x + 1) + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 10x + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \times (-\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le couple $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ est l'unique sol^u de ce système.

On note : $S = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$

Exercice 10

Résoudre, par la méthode de substitution, le système suivant :
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 7x + y = 12 \end{cases}$$

Isoler x de la 1^{re} équation :
$$\begin{cases} x - 5y = 2 \\ 7x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 7(5y + 2) + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 35y + 14 + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5y + 2 \\ 36y + 14 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ 36y = 12 - 14 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5y + 2 \\ y = \frac{-2}{36} = -\frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \times \frac{-1}{18} + 2 = -\frac{5}{18} + \frac{36}{18} = \frac{31}{18} \\ y = -\frac{1}{18} \end{cases}$$

Donc $S = \{(\frac{31}{18}, -\frac{1}{18})\}$

Remarque : Si aucun des coefficients multiplicateurs des inconnues x ou y n'est égal à 1 ou -1, la méthode de substitution engendre souvent des calculs un peu plus lourds.

Ce serait par exemple le cas avec le système suivant :
$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 & L_1 \\ 5x + 6y - 11 = 0 & L_2 \end{cases}$$

Nous allons voir une autre méthode de résolution des systèmes, parfois très pratique et efficace.

♣ Résolution d'un système par la méthode de combinaison linéaire.

Méthode de combinaison :

1. On multiplie une ou les deux équations du système par des nb de telle sorte à faire apparaître, par exemple, le m. coefficient des x (ou bien le m. coeff. des y).
2. On soustrait membre à membre les deux égalités obtenues, on se retrouve alors avec une équation à une seule inconnue que l'on résout, et on déduit enfin la valeur de l'autre inconnue.

Application à la résolution de problèmes

Exercice 11

Résoudre le problème posé en introduction du paragraphe III.

Réolvons :
$$\begin{cases} 3x + 2y + 7 = 0 & L_1 \\ 5x + 6y - 11 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 3 \times L_1 \\ L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 9x + 6y + 21 = 0 \\ 5x + 6y - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1' \\ L_1' - L_2' \end{matrix} \quad \begin{cases} 9x + 6y + 21 = 0 \\ 4x + 32 = 0 \end{cases} \quad \text{car} \quad \underbrace{9x + 6y + 21 - (5x + 6y - 11)}_{9x + 6y + 21 - 5x - 6y + 11} = 0 - 0$$

$$\underbrace{9x + 6y + 21 - 5x - 6y + 11}_{4x + 32} = 0$$

$$\begin{cases} 4x = -32 \\ 9x + 6y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-32}{4} = -8 \\ 9x(-8) + 6y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ -72 + 6y + 21 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -8 \\ 6y - 51 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{17}{2} \\ 3x + 24 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = -24 \\ y = \frac{17}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-24}{3} = -8 \\ y = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-8; \frac{17}{2} \right) \right\}$$

Réolvons :
$$\begin{cases} 4x + 1y = 10,40 \\ 2x + 3y = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ 2x + 3y = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ 2x + 3(10,40 - 4x) = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ 2x + 31,2 - 12x = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,4 - 4x \\ 31,2 - 10x = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,4 - 4x \\ 10x = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,4 - 4x \\ x = \frac{22}{10} = 2,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2,2 \\ y = 10,4 - 4 \times 2,2 \end{cases}$$

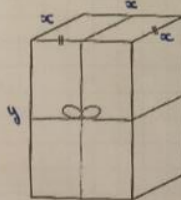
$$\begin{cases} x = 2,2 \\ y = 10,4 - 8,8 = 1,60 \end{cases}$$

$$S = \{(2,2; 1,60)\}$$

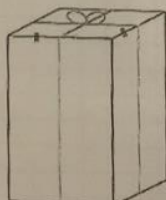
Conclusion : chaque stylo coûte 2,20€
chaque crayon coûte 1,60€

Exercice 12

Un paquet a la forme d'un parallélépipède ayant deux faces carrées.



1^{re} façon



2^e façon

- ① Pour le ficeler selon la 1^{re} façon, il faut 3 m de ficelle en comptant 46 cm pour un nœud.
- ② Pour le ficeler selon la 2^e façon, il faut 3,3 m de ficelle en comptant toujours 46 cm pour un nœud.

Quelles sont les dimensions du paquet ?

Soit des inconnues : soit x la longueur des 2 de la base carrée et y la hauteur du pavé droit.

$$\textcircled{1} 6x + 2y + 46 = 300 \quad (\text{unité : cm donc } 3\text{ m} = 300\text{ cm})$$

$$\textcircled{2} 4x + 4y + 46 = 330$$

De on a le système suivant :

$$\begin{cases} L_1: 6x + 2y + 46 = 300 \\ L_2: 4x + 4y + 46 = 330 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \div 2: 3x + y + 23 = 150 \\ L_2 \div 2: 2x + 2y + 23 = 165 \end{cases}$$

On procède par substitution :

$$\begin{cases} y = -3x + 150 - 23 = -3x + 127 \\ 2x + 2(-3x + 127) + 23 = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 127 \\ 2x - 6x + 254 + 23 = 165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x + 127 \\ -4x + 277 = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 127 \\ -4x = 165 - 277 = -112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 127 \\ x = 28 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = \frac{-112}{-4} = 28 \\ y = -3 \times 28 + 127 = -84 + 127 = 43 \end{cases}$$

$$S = \{(28, 43)\}$$

Conclusion : la base carrée a 28 cm de $\hat{c}$ et la hauteur du pisse droit est 43 cm.

Remarque importante : lien entre résolution de système et équations de droites.

$$\text{Considérons le système } S : \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Soit D_1 la droite d'équation cartésienne : $3x - y + 1 = 0$ et D_2 la droite d'équation : $x + 3y + 2 = 0$.
Un point $M(x, y)$ appartient à D_1 et D_2 si et seulement si le couple (x, y) formé par ses coordonnées est solution du système S .

Ainsi, résoudre le système S revient géométriquement à déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des droites D_1 et D_2 .

Dans les exercices, il sera assez naturel de d'abord prévoir avant de résoudre le système s'il a une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Propriété

On suppose que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$ et on s'intéresse au système (S) $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d et $a'x + b'y + c' = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d' .

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d , $\vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d' .

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' - (-b')a = ab' - a'b.$$

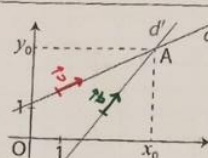
La nullité ou non nullité du déterminant précédent nous permet de dire :

1^{er} cas :

$\det(\vec{u}; \vec{v})$

$ab' - a'b \neq 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



d et d' sont sécantes en un point $A(x_0; y_0)$.

Le système (S) a un seul couple solution : $(x_0; y_0)$.

$\mathcal{S} = \{(x_0; y_0)\}$

2^{ème} cas : $ab' - a'b = 0$.

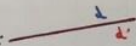
Donc $\det \vec{u}$ sont colinéaires.

d et d' sont parallèles au sens large.

Plus précisément : si le tableau suivant est un tableau de proportionnalité, alors les droites d et d' sont confondues.

a	b	c
a'	b'	c'

$\times R$

Illustration : 

Sinon elles sont strictement parallèles.

Illustration : 

Exercice 13

Soit d_1 la droite d'équation cartésienne : $2x + y + 5 = 0$ et d_2 la droite d'équation cartésienne $3x + 4y - 2 = 0$.

Etudier la position relative de ces deux droites en étant le plus précis possible !

d_1 a pr équ^a cartésienne $2x + y + 5 = 0$, de la forme $ax + by + c = 0$ avec $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=5 \end{cases}$

Donc $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b=-1 \\ a=2 \end{pmatrix}$ dirige d_1 .

d_2 a pr équ^a cartésienne $3x + 4y - 2 = 0$, de la forme $ax + by + c = 0$ avec $\begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=-2 \end{cases}$

Donc $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -b=-4 \\ a=3 \end{pmatrix}$ dirige d_2 .

on calcule $\det(\vec{v}_1; \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \times 3 - 2 \times (-4) = -3 + 8 = 5$

Donc $\det(\vec{v}_1; \vec{v}_2) \neq 0$, donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ non colinéaires, donc d_1 et d_2 sont sécantes.

Soit $K(x; y)$ le point d'intersection des droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 & (\text{traduit que } K \in d_1) \\ 3x + 4y - 2 = 0 & (\text{traduit que } K \in d_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 5 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 5 \\ 3x + 4(-2x - 5) - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 5 \\ 3x - 8x - 20 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 5 \\ -5x - 22 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 5 \\ -5x = 22 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 5 \\ x = \frac{22}{-5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{22}{-5} \\ y = -2 \times \frac{22}{-5} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{22}{-5} \\ y = \frac{-44}{-5} - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{22}{-5} \\ y = \frac{44}{5} - \frac{5}{1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{22}{-5} = -4,4 \\ y = \frac{39}{5} = 7,8 \end{cases}$$

$$S = \{(-4,4; 3,8)\}$$

d_1 et d_2 se coupent en $K(-4,4; 3,8)$.

Exercice 11

1) Déterminez la fonc^o affine f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(3) = -1$ et $f(8) = 2$.

2) Déterminez la fonc^o affine g définie sur $\mathbb{R}$ et la courbe représentative passe par les points $A(2021; 4065)$ et $B(0; 3)$.

Rappel : f est une fonc^o affine lorsqu'on a : $f(x) = ax + b$ pr tout réel x .

Connaître les valeurs de a et b , c connaître la fonc^o f .

1) $f(x) = ax + b$ et $f(3) = -1$ revient à dire que : $a \times 3 + b = -1$.

$f(8) = 2$ revient à dire que : $a \times 8 + b = 2$.

Donc on a le système :

$$\begin{cases} 3a + b = -1 \\ 8a + b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 - 3a \\ 8a + b = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 - 3a \\ 8a + (-1 - 3a) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 - 3a \\ 5a - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 - 3a \\ 5a - 1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 - 3a \\ a = \frac{3}{5} = 0,6 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0,6 \\ b = -1 - 3 \times 0,6 = -2,8 \end{cases}$$

$$S = \{(0,6; -2,8)\} \quad \text{donc } g(x) = 0,6x - 2,8$$

2) $g(x) = ax + b$ car g est une fonc^e affine.

$A(2021; 4045) \in \mathcal{E}_g$ donc : $g(2021) = 4045$

Donc : $a \times 2021 + b = 4045$

De m[^] : $B(0; 3) \in \mathcal{E}_g$ donc : $g(0) = 3$

Donc : $a \times 0 + b = 3$

Donc : $b = 3$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} b = 3 \\ 2021a + b = 4045 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3 \\ 2021a + 3 = 4045 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2021a = 4045 - 3 = 4042 \\ b = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{4042}{2021} = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(2; 3)\}$$

Conclusion : $g(x) = 2x + 3$

3) R est la fonc^e affine telle que $R(2) = 4$ et $R(3) = 9$

a) Déterminer ce que vaut $R(4)$

b) $\mathcal{E}_h$ et la droite (d) d'équa^e : $y = x$ sont-elles parallèles ? Justifier.

3a) R est une fonc^e affine, donc $R(x) = ax + b$

$R(2) = 4$, donc : $a \times 2 + b = 4$

$R(3) = 9$, donc : $a \times 3 + b = 9$

Donc on a le système suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = 4 & L_1 \\ 3a + b = 9 & L_2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a + b - (2a + b) = 9 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 4 \\ a = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 4 - 2a = 4 - 2 \times 5 = 4 - 10 = -6 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{(5; -6)\}$$

$$\text{Donc } h(x) = 5x - 6$$

$$\text{Donc : } h(4) = 5 \times 4 - 6 = 14$$

b) $\mathcal{E}_h$ n'est autre que la droite d'équa^e réduite : $y = 5x - 6$

d a pr équa^e réduite : $y = x$

Car 2 droites n'ont pas la m[^]e coeff. directeur car $5 \neq 1$,

donc d et $\mathcal{E}_h$ sont sécantes, et donc non parallèles.