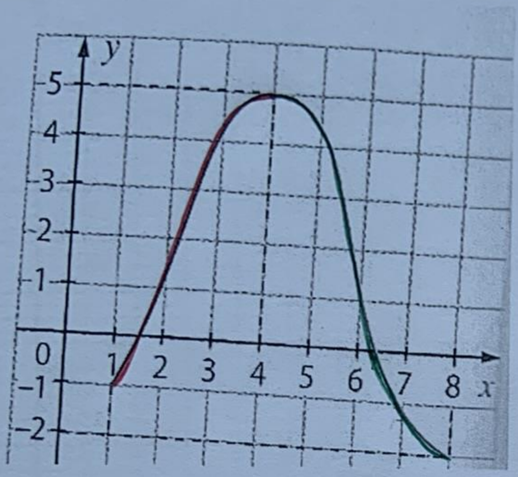
I – Sens de variation d'une fonction et tableau de variation

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8].



On observe que lorsque les valeurs prises par x augmentent en restant dans l'intervalle [1 ; 4], les valeurs $f(x)$ augmentent également : ceci se traduit graphiquement par une courbe *"ascendante"* sur l'intervalle [1 ; 4].

A contrario, lorsque les valeurs de x augmentent en restant dans l'intervalle [4 ; 8], les valeurs prises par f, c'est-à-dire les valeurs $f(x)$ diminuent : ceci se traduit graphiquement par une portion de courbe *"descendante"* sur l'intervalle [4 ; 8].

Nous allons rigoureusement définir ces phénomènes de courbes ascendantes, respectivement courbes descendantes.

Définition fondamentale

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f, et I un intervalle contenu dans D_f.

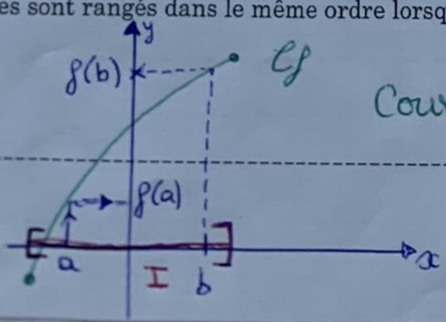
1) f est dite croissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ augmente.

Ceci se traduit rigoureusement par :

♥♥ ***f est croissante sur I lorsque :***
Pour tous réels a et b appartenant à I, si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$. ♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que celui des nombres a et b : une ***fonction croissante*** sur un intervalle ***conserve donc l'ordre dans les inégalités*** : antécédents et images sont rangés dans le même ordre lorsqu'on a une fonction croissante sur un intervalle !

Illustration :



Courbe d'une fonction croissante sur I.

2) f est dite décroissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ diminue.

Ceci se traduit rigoureusement par :

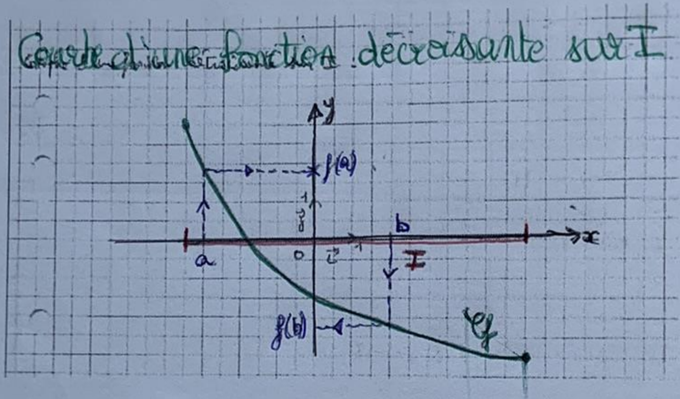
♥♥ ***f est décroissante sur I lorsque :***   ***Pour tous réels a et b appartenant à I, si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.*** ♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de celui des nombres a et b.

Une *fonction décroissante* sur un intervalle *change donc l'ordre dans les inégalités* :

Antécédents et images sont rangés dans l'ordre contraire lorsqu'on a une fonction décroissante sur un intervalle !

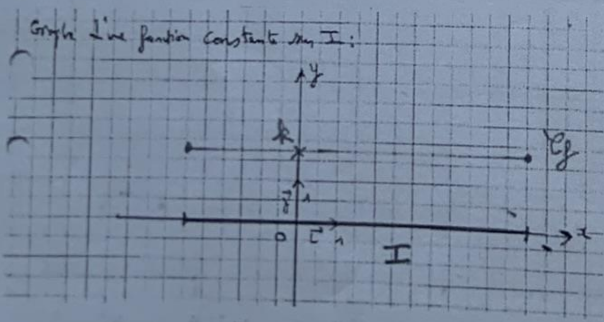
Illustration :



Définition

Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si les valeurs prises par f ont toutes la même valeur sur I, c'est-à-dire s'il existe un réel k, tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on ait : $f(x) = k$.

Illustration :



Dans le cas d'une fonction constante sur un intervalle I, C_f est donc une portion de droite parallèle à l'axe des abscisses !

Définition

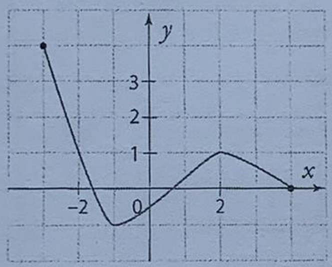
f est dite monotone sur l'intervalle I si *f* est soit croissante sur I soit décroissante sur I, c'est-à-dire si elle garde le même sens de variation sur tout l'intervalle I.

Définition

Etudier le sens de variation d'une fonction ***f*, c'est *déterminer les intervalles sur lesquels f croît* et ceux *sur lesquels f décroît.***

Exemple :

f est une fonction définie sur [−3 ; 4] dont voici la courbe ci-dessous.



Avec des phrases, décrivons le sens de variation de *f* sur [-3 ; 4] :

- f est décroissante sur [−3;−1]
- f est croissante sur [−1;2]
- f décroît sur [2;4]

On résume cette étude en construisant un tableau, nommé ***tableau de variation*** de la fonction *f* :

x	-3		-1		2		4
$f(x)$	4	↘	-1	↗	1	↘	0

Le tableau de variation de f sur [−3;4]

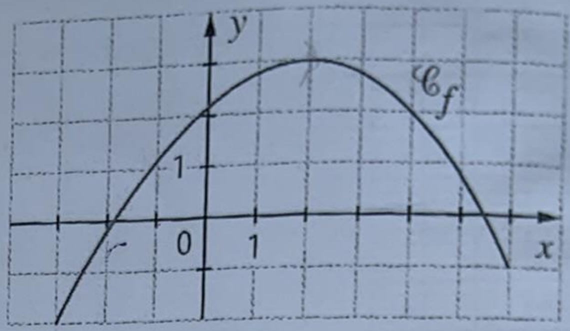
La première ligne du tableau contient les bornes de l'ensemble de définition de *f* et les éventuelles valeurs de *x* en lesquelles le sens de variation de *f* change.

La seconde ligne contient des flèches qui matérialisent le sens de variation de *f*, avec la convention suivante : une ***flèche ascendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction croissante*** sur ce même intervalle, et qu'une ***flèche descendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction décroissante*** sur ce dernier.
On met aussi, lorsque c'est possible, les images par *f* des valeurs mises dans la première ligne du tableau.

Exercice 1

1)

f est la fonction définie sur l'intervalle [–3 ; 6] par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ donnée ci-contre. Dresser le tableau de variation de *f*.



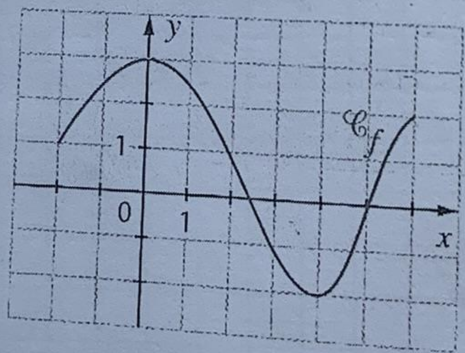
1)

x	-3		2		6
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1

2) On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction *f*.

1. Décrire par des phrases les variations de *f*.

2. Construire le tableau de variation de *f*.

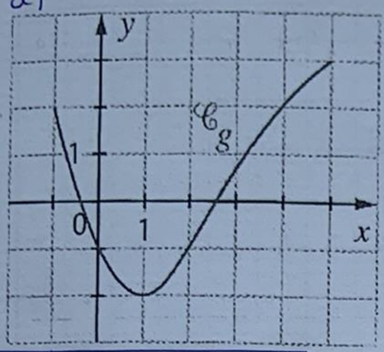


2) f croît sur [–2 ; 0] f croît sur [4 ; 6]
f décroît sur [0 ; 4]

x	-2		0		4		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	2

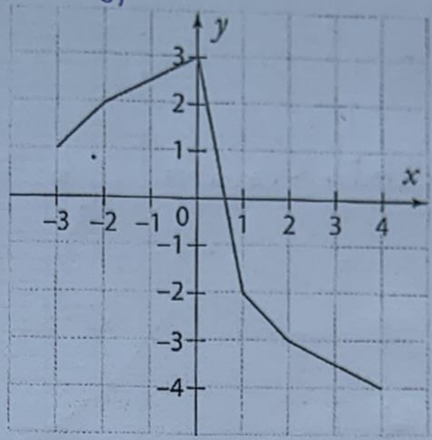
3) Dresser le tableau de variation des fonctions g et h sur leur ensemble de définition dont on donne les courbes représentatives C_g et C_h ci-dessous :

a)



x	-1		1		5
$g(x)$	2	↘	-2	↗	3

b)



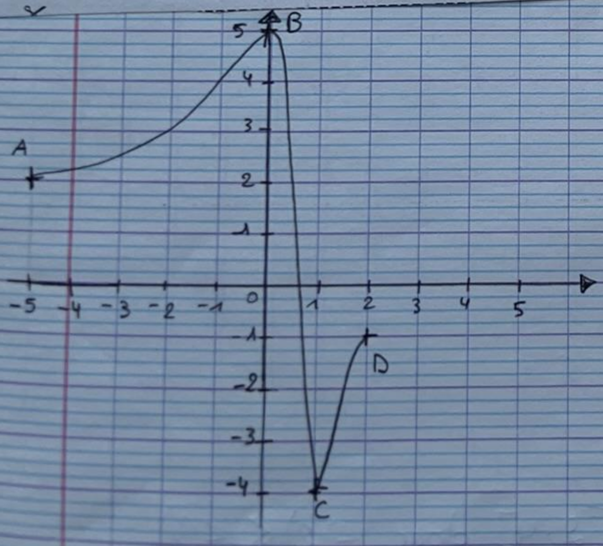
x	-3		0		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	-4

Exercice 2

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		0		1		2
$f(x)$	2	↗	5	↘	-4	↗	-1

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

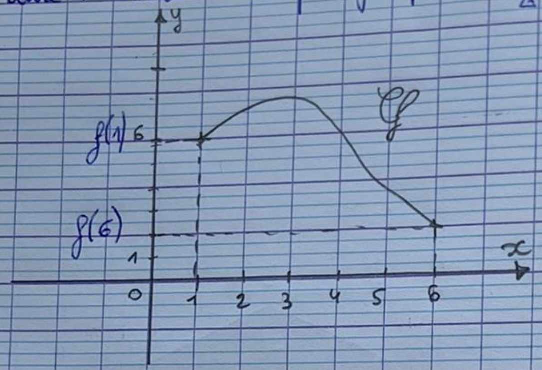


Exercice 3

f est une fonction définie sur l'intervalle [1 ; 6].

1. La proposition suivante est-elle vraie ?
« Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f est décroissante sur [1 ; 6]. »
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

1) Faux : Contre-exemple graphique :



2) « Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f décroît sur [1 ; 6] »
a pour réciproque : « Si f décroît sur [1 ; 6], alors $f(1) \geqslant f(6)$ »
→ Vrai car :
f décroît sur [1 ; 6] signifie que :
Pour tous réels a et b dans [1 ; 6], si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$
Prenons $a = 1$ et $b = 6$: $1 \leqslant b$ et $f(1) \geqslant f(6)$

Exercice 4

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4		1		5
$f(x)$	0	↘	-2	↗	3

a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.
b) Même question avec $f(-3)$ et $f(-2)$.
c) Peut-on comparer, avec les informations dont on dispose, les nombres $f(-1)$ et $f(2)$?

a) $2 \leqslant 4$ et f croît sur [2 ; 4] donc $f(2) \leqslant f(4)$

b) $-3 \leqslant -2$ et f décroît sur [−3 ; −2] donc $f(-3) \geqslant f(-2)$

c)

x	-4	-1	1	2	5
$f(x)$	0	$f(-1)$ ↘	-2	↗ $f(2)$	3

Non car sur $[-1; 2]$ f n'est pas monotone, donc on ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(2)$.

II – Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in$ I.

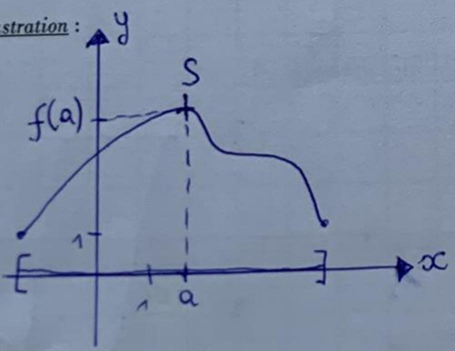
♥♥♥ *f admet un maximum sur I atteint lorsque $x = a$* si pour tout réel x appartenant à I, on a : $f(x) \leqslant f(a)$.♥♥♥

Le réel $f(a)$ est appelé le maximum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « haut possible »*.

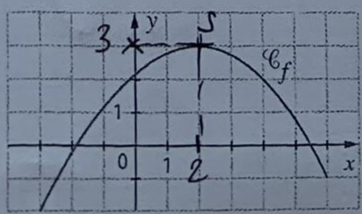
$f(a)$ = l'ordonnée du point S
est le maximum de f sur I
Ce maximum est atteint lorsque $x = a$

6

Illustration :



Exemple



Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :

Le maximum de f sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ est égal à 3...
Ce maximum est atteint lorsque x = 2

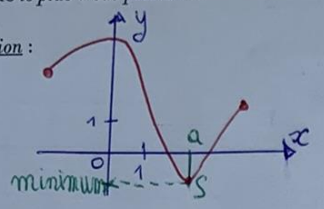
Remarque : attention à ne pas confondre la valeur du maximum de f sur un intervalle I, et la valeur de x en lequel ce maximum est atteint. Dire que f admet un maximum n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle.

Définition

Une fonction f admet un minimum sur un intervalle I atteint lorsque $x = a$, lorsque pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on a : $f(x) \geqslant f(a)$.

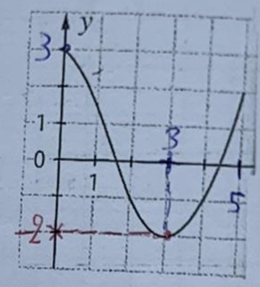
Le réel $f(a)$ est appelé le minimum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « bas possible »*.

Illustration :



le minimum de f sur I est égal à f(a)

Exemple : Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :



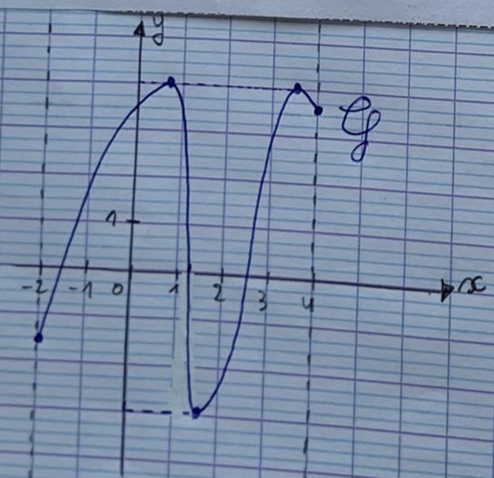
Le minimum de f sur [0;5] est égal à -2
Il est atteint lorsque $x = 3$.
Le maximum de f sur [0;5] est égal à 3
est atteint lorsque $x = 0$.

Exercice 5

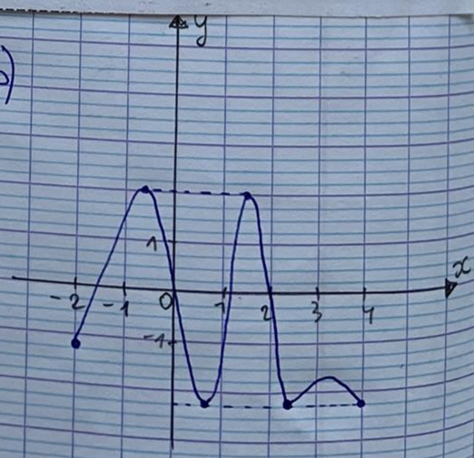
a) Tracer une courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 4] et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint une seule fois.

b) Tracer une courbe d'une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 4] et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint trois fois.

a)



b)



Remarque

Cet exercice illustre le fait que dans la définition donnée de maximum et de minimum, il n'y a pas nécessairement unicité de l'abscisse en laquelle ce maximum est atteint.

Définition : On appelle *extremum* d'une fonction f sur un intervalle I tout éventuel *minimum* ou *maximum* de f sur I.

Par exemple, sur le graphique de la page précédente, on peut dire que -2 et 3 sont des *extrema* de f sur l'intervalle [0 ; 5]. (*Pluriel d'extremum = extrema*).

Exercice 6

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		1		5
$f(x)$	-7	↗	2	↘	-6

Déterminer les extrema de f sur son ensemble de définition, en précisant pour quelle valeur ils sont atteints.

Les extrema de f sur $[-3;5]$ sont -7 et 2.
-7 est le minimum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x=-3$
2 est le maximum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x=1$.

Exercice 7 *Comment prouver qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle donné ?*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
2) Calculer $f(2)$ puis démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \leqslant f(2)$.
Qu'en déduisez-vous concernant la fonction f ?

Pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 4x$
1) Développons l'expression suivante :
$4-(x-2)^2 = 4-(x^2-2\times x\times 2+2^2) = \cancel{4}-x^2+4x\cancel{-4}$

ID2 $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$4-(x-2)^2 = -x^2+4x = f(x)$
Donc : $\boxed{f(x) = 4-(x-2)^2}$

2) Donc $f(2) = 4-\underbrace{(2-2)^2}_{0} = \boxed{4}$

*) Rappel : $a \leqslant b$ équivaut à : $a - b \leqslant 0$

Ici pour mq : $f(x) \leqslant f(2)$, on va prouver que $f(x) - f(2) \leqslant 0$

Or $f(x) - f(2) \overset{(\text{qu. 1})}{=} 4 - (x-2)^2 - 4 = -(x-2)^2$

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$, donc

$-(x-2)^2 \leqslant 0$ (car $-1 < 0$)

Donc $f(x) - f(2) \leqslant 0$

$\boxed{f(x) \leqslant f(2)}$

La précédente relation prouve que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque : $x = 2$. Ce maximum est égal à $f(2) = 4$

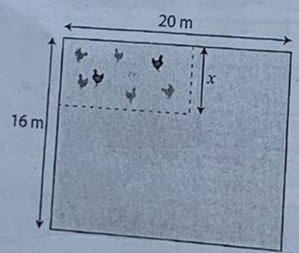
Exercice 8

Ghislaine a un terrain rectangulaire délimité par 4 murs.

Elle dispose de 12 mètres de grillage pour fabriquer un enclos rectangulaire au bout de son jardin afin d'y accueillir des poules et des coqs.

Elle a dessiné un plan de son futur enclos sur lequel le grillage est représenté par des pointillés.

8



Ghislaine aimerait que ses volailles disposent de la plus grande surface possible pour picorer.

On note x la largeur exprimée en mètres de son enclos, et $f(x)$ l'aire de l'enclos utilisant les 12 mètres de grillage.

a) A quel intervalle le réel x appartient-il ?

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c) Conjecturer, à l'aide de votre tablette, le maximum de f sur $[0 ; 12]$, et pour quelle valeur de x il est atteint.

d) Démontrer cette conjecture et donner à Ghislaine la largeur et longueur de l'enclos d'aire maximale.

a) $0 \leqslant x \leqslant 12$ Donc $x \in I$ où $I = [0 ; 12]$

b) $f(x)$ = aire de l'enclos $= L \times l$

<u>aire</u> : $l = x$ et $L = 12 - x$

$f(x) = (12 - x) \times x$

$f(x) = 12x - x^2$

$\boxed{f(x) = -x^2 + 12x}$

c) On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0;12]$

f admet pour maximum 36 et ce maximum est atteint lorsque $x = 6$

d) Mq pour tout réel x appartenant à $[0;12]$

$f(x) \leqslant f(6)$: (→ en prouvant que : $f(x) - f(6) \leqslant 0$)

Pour ce faire calculons :

$f(x) - f(6) \overset{⑤}{=} -x^2 + 12x - (-6^2 + 12 \times 6)$

$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x + 36 - 72$

$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x - 36$

$f(x) - f(6) = -(x^2 - 12x + 36) = -(x-6)^2$

→ IR2

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ici : $\begin{cases} a = x \\ b = 6 \end{cases}$

Or $(x-6)^2 \geqslant 0$, donc $-(x-6)^2 \leqslant 0$

Ainsi : $f(x) - f(6) \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant f(6)$

f admet un maximum sur $[0;12]$

atteint lorsque $x = 6$

Ghislaine doit donc construire un enclos de $6\,cm \times 6\,cm$ pour que son enclos ait une aire maximale de $36\,m^2$

b) $f(x)$ = aire de l'enclos $= L \times \ell$
aire : $\ell = x$ et $L = 12 - x$

$f(x) = (12 - x) \times x$
$f(x) = 12x - x^2$
$\boxed{f(x) = -x^2 + 12x}$

c) On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 12]$
f admet pour maximum 36 et ce maximum est atteint lorsque $x = 6$

d) Mq pour tout réel x appartenant à $[0; 12]$
$f(x) \leqslant f(6)$: (→ en prouvant que : $f(x) - f(6) \leqslant 0$)
Pour ce faire calculons :
$f(x) - f(6) \overset{⑤}{=} -x^2 + 12x - (-6^2 + 12 \times 6)$
$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x + 36 - 72$
$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x - 36$
$f(x) - f(6) = -(x^2 - 12x + 36) = -(x - 6)^2$
IR2

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
ici : $\begin{cases} a = x \\ b = 6 \end{cases}$

Or $(x-6)^2 \geqslant 0$, donc $-(x-6)^2 \leqslant 0$
Ainsi : $f(x) - f(6) \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant f(6)$
f admet un maximum sur $[0; 12]$
atteint lorsque $x = 6$
Ghislaine doit donc construire un enclos de 6 cm × 6 cm pour que son enclos ait une aire maximale de 36 m^2

*) Rappel : $a \leqslant b$ équivaut à : $a - b \leqslant 0$

Ici pour mq : $f(x) \leqslant f(2)$, on va prouver que $f(x) - f(2) \leqslant 0$

Or $f(x) - f(2) = 4 - (x-2)^2 - 4 = -(x-2)^2$ (≤ qu.1)

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$, $\times(-1)$, donc $-(x-2)^2 \leqslant 0$ (car $-1 < 0$)

Donc $f(x) - f(2) \leqslant 0$

$\boxed{f(x) \leqslant f(2)}$

La précédente relation prouve que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque : $x = 2$. Ce maximum est égal à $f(2) = 4$

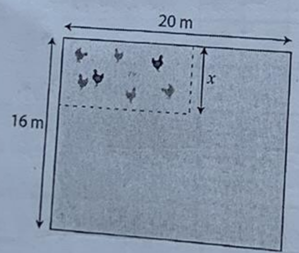
Exercice 8

Ghislaine a un terrain rectangulaire délimité par 4 murs.

Elle dispose de 12 mètres de grillage pour fabriquer un enclos rectangulaire au bout de son jardin afin d'y accueillir des poules et des coqs.

Elle a dessiné un plan de son futur enclos sur lequel le grillage est représenté par des pointillés.

8



Ghislaine aimerait que ses volailles disposent de la plus grande surface possible pour picorer.

On note x la largeur exprimée en mètres de son enclos, et $f(x)$ l'aire de l'enclos utilisant les 12 mètres de grillage.

a) A quel intervalle le réel x appartient-il ?

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c) Conjecturer, à l'aide de votre tablette, le maximum de f sur $[0 ; 12]$, et pour quelle valeur de x il est atteint.

d) Démontrer cette conjecture et donner à Ghislaine la largeur et longueur de l'enclos d'aire maximale.

a) $0 \leqslant x \leqslant 12$ Donc $x \in I$ où $I = [0 ; 12]$

Remarque

Cet exercice illustre le fait que dans la définition donnée de maximum et de minimum, il n'y a pas nécessairement unicité de l'abscisse en laquelle ce maximum est atteint.

Définition : On appelle *extremum* d'une fonction f sur un intervalle I tout éventuel *minimum* ou *maximum* de f sur I.

Par exemple, sur le graphique de la page précédente, on peut dire que -2 et 3 sont des *extrema* de f sur l'intervalle [0 ; 5]. (*Pluriel d'extremum = extrema*).

Exercice 6

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		1		5
$f(x)$	-7	↗	2	↘	-6

Déterminer les extrema de f sur son ensemble de définition, en précisant pour quelle valeur ils sont atteints.

Les extrema de f sur $[-3;5]$ sont -7 et 2.
-7 est le minimum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x=-3$
2 est le maximum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x=1$.

Exercice 7 *Comment prouver qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle donné ?*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
2) Calculer $f(2)$ puis démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \leqslant f(2)$.
Qu'en déduisez-vous concernant la fonction f ?

Pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 4x$
1) Développons l'expression suivante:
$4-(x-2)^2 = 4-(x^2-2\times x\times 2+2^2) = \cancel{4}-x^2+4x\cancel{-4}$
ID2 $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$4-(x-2)^2 = -x^2+4x = f(x)$
Donc : $\boxed{f(x) = 4-(x-2)^2}$

2) Donc $f(2) = 4-\underbrace{(2-2)^2}_{0} = \boxed{4}$

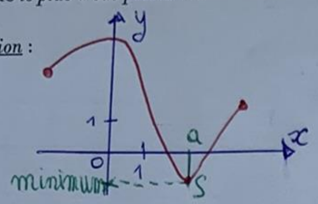
Remarque : attention à ne pas confondre la valeur du maximum de f sur un intervalle I, et la valeur de x en lequel ce maximum est atteint. Dire que f admet un maximum n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle.

Définition

Une fonction f admet un minimum sur un intervalle I atteint lorsque $x = a$, lorsque pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on a : $f(x) \geqslant f(a)$.

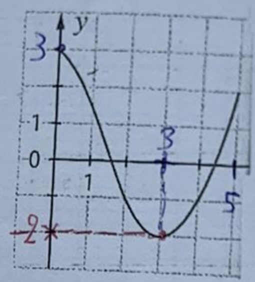
Le réel $f(a)$ est appelé le minimum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « bas possible »*.

Illustration :



le minimum de f sur I est égal à f(a)

Exemple : Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :



Le minimum de f sur [0;5] est égal à -2

Il est atteint lorsque x = 3.

Le maximum de f sur [0;5] est égal à 3

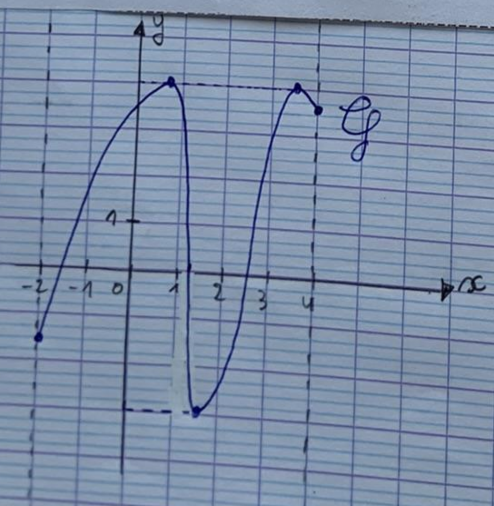
est atteint lorsque x = 0.

Exercice 5

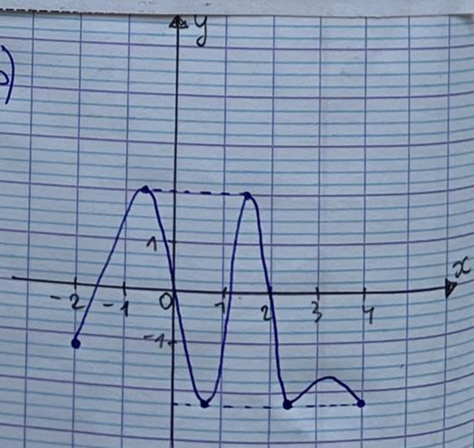
a) Tracer une courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 4] et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint une seule fois.

b) Tracer une courbe d'une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 4] et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint trois fois.

a)



b)



c)

x	-4		-1		1		2		5
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-1)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	3

Non car sur $[-1;2]$ f n'est pas monotone, donc on ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(2)$.

II – Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

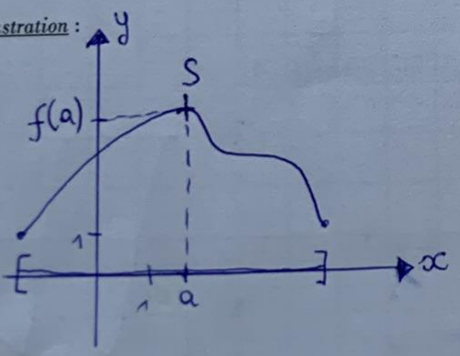
__*Définition*__ : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in$ I.

♥♥♥ ***f* <u>admet un maximum sur I atteint lorsque $x = a$</u>** si **<u>pour tout réel x appartenant à I</u>, on a : $f(x) \leqslant f(a)$.♥♥♥**

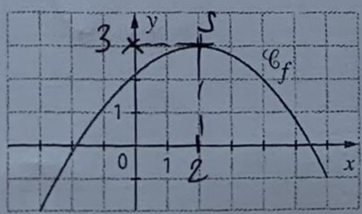
Le réel $f(a)$ est appelé le maximum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « haut possible »*.

$f(a)$ = l'ordonnée du point S
est le maximum de f sur I
Le maximum est atteint lorsque $x = a$

__*Illustration*__ :



__*Exemple*__



Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :

Le maximum de f sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ est égal à 3...
Ce maximum est atteint lorsque x = 2

Exercice 3

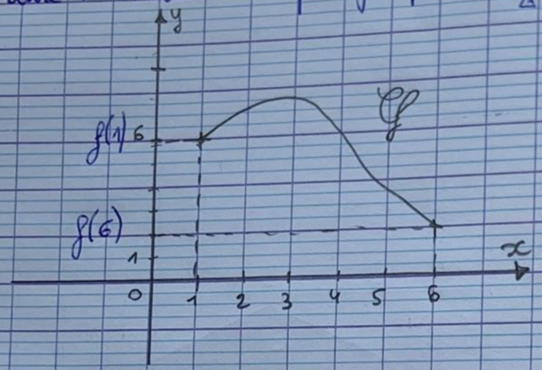
f est une fonction définie sur l'intervalle [1 ; 6].

1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f est décroissante sur [1 ; 6]. »

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

1) Faux : Contre-exemple graphique :



2) « Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f décroît sur $[1;6]$ »
a pour réciproque : « Si f décroît sur $[1;6]$, alors $f(1) \geqslant f(6)$ »
→ Vrai car :
f décroît sur $[1;6]$ signifie que :
Pour tous réels a et b dans $[1;6]$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$
Prenons $a = 1$ et $b = 6$: $1 \leqslant b$ et $f(1) \geqslant f(6)$

Exercice 4

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4		1		5
$f(x)$	0	↘	-2	↗	3

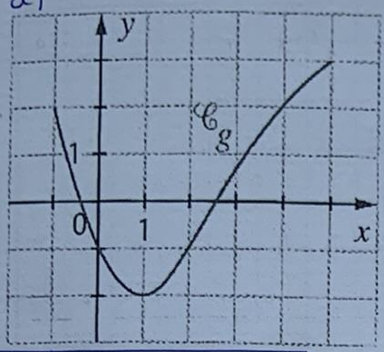
a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.
b) Même question avec $f(-3)$ et $f(-2)$.
c) Peut-on comparer, avec les informations dont on dispose, les nombres $f(-1)$ et $f(2)$?

a) $2 \leqslant 4$ et f croît sur $[2;4]$ donc $f(2) \leqslant f(4)$

b) $-3 \leqslant -2$ et f décroît sur $[-3;-2]$ donc $f(-3) \geqslant f(-2)$

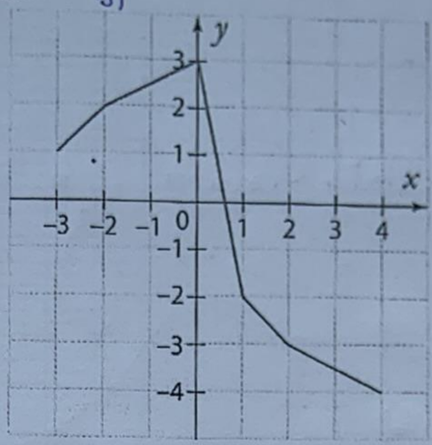
3) Dresser le tableau de variation des fonctions g et h sur leur ensemble de définition dont on donne les courbes représentatives C_g et C_h ci-dessous :

a)



x	-1		1		5
$g(x)$	2	↘	-2	↗	3

b)



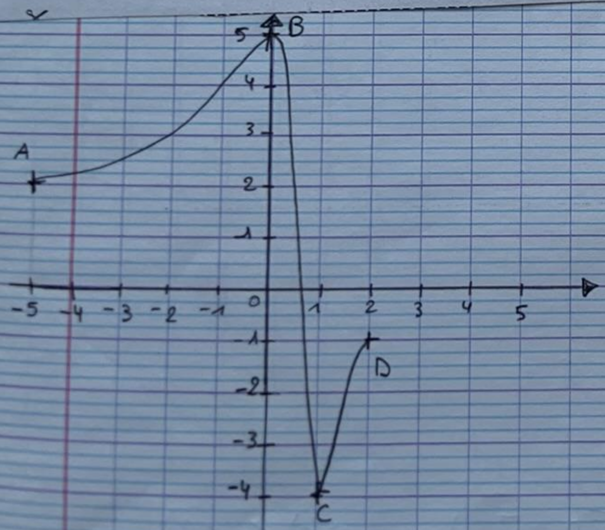
x	-3		0		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	-4

Exercice 2

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		0		1		2
$f(x)$	2	↗	5	↘	-4	↗	-1

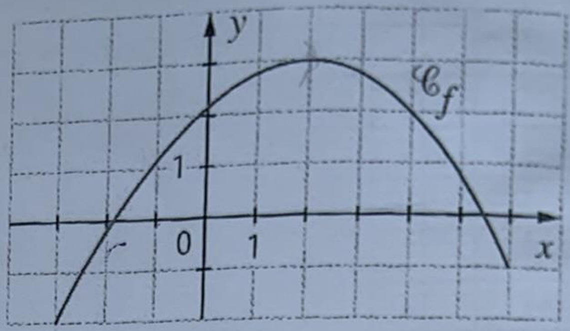
Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.



Exercice 1

1)

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;6]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ donnée ci-contre. Dresser le tableau de variation de f.



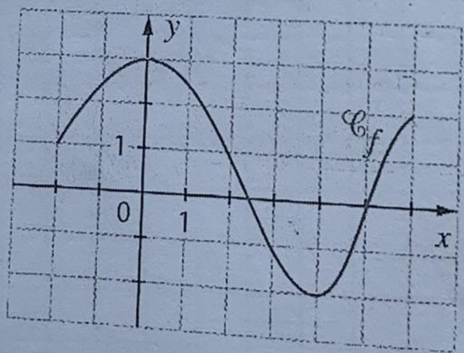
1)

x	-3	2	6
$f(x)$	-2 ↗	3 ↘	-1

2) On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.

1. Décrire par des phrases les variations de f.

2. Construire le tableau de variation de f.



2) f croît sur $[-2\,;0]$ f croit sur $[4\,;6]$
f décroit sur $[0\,;4]$

x	-2	0	4	6
$f(x)$	1 ↗	3 ↘	-2 ↗	2

Définition

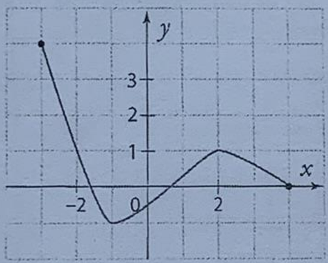
f est dite monotone sur l'intervalle I si *f* est soit croissante sur I soit décroissante sur I, c'est-à-dire si elle garde le même sens de variation sur tout l'intervalle I.

Définition

Etudier le sens de variation d'une fonction *f*, **c'est** ***déterminer les intervalles sur lesquels f croît et ceux sur lesquels f décroît.***

Exemple :

f est une fonction définie sur [–3 ; 4] dont voici la courbe ci-dessous.



Avec des phrases, décrivons le sens de variation de *f* sur [-3 ; 4] :

- f est décroissante sur [-3;-1]
- f est croissante sur [-1;2]
- f décroît sur [2;4]

On résume cette étude en construisant un tableau, nommé ***tableau de variation*** de la fonction *f* :

x	-3		-1		2		4
$f(x)$	4	↘	-1	↗	1	↘	0

Le tableau de variation de f sur [-3;4]

La première ligne du tableau contient les bornes de l'ensemble de définition de *f* et les éventuelles valeurs de *x* en lesquelles le sens de variation de *f* change.

La seconde ligne contient des flèches qui matérialisent le sens de variation de *f*, avec la convention suivante : une ***flèche ascendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction croissante*** sur ce même intervalle, et qu'une ***flèche descendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction décroissante*** sur ce dernier.
On met aussi, lorsque c'est possible, les images par *f* des valeurs mises dans la première ligne du tableau.

2) f est dite décroissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ diminue.

Ceci se traduit rigoureusement par :

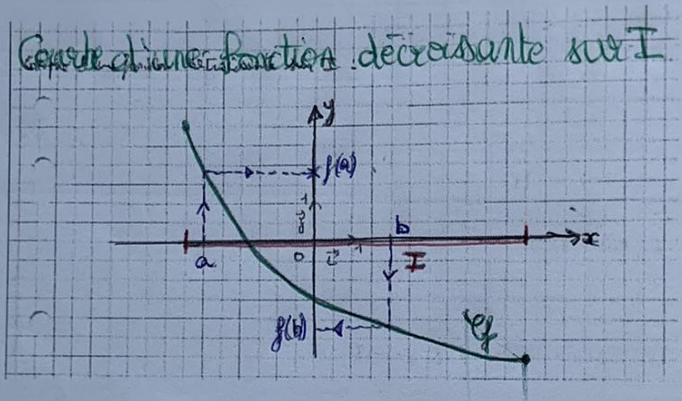
♥♥ ***f est décroissante sur I lorsque :***   ***Pour tous réels a et b appartenant à I, si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$.*** ♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de celui des nombres a et b.

Une *fonction décroissante* sur un intervalle *change donc l'ordre dans les inégalités* :

Antécédents et images sont rangés dans l'ordre contraire lorsqu'on a une fonction décroissante sur un intervalle !

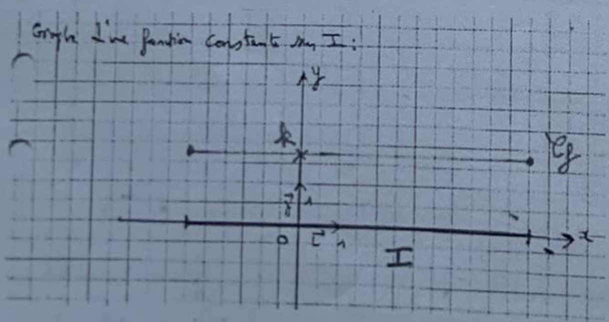
Illustration :



Définition

Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si les valeurs prises par f ont toutes la même valeur sur I, c'est-à-dire s'il existe un réel k, tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on ait : $f(x) = k$.

Illustration :



Dans le cas d'une fonction constante sur un intervalle I, C_f est donc une portion de droite parallèle à l'axe des abscisses !

b) $f(x)$ = aire de l'enclos $= L \times \ell$
aire : $\ell = x$ et $L = 12 - x$

$f(x) = (12-x) \times x$
$f(x) = 12x - x^2$
$\boxed{f(x) = -x^2 + 12x}$

c) On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0;12]$
f admet pour maximum 36 et ce maximum est atteint lorsque $x = 6$

d) Mq pour tout réel x appartenant à $[0;12]$
$f(x) \leqslant f(6)$: (→ en prouvant que : $f(x) - f(6) \leqslant 0$)
Pour ce faire calculons :
$f(x) - f(6) \overset{⑤}{=} -x^2 + 12x - (-6^2 + 12 \times 6)$
$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x + 36 - 72$
$f(x) - f(6) = -x^2 + 12x - 36$
$f(x) - f(6) = -(x^2 - 12x + 36) = -(x-6)^2$
→ IR2

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
ici : $\begin{cases} a = x \\ b = 6 \end{cases}$

Or $(x-6)^2 \geqslant 0$, donc $-(x-6)^2 \leqslant 0$
Ainsi : $f(x) - f(6) \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant f(6)$
f admet un maximum sur $[0;12]$
atteint lorsque $x = 6$
Ghislaine doit donc construire un enclos de $6\,cm \times 6\,cm$ pour que son enclos ait une aire maximale de $36\,m^2$

*) Rappel : $a \leq b$ équivaut à : $a - b \leq 0$
Ici pour mq : $f(x) \leq f(2)$, on va prouver que $f(x) - f(2) \leq 0$

(≤ qu. 1)

Or $f(x) - f(2) = 4 - (x-2)^2 - 4 = -(x-2)^2$

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geq 0$, $\times(-1)$, donc
$-(x-2)^2 \leq 0$ (car $-1 < 0$)

Donc $f(x) - f(2) \leq 0$

$\boxed{f(x) \leq f(2)}$

La précédente relation prouve que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque : $x = 2$. Ce maximum est égal à $f(2) = 4$

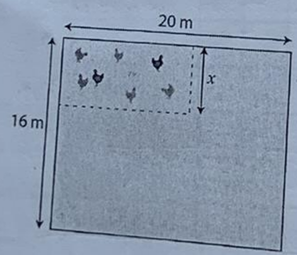
Exercice 8

Ghislaine a un terrain rectangulaire délimité par 4 murs.

Elle dispose de 12 mètres de grillage pour fabriquer un enclos rectangulaire au bout de son jardin afin d'y accueillir des poules et des coqs.

Elle a dessiné un plan de son futur enclos sur lequel le grillage est représenté par des pointillés.

8



Ghislaine aimerait que ses volailles disposent de la plus grande surface possible pour picorer.

On note x la largeur exprimée en mètres de son enclos, et $f(x)$ l'aire de l'enclos utilisant les 12 mètres de grillage.

a) A quel intervalle le réel x appartient-il ?

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c) Conjecturer, à l'aide de votre tablette, le maximum de f sur $[0 ; 12]$, et pour quelle valeur de x il est atteint.

d) Démontrer cette conjecture et donner à Ghislaine la largeur et longueur de l'enclos d'aire maximale.

a) $0 \leq x \leq 12$ Donc $x \in I$ où $I = [0 ; 12]$

Remarque

Cet exercice illustre le fait que dans la définition donnée de maximum et de minimum, il n'y a pas nécessairement unicité de l'abscisse en laquelle ce maximum est atteint.

Définition : On appelle $\boxed{\textit{extremum}}$ d'une fonction f sur un intervalle I tout éventuel *minimum* ou *maximum* de f *sur* I.

Par exemple, sur le graphique de la page précédente, on peut dire que -2 et 3 sont des *extrema* de f sur l'intervalle [0 ; 5]. (*Pluriel d'extremum = extrema*).

Exercice 6

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		1		5
$f(x)$	-7	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6

Déterminer les extrema de f sur son ensemble de définition, en précisant pour quelle valeur ils sont atteints.

Les extrema de f sur $[-3;5]$ sont -7 et 2.
-7 est le minimum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x = -3$
2 est le maximum de f sur $[-3;5]$
et il est atteint lorsque $x = 1$.

Exercice 7 *Comment prouver qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle donné ?*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
2) Calculer $f(2)$ puis démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \leqslant f(2)$.
Qu'en déduisez-vous concernant la fonction f ?

Pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 4x$
1) Développons l'expression suivante :
$4 - (x-2)^2 = 4 - (x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2) = \cancel{4} - x^2 + 4x \cancel{-4}$
ID2 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$4 - (x-2)^2 = -x^2 + 4x = f(x)$
Donc : $\boxed{f(x) = 4 - (x-2)^2}$

2) Donc $f(2) = 4 - \underbrace{(2-2)}_{0}{}^2 = \boxed{4}$

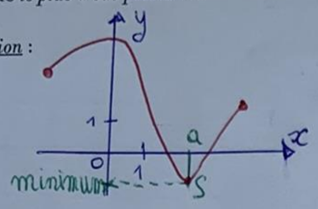
Remarque : attention à ne pas confondre la valeur du maximum de f sur un intervalle I, et la valeur de x en lequel ce maximum est atteint. Dire que f admet un maximum n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle.

Définition

Une fonction f admet un minimum sur un intervalle I atteint lorsque $x = a$, lorsque pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on a : $f(x) \geqslant f(a)$.

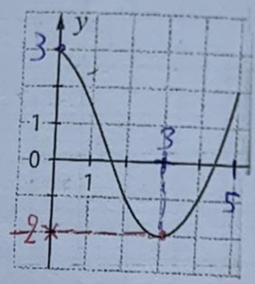
Le réel $f(a)$ est appelé le minimum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « bas possible »*.

Illustration :



le minimum de f sur I est égal à $f(a)$

Exemple : Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :



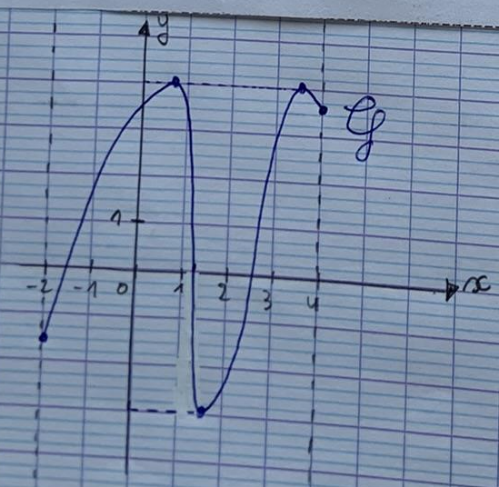
Le minimum de f sur $[0;5]$ est égal à -2.
Il est atteint lorsque $x = 3$.
Le maximum de f sur $[0;5]$ est égal à 3
est atteint lorsque $x = 0$.

Exercice 5

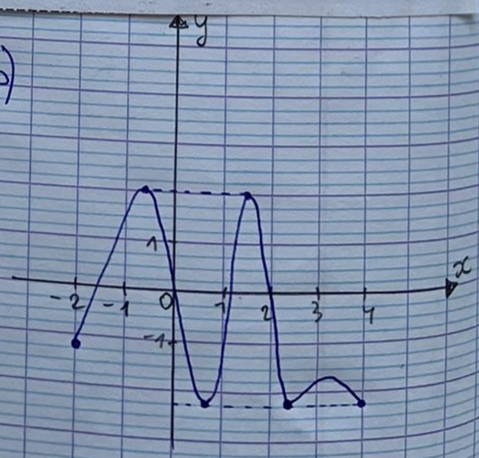
a) Tracer une courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint une seule fois.

b) Tracer une courbe d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint trois fois.

a)



b)



c)

x	-4	-1	1	2	5
$f(x)$	0 ↘	$f(-1)$	-2	↗ $f(2)$	3

Non car sur $[-1; 2]$ f n'est pas monotone, donc on ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(2)$.

II – Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

__*Définition*__ : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in$ I.

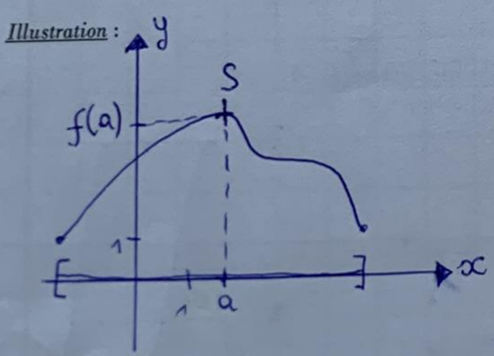
♥♥♥ ***f admet un maximum sur I atteint lorsque $x = a$*** si **pour tout réel x appartenant à I**, on a : $f(x) \leqslant f(a)$.♥♥♥

Le réel $f(a)$ est appelé le maximum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus « haut possible »*.

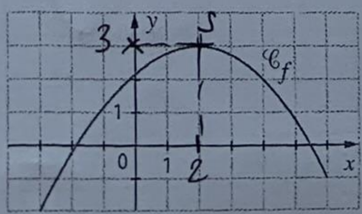
$f(a)$ = l'ordonnée du point S
est le maximum de f sur I
Ce maximum est atteint lorsque $x = a$

6

__*Illustration*__ :



__*Exemple*__



Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :

Le maximum de f sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ est égal à 3...
Ce maximum est atteint lorsque x = 2

Exercice 3

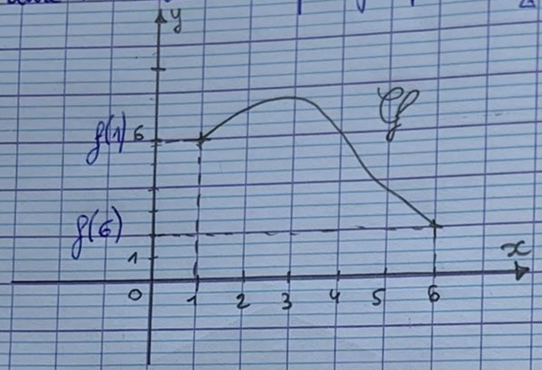
f est une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;6]$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f est décroissante sur $[1\,;6]$. »

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

1) Faux : Contre-exemple graphique :



2) « Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f décroît sur $[1;6]$ »

a pour réciproque : « Si f décroît sur $[1;6]$, alors $f(1) \geqslant f(6)$ »

→ Vrai car :

f décroît sur $[1;6]$ signifie que :

Pour tous réels a et b dans $[1;6]$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$

Prenons $a = 1$ et $b = 6$: $1 \leqslant b$ et $f(1) \geqslant f(6)$

Exercice 4

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4	1	5
$f(x)$	0 ↘	-2 ↗	3

a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.

b) Même question avec $f(-3)$ et $f(-2)$.

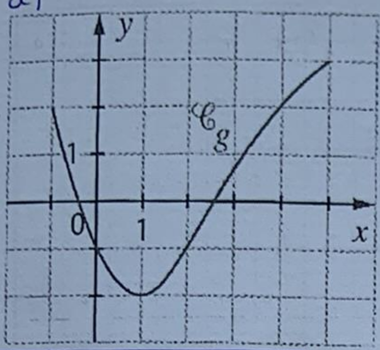
c) Peut-on comparer, avec les informations dont on dispose, les nombres $f(-1)$ et $f(2)$?

a) $2 \leqslant 4$ et f croît sur $[2;4]$ donc $f(2) \leqslant f(4)$

b) $-3 \leqslant -2$ et f décroît sur $[-3;-2]$ donc $f(-3) \geqslant f(-2)$

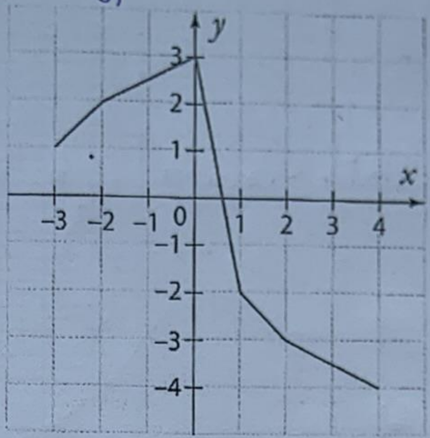
3) Dresser le tableau de variation des fonctions g et h sur leur ensemble de définition dont on donne les courbes représentatives C_g et C_h ci-dessous :

a)



x	-1	1	5
$g(x)$	2 ↘	-2 ↗	3

b)



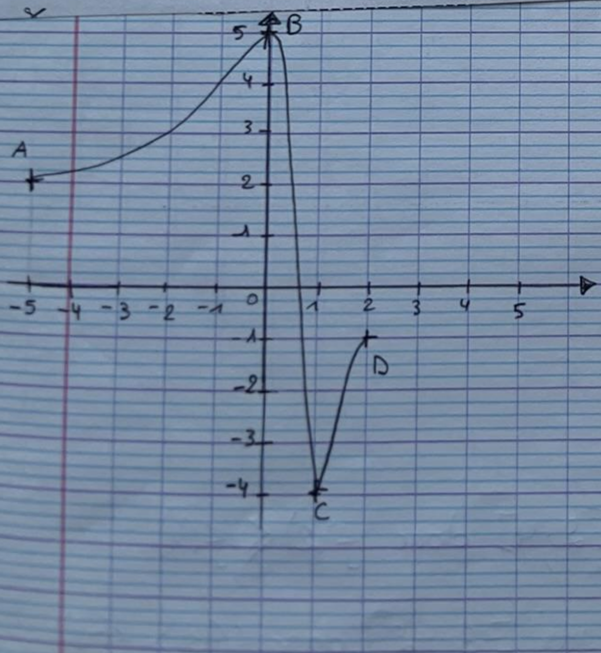
x	-3	0	4
$f(x)$	1 ↗	3 ↘	-4

Exercice 2

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5	0	1	2
$f(x)$	2 ↗	5 ↘	-4 ↗	-1

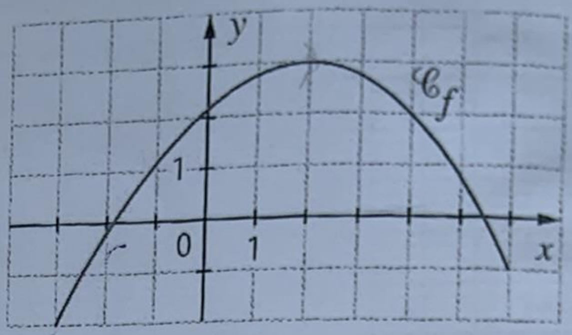
Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.



Exercice 1

1)

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ donnée ci-contre. Dresser le tableau de variation de f.



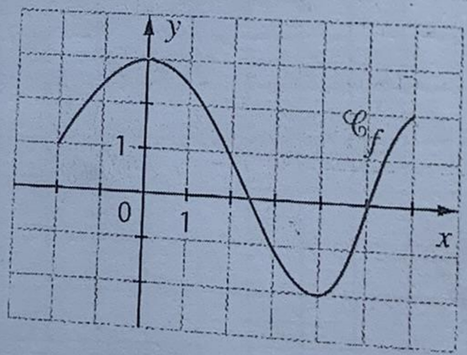
1)

x	-3		2		6
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1

2) On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.

1. Décrire par des phrases les variations de f.

2. Construire le tableau de variation de f.



2) f croit sur $[-2 ; 0]$ f croit sur $[4 ; 6]$
f décroit sur $[0 ; 4]$

x	-2		0		4		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	2

Définition

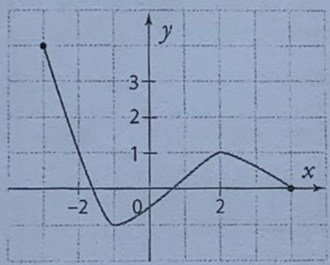
f est dite monotone sur l'intervalle I si f est soit croissante sur I soit décroissante sur I, c'est-à-dire si elle garde le même sens de variation sur tout l'intervalle I.

Définition

Etudier le sens de variation d'une fonction f, ***c'est déterminer les intervalles sur lesquels f croît et ceux sur lesquels f décroît.***

Exemple :

f est une fonction définie sur [−3 ; 4] dont voici la courbe ci-dessous.



Avec des phrases, décrivons le sens de variation de f sur [-3 ; 4] :

- f est décroissante sur $[-3;-1]$
- f est croissante sur $[-1;2]$
- f décroît sur $[2;4]$

On résume cette étude en construisant un tableau, nommé ***tableau de variation*** de la fonction f :

x	-3		-1		2		4
$f(x)$	4	↘	-1	↗	1	↘	0

Le tableau de variation de f sur $[-3;4]$

La première ligne du tableau contient les bornes de l'ensemble de définition de f et les éventuelles valeurs de x en lesquelles le sens de variation de f change.

La seconde ligne contient des flèches qui matérialisent le sens de variation de f, avec la convention suivante : une ***flèche ascendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction croissante*** sur ce même intervalle, et qu'une ***flèche descendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction décroissante*** sur ce dernier.
On met aussi, lorsque c'est possible, les images par f des valeurs mises dans la première ligne du tableau.

2) f est dite décroissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ diminue.

Ceci se traduit rigoureusement par :

♥♥ ***f est décroissante sur I lorsque :***

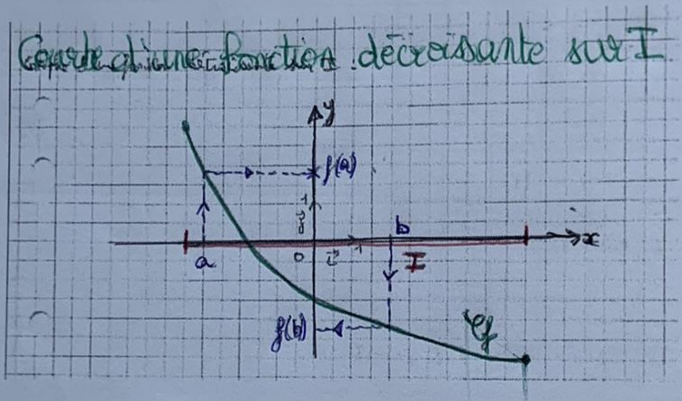
Pour tous réels a et b appartenant à I, si $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$. ♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de celui des nombres a et b.

Une *fonction décroissante* sur un intervalle *change donc l'ordre dans les inégalités* :

Antécédents et images sont rangés dans l'ordre contraire lorsqu'on a une fonction décroissante sur un intervalle !

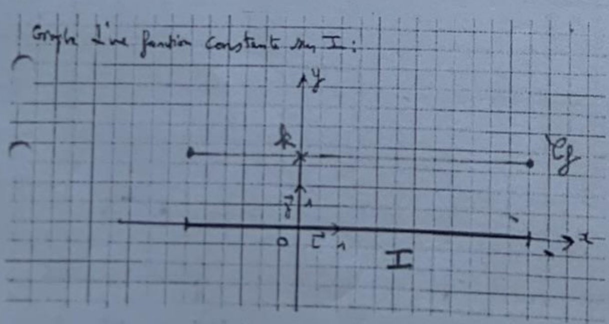
Illustration :



Définition

Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si les valeurs prises par f ont toutes la même valeur sur I, c'est-à-dire s'il existe un réel k, tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on ait : $f(x) = k$.

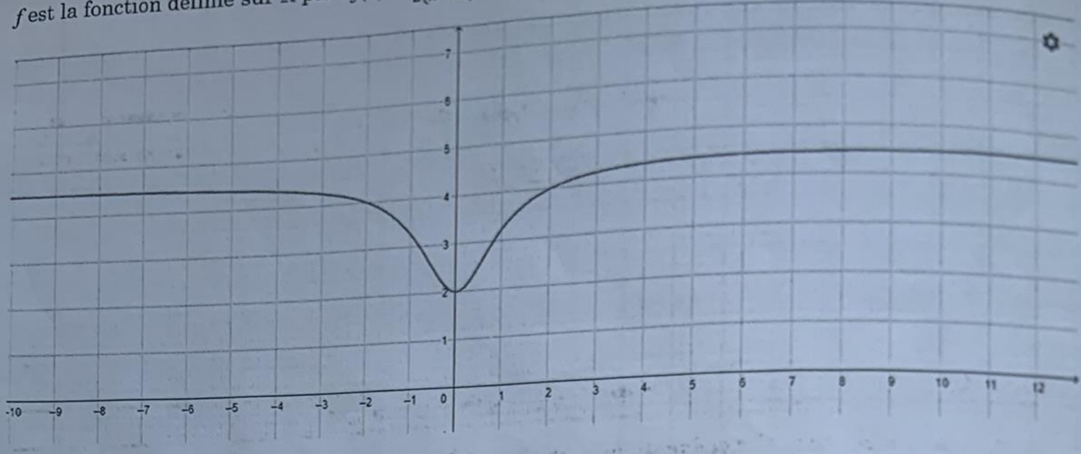
Illustration :



Dans le cas d'une fonction constante sur un intervalle I, C_f est donc une portion de droite parallèle à l'axe des abscisses !

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)}$ et sa courbe représentative ci-dessous :



Démontrer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint lorsque $x = 0$.

Il semblerait que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ soit égal à 2 et atteint lorsque $x = 0$.

Prouvons que pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(0)$

avec $f(0) = \dfrac{9 \times 0^2 + 4}{2(0^2+1)} = \dfrac{4}{2} = 2$

Or $f(x) - f(0) = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - 2 = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - \dfrac{2}{1}$

$f(x) - f(0) = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - \dfrac{2 \times 2(x^2+1)}{2(x^2+1)}$

$f(x) - f(0) = \dfrac{9x^2+4-4(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \dfrac{9x^2+4-4x^2-4}{2(x^2+1}$

$f(x) - f(0) = \dfrac{5x^2}{2(x^2+1)}$

$x^2 \geqslant 0$; $5 > 0$, donc $5x^2 \geqslant 0$

$2 > 0$, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc $2(x^2+1) > 0$

Ainsi $\dfrac{5x^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0$ (règle des signes)

Donc : $f(x) - f(0) \geq 0$

$f(x) \geqslant f(0)$

f admet donc par minimum $f(0) = 2$ sur $\mathbb{R}$