# Chapitre 8 Probabilités : l'étude des certitudes sur les incertitudes.

## I – Vocabulaire des probabilités

**Définition 1** On appelle expérience aléatoire toute expérience à plusieurs issues (ou résultats) possibles, dont on ne peut prévoir le résultat que l'on obtiendra en réalisant cette expérience.

Chacun des **résultats possibles** d'une expérience aléatoire donnée est appelé une **issue** de l'expérience aléatoire.

*Exemple* : Le jet d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 constitue une expérience aléatoire composée de .six issues possibles.

**Définitions 2**

L'ensemble de toutes les issues possibles pour une expérience aléatoire donnée est appelé l'univers des possibles, on le note en général $\Omega$. (oméga majuscule grec)

Si on numérote chacune des issues possibles et qu'on les nomme $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ on a :
$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$.

Au jeu de dé précédemment décrit, $\Omega$ = ..$\{1;2;3;4;5;6\}$................

Le nombre d'élément d'un ensemble fini est appelé son cardinal, noté *card*.

Par exemple, $card(\Omega)$ = .6... pour l'exemple précédent.

**Définition 3**

Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers des possibles $\Omega$.

Un événement élémentaire est une partie de $\Omega$ formé d'une seule éventualité, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\Omega$ ne contenant qu'un seul élément.

*Exemples*

Au jeu précédent, soit $A$ = *" Obtenir un chiffre pair "* : $A$ est un événement, et $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

$B$ = *" Obtenir deux comme résultat "* est un événement élémentaire, et $B = \{2\}$.

*Culture* : un ensemble formé d'un seul élément est appelé un singleton.

**Définitions 4** : Soit $A$ un événement, et $\omega$ un élément de $A$ : $\omega$ est donc une issue de $\Omega$.
(oméga minuscule)

On dit que $\omega$ réalise l'événement $A$.

Par exemple, au jeu précédent, $2 \in A$ : l'issue 2 réalise l'événement A.

On appelle **événement impossible** un événement qui ne peut pas être réalisé lors d'une expérience aléatoire donnée.

*Exemple* : Obtenir 7 au jeu de dé précédent est un événement impossible.

Un événement $A$ est dit certain si $A = \Omega$ : ***la réalisation de A est une certitude !***

*Exemple* : Obtenir un résultat inférieur ou égal à 6 au précédent jeu est un événement certain !

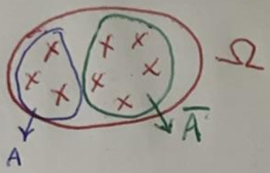
***Définition 5***

Soit $A$ un événement d'un univers $\Omega$.

L'événement contraire de A, que l'on note $\bar{A}$ est formé des issues non favorables à la réalisation de A.

lire : "A barre"

***Illustration***




***Remarque***

D'un point de vue ensembliste, on dit que $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans $\Omega$.

***Exemples***

1) Au jeu précédent de dé, l'événement contraire de $A$ est l'événement :
"obtenir un chiffre impair"

On a donc : $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$

2) Dans une tombola, on vend cent tickets numérotés de 1 à 100. L'expérience aléatoire consiste ici à acheter un billet parmi les 100 vendus.

Soit A l'événement : *"Acheter un ticket dont le numéro est supérieur ou égal à 5"*.

Déterminer l'événement contraire de A, et l'écrire sous forme ensembliste.

$\bar{A}$ est l'évènement : acheter un ticket dont le numéro est strictement inférieur à 5.
$\Leftrightarrow \bar{A} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

## *II - Loi de probabilité sur un ensemble fini*

***Définition 6***

$\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n\}$ désigne l'univers des possibles d'une expérience aléatoire donnée.

Définir une loi de probabilité sur $\Omega$, c'est associer à chacune des issues $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ des nombres réels notés $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ tels que :

- Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$
- $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$

Le réel $p_i$ est appelé la probabilité de l'issue $x_i$.

Mesure la "chance" de réalisation de l'issue $x_i$.

***En pratique***, quand on demande de ***donner une loi de probabilité*** associée à une expérience aléatoire, on consigne les résultats dans un ***tableau à deux lignes***, l'une consignant les différentes issues possibles, l'autre les probabilités associées à chacune de ces issues.

On s'assurera que la somme des probabilités associées aux différentes issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à ..1.. Cela constituera un critère de vérification dans les exercices que nous verrons plus loin.

***Exemple***

Donner la loi de probabilité associé au jet d'un dé non truqué, et on lit le numéro obtenu sur la face supérieure du dé.

La probabilité de chaque issue est égale à ..$\frac{1}{6}$..

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

| *Issues* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Probabilités* | 1/6 | 2/6 | 3/6 | 4/6 | 5/6 | 6/6 |

***III- Situations d'équiprobabilité***

***Définition 7***

On considère une expérience aléatoire ayant $n$ issues possibles, avec $n$ entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'on est en ***situation d'équiprobabilité*** si et seulement si ***chacune des issues*** possibles de cette expérience aléatoire ***a la même probabilité de réalisation*** égale à ..1/n

C'est le cas dans l'exemple précédent !

Bien souvent, l'énoncé indique implicitement les situations d'équiprobabilité : dé non truqué,.......

***Définition 8***

Soit A un événement de $\Omega$.

On appelle probabilité de l'événement A, le nombre réel noté $p$(A) égal à la somme des probabilités des issues qui réalisent l'événement A.

**La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre ..0.. et 1.**

**Exercice 1** A l'expérience aléatoire précédente, nommons A l'événement obtenir un résultat pair.

Décrire l'événement A puis calculer $p$(A). A = " obtenir un résultat pair "

$A = \{2;4;6\}$ $\boxed{p(A)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

**Exercice 2**

On jette un dé de forme tétraédrique (4 faces triangulaires) une fois.

On s'intéresse au nombre qui apparait au sommet du tétraèdre (1 sur le dessin ci-dessus).

1) Compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité associé à cette expérience aléatoire :

| *Issues* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| *probabilités* | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $x$ |

2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A = "*Obtenir un résultat impair* ".  B = " *Obtenir un nombre premier* ".

1) $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+x=1$ somme des probabilités égales à 1

$x=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$  $x=\frac{12}{12}-\frac{1}{12}-\frac{2}{12}-\frac{3}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

2) $A=\{1;3\}$ Donc $p(A)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

tétra : 4  èdre : la face

$B=\{2;3\}$ Donc $p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

card : abréviation du mot cardinal

**Propriété fondamentale**

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque A de $\Omega$ est égale à :

♥ $p(A)=\dfrac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre total d'issues possibles}}=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ ♥

**Justification :**

intuitif : résulte de l'équiprobabilité

**Exercice 3**

Un jeu de tarot est constitué de 78 cartes différentes et indiscernables, retournées (non visibles).

L'univers est l'ensemble des 78 cartes : (52 cartes réparties en 4 collections cœur, carreau, pique, trèfle, contenant chacune : un as, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6, un 7, un 8, un 9, un 10, un valet, une dame, un roi) + 4 cavaliers (un de cœur, un de carreau, un de pique un de trèfle) + 21 atouts + 1 excuse).

On tire au hasard une carte de ce jeu de tarot.

*a*) Expliquer pourquoi on est en situation d'équiprobabilité.

*b*) Donner un événement élémentaire.

*c*) Quelle est la probabilité d'obtenir : *i*) Le cavalier de cœur  *ii*) Un atout  *iii*) Une figure.

a) Car chaque carte figure une seule fois et a autant de chance qu'une autre d'être piochée

b) E : Piocher l'excuse est un évènement élémentaire

c) C = Piocher le cavalier de coeur

$p(C) = \frac{1}{78}$

A = " Obtenir un atout "

$p(A) = \frac{21}{78} = \frac{3 \times 7}{3 \times 26} = \boxed{\frac{7}{26}}$

F = " obtenir une figure " $\rightarrow$ V D, R, ou C

$p(F) = \frac{16}{78} = \frac{8}{39}$ | * 4 × 4

**Exercice 4**

On lance simultanément deux dés tétraédriques équilibrés, l'un bleu, l'autre vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

1) Décrire mathématiquement l'univers des possibles $\Omega$ de cette expérience, en précisant le cardinal de $\Omega$.

2) A-t-on une situation d'équiprobabilité sur $\Omega$ ?

3) On s'intéresse au produit des résultats obtenus sur chacun des deux dés.

Calculer la probabilité de l'événement $A$ : " le produit obtenu est égal à 6".

4) On prend maintenant pour univers des possibles associé à cette expérience aléatoire, l'ensemble $\Omega'$ des différents produits possibles.

En s'aidant d'un tableau à double entrée, décrire $\Omega'$. Est-on en situation d'équiprobabilité sur $\Omega'$ ?

1) $\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;4);(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(4;1);(4;2);(4;3);(4;4)\}$

card $(\Omega) = 16$

2) Oui car chacune des issues de $\Omega$ figure une fois et une seule.

3) $A =$ « le produit est égal à 6 »

$(3;2)$ ou $(2;3)$

$A = \{(3;2);(2;3)\}$ situation d'équiprobabilité

Donc $P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

4)

| Dé 1 / Dé 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | * 6 | 8 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 |

$\boxed{* : 3\times 2 = 6}$

Donc $\Omega' = \{1;2;3;4;6;8;9;12;16\}$ card$(\Omega') = 9$

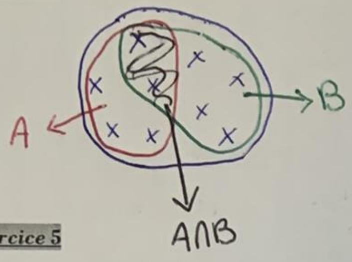
## IV – Calcul de probabilités

### 1) Définition de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un même univers $\Omega$.

L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ (lire A inter B), est l'événement formé des issues qui ***réalisent à la fois l'événement A et l'événement B.***

*Illustration*




**Exercice 5**

Une urne contient dix billes respectivement numérotées de 1 à 10. On extrait au hasard une bille de l'urne.

Soit A l'événement : *"Obtenir un numéro de bille qui est un multiple de 3"*.

Soit B l'événement : *"Obtenir un numéro de bille au maximum égal à 4"*.

*a*) Décrire A, B, puis déterminer l'événement $A \cap B$.

*b*) Soit C l'événement : *"Obtenir un multiple de 4"*.

Déterminer l'événement $A \cap C$.

a) $A = \{3 ; 6 ; 9\}$, $B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

$A \cap B$ (inter) est ici l'événement : "Obtenir un multiple de 3 et au maximum égal à 4."

$A \cap B = \{3\}$

b) $A \cap C$ = "Obtenir un nombre multiple de 3 et multiple de 4".

$A \cap C = \emptyset$ ← vide

Rq : A et C sont des événements incompatibles

**Définition**



Lorsque $A \cap B = ..\emptyset..$, on dira que A et B sont deux événements ***incompatibles*** c'est-à-dire qu'ils *ne peuvent pas être réalisés simultanément !*

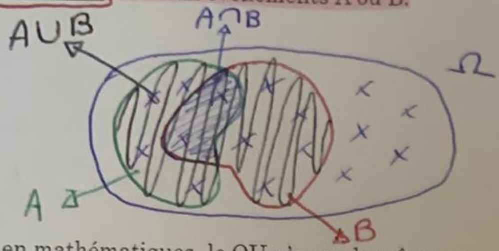
C'est par exemple le cas des événements A et C de l'exemple précédent !

### ii) Définition de la réunion

Soient A et B deux événements d'un même univers $\Omega$.

La **réunion** des événements A et B, notée $A \cup B$ (lire A union B), est l'événement formé des issues qui réalisent **au moins un** des deux événements A ou B.

*Illustration*




Rq : $A \cap B \subset A \cup B$
est contenue dans

Attention, en mathématiques, le OU n'a pas le même sens que dans le langage quotidien !

Dans le langage quotidien, la phrase *« aller ou cinéma ou aller jouer au tennis »* désigne un OU exclusif et est comprise par : soit on va au cinéma, soit on va jouer au tennis.

En mathématiques, la précédente phrase signifie faire ***au moins*** une des deux activités. Le OU est inclusif en mathématiques.

On veillera aussi à ne pas confondre les symboles $\cup$ et $\cap$.

*Exemple*

Déterminer $A \cup B$ puis $A \cup C$ dans chacun des deux exemples de l'exercice 5.

Ex : $A = \{3;6;9\}$ $B = \{1;2;3;4\}$ $C = \{4;8\}$

Donc $A \cup B$ : " obtenir un multiple de 3 ou au max. 4 "

$A \cup B = \{1;2;3;6;4;9\}$

$A \cup C$ : " Obtenir un multiple de 3 ou 4 "

$A \cup C = \{3;4;6;8;9\}$

**Théorème (additivité)**

Soit A et B deux événements incompatibles (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$) d'un même univers $\Omega$.

On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

*Illustration :*

**Exercice 6**

Un jeu de cartes est constitué de 32 cartes réparties en quatre collections : cœur, carreau, pique et trèfle, chacune des collections étant constituée de : un 7, un 8, un 9, un 10, un valet, une dame, un roi et un as.

Enfin, les cartes de cœur et carreau sont de couleur rouge, et les cartes de pique et trèfle sont de couleur noire.

On tire au hasard une carte de ce jeu de cartes.

Soit A l'événement : *" Obtenir un as"*, *et* B l'événement : *"Obtenir un valet"*.

Déterminer A, B, puis $p(A)$, $p(B)$ et enfin $p(A \cup B)$.

$A = \{ \heartsuit as ; \diamondsuit as ; \spadesuit as ; \clubsuit as \}$ $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$B = \{ \heartsuit V ; \diamondsuit V ; \spadesuit V ; \clubsuit V \}$ $p(B) = \frac{1}{8}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

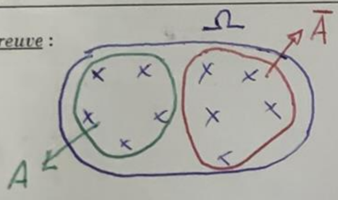
↳ car A et B sont incompatibles

♥♥ *Théorème* (*probabilité d'un événement contraire*)♥ ♥

Pour tout événement A de $\Omega$, on a :

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

*Preuve* :




$A \cup \bar{A} = \Omega$ avec A et $\bar{A}$ $\underbrace{\text{sont incompatibles}}_{(*)}$

Donc $\underbrace{p(A \cup \bar{A})}_{(*)} = p(\Omega) = 1$

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$ donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

*Exemple*

Décrire chacun des événements : $\bar{A}$ , puis $\bar{B}$ de l'exemple précédent, puis déterminer $p(\bar{A})$ puis $p(\bar{B})$.

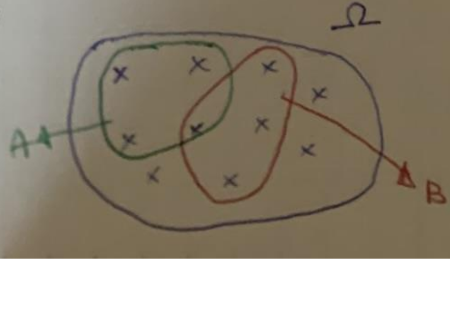
$\bar{A}$ est : « ne pas piocher d'as ». $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\bar{B}$ est : « ne pas piocher de valet » $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

*Théorème fondamental* (calcul de $p(A \cup B)$ *lorsque* A *et* B *sont deux événements quelconques*)

♥♥ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ♥♥

*Preuve* :




card (A) = 4
card (B) = 5
card (A ∩ B) = 1
card (A ∪ B) = 8

$\overbrace{card(A \cup B)}^{8} = \overbrace{c.(A)}^{4} + \overbrace{c.(B)}^{5} - \overbrace{c.(A \cap B)}^{1}$

Donc $\dfrac{card(A\cup B)}{card(\Omega)} = \dfrac{card(A)+card(B)-card(A\cap B)}{card(\Omega)}$

$$p(A\cup B) = \underbrace{\frac{card(A)}{card(\Omega)}}_{p(A)} + \underbrace{\frac{card(B)}{card(\Omega)}}_{p(B)} - \underbrace{\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}}_{p(A\cap B)}$$



**Exercice 7**

Dans un lycée, la probabilité qu'un élève de première fasse la spécialité Mathématiques est égale à 0,8, et celle qu'il fasse la spécialité *SES* est égale à 0,4, et la probabilité qu'il fasse ces deux spécialités est égale à 0,3.

On choisit au hasard un élève de première, et on note A l'événement : *"l'élève suit la spécialité* Mathématiques" et B l'événement : *" l'élève suit la spécialité SES"*.

*i)* Soit C l'événement : " l'élève suit les spécialités Mathématiques et *SES*". Ecrire C en fonction de A et B, puis donner $p(C)$.

*ii)* Décrire par une phrase l'événement $A\cup B$, puis calculer la probabilité de cet événement.

*iii)* Déterminer la probabilité qu'un élève ne fasse ni la spécialité Mathématiques, ni la spécialité SES. 1 − ...

i) $C = A\cap B$ Donc $p(C) = p(A\cap B) = 0,3$ (énoncé)

ii) $A\cup B$ est ici l'évènement :
« l'élève suit la spé Maths **ou** la spé S.E.S. »

$p(A\cup B) = p(A)+p(B) - \underbrace{p(A\cap B)}$

$p(A\cup B) = p(A)+p(B) - p(C) = 0,8+0,4-0,3 = 0,9$

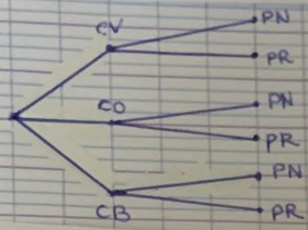
iii) Ni spé Maths, ni spé S.E.S. est ici l'évènement $\overline{A}\cap\overline{B}$, c'est à dire l'évènement contraire de $A\cup B$

Donc $p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) = 1-0,9 = 0,1$

## A- Le principe multiplicatif

*Exemple 1*

Dans un placard, vous disposez de 3 chemises, une verte, une orange et une bleue, et de deux pantalons, un noir et un rouge. Vous prenez au hasard une chemise et un pantalon. Combien de choix différents pouvez-vous faire ?




Il y a $2 \times 3 = 6$ façons de s'habiller

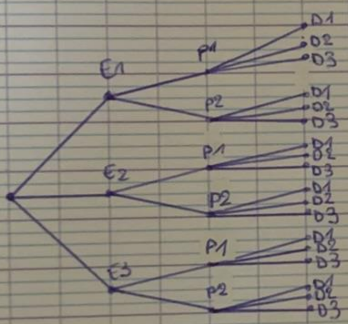


*Exemple 2*

Au restaurant, vous avez le choix entre 3 entrées, 2 plats et 3 desserts.

Votre repas est composé d'une entrée, un plat et un dessert.

Combien de repas différents pouvez-vous constituer ?




Il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ repas différents

*Exemple 3*

Le code $PIN$ de votre vieux téléphone $PHONE\ I$ est constitué de quatre chiffres.

*a)* Combien de codes $PIN$ différents existe-t-il ?

*b)* Combien y-a-t-il de codes $PIN$ à quatre chiffres distincts ?

a) 1°ch — 2°ch — 3°ch — 4°ch

10 choix — 10 choix — 10 choix — 10 choix

Donc $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$ codes PIN distincts

b) 1°ch — 2°ch — 3°ch — 4°ch

10 choix — 9 choix — 8 choix — 7 choix

Il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes à 4 chiffres distincts.

**Exercice 8**

Un sac opaque contient 50 jetons numérotés de 0 à 49.

On prélève au hasard un jeton de ce sac, et on note le nombre qu'il porte.

Considérons les événements suivants :

A : *"Le nombre obtenu est divisible par 5".*

B : *"Le nombre obtenu est un multiple de 8".*

C : *"Le nombre obtenu est un nombre premier".*

Déterminer : $p(A)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup C)$, $p(B \cup C)$, $p(\overline{B} \cap \overline{C})$.
$p(B)$, $p(C)$,

$A = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$

$\boxed{p(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2}$

$B = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48\}$

$p(B) = \frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 0{,}14$

$C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$

$p(C) = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0{,}3$

$A \cap B = \{0; 40\}$, donc $p(A \cap B) = \frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0{,}04$

$A \cup C = \{0; 2; 3; 5; 7; 10; 11; 13; 15; 17; 19; 20; 23; 25; 29; 30; 31; 35; 37; 40; 41; 43; 45; 47\}$

$p(A \cup C) = \frac{24}{50} = 0{,}48$

$B \cup C = \{0; 2; 3; 5; 7; 8; 11; 13; 16; 17; 19; 23; 24; 29; 31; 32; 37; 40; 41; 43; 47; 48\}$

Donc $p(B \cup C) = \frac{22}{50} = 0{,}44$

$p(\overline{B} \cap \overline{C}) = p(\overline{B \cup C}) = 1 - p(B \cup C) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$

## V- Arbre de probabilités

Nous allons voir que le calcul des probabilités est facilité par la représentation de l'expérience aléatoire.

Les arbres de probabilité permettent de calculer efficacement des probabilités !

$A = B_1 \cap B_2$

$p(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

$B = R_1 \cap R_2$

$p(B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

$C = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$

$p(C) = p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2)$

$p(C) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}$

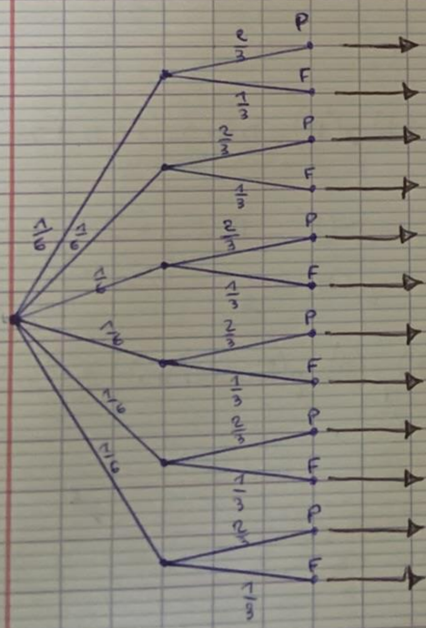
$p(C) = \frac{15}{64} + \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

**Exercice 9**

Un jeu consiste à lancer un dé cubique non truqué et une pièce truquée, telle que la probabilité d'apparition du côté pile soit égale à $\frac{2}{3}$.

Au nombre apparu sur la face supérieure du dé, ***on ajoute* 1 *si Pile est sorti***, et ***on soustrait* 1 *sinon***.
Déterminer la loi de probabilité de ce jeu.

↳ Tableau avec : valeurs prises et proba. associées à ces valeurs



$R = 1+1 = 2$
$R = 1-1 = 0$
$R = 2+1 = 3$
$R = 2-1 = 1$
$R = 3+1 = 4$
$R = 3-1 = 2$
$R = 4+1 = 5$
$R = 4-1 = 3$
$R = 5+1 = 6$
$R = 5-1 = 4$
$R = 6+1 = 7$
$R = 6-1 = 5$

ici, $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$p(R=0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$p(R=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$p(R=2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18}$

Dem : $p(R=3) = p(R=4) = p(R=5) = \frac{3}{18}$

$p(R=6) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$

$p(R=7) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$

D'où la loi de probabilité :

| valeurs | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| probabilités | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{2}{18}$ | $\frac{2}{18}$ |

Visualisation de toutes les issues possibles ... probabilités.

*Exemple*

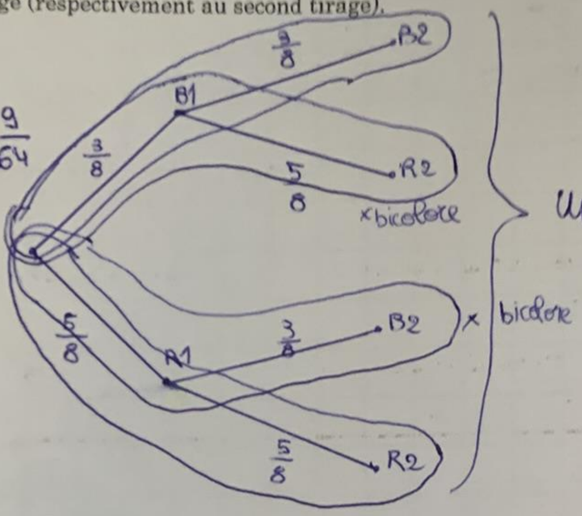
Une urne contient 3 boules blanches, et 5 boules rouges. Un joueur tire au hasard une première boule de l'urne, la repose dans l'urne, puis procède à un deuxième tirage au hasard d'une boule de l'urne.

Essayons de donner une représentation de cette expérience aléatoire qui facilitera le calcul des probabilités :

On note : $B_1$ (respectivement $B_2$) l'événement : obtenir une boule blanche au premier tirage (respectivement au second tirage) et $R_1$ (respectivement $R_2$) l'événement obtenir une boule rouge au premier tirage (respectivement au second tirage).

$A = B1 \cap B2$

$p(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$




un arbre de probabilité

Remarques fondamentales concernant les arbres :

- La probabilité d'un événement est égale ...AU PRODUIT......... des probabilités figurant sur le chemin conduisant à cet événement.
- Au départ d'un nœud, les branches issues de ce dernier portent des probabilités dont la somme est égale à 1.
- Lorsqu'un événement correspond à la réunion de plusieurs chemins de l'arbre, pour calculer la probabilité de ce dernier, on ..ADDITIONNE............. les probabilités associées à .CHACUN... de ces chemins.

Déterminer, dans l'exemple précédent, la probabilité de l'événement A : *"obtenir deux boules blanches"*.

Même question avec l'événement B : *"obtenir deux boules rouges"*.

En déduire la probabilité de l'événement C : *"obtenir un tirage bicolore"*.

**Exercice 10**

On considère qu'à la naissance, les caractères " Naître fille " et " Naître garçon " sont équiprobables.

Quelle est la probabilité, dans une famille de 3 enfants, de chacun des événements suivants :

1) D : "avoir exactement deux filles ".

2) A : "n'avoir aucun garçon ".

3) M : "avoir au moins une fille ".

4) N : "avoir au plus un garçon ".

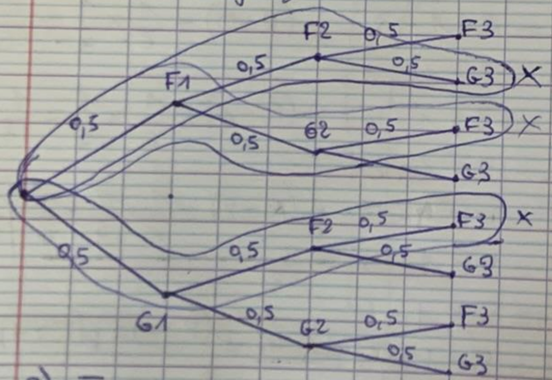
5) R : "avoir plus d'un garçon ".

Arbre associé à une fratrie de 3 frères et soeurs.

$F_1$ : avoir une fille en 1°
$G_1$ : ——— garçon en 1°

$F_2$ : fille en second
$G_2$ : garçon en second

$F_3$ : fille en 3°
$G_3$ : garçon en 3°




1) $p(D) = 0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5 + 0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5$

$p(D) = 0{,}125 + 0{,}125 + 0{,}125$

$p(D) = \frac{3}{8}$

2) $p(A) = p(F_1\cap F_2\cap F_3) = 0{,}5^3 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$

3) $\overline{M}$ = avoir 3 garçons

$p(\overline{M}) = 0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5 = 0{,}125$

Or $p(\overline{M}) = 1 - p(M)$

$0{,}125 = 1 - p(M)$

$p(M) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875 = \frac{7}{8}$

" "Au moins un *" est l'événement contraire de aucun * "

4) $p(N) = 0{,}5^3 \times 4$ ← 4 chemins équiprobables sur l'arbre qui réalise N

$\boxed{P(N) = 0{,}5}$

5) R = "deux ou trois garçons"
$p(R) = (0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5) \times 3 \quad + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$
↳ 3 chemins équiprobables conduisant à 2 garçons

$\boxed{P(R) = 0{,}5^3 \times 4 = 0{,}5}$

11

**Exercice 11** On dispose de trois sacs de billes.

Le premier sac contient des billes rouges et vertes, et il y a trois fois plus de vertes que de rouge dans le 1er sac.

Le 2e sac contient des billes rouges, vertes et bleues en quantités égales.

Le 3e sac ne contient que des boules rouges et bleues en quantités égales.

1*a*) On extrait au hasard une boule du premier sac. Déterminer la probabilité qu'elle soit rouge, et en déduire celle qu'elle soit verte.

1*b*) Même question si l'on extrait une boule au hasard du second sac.

1*c*) Même question si l'on extrait une boule au hasard du troisième sac.

2) Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une bille dans un premier sac et à noter sa couleur, recommencer la même procédure dans le 2e sac, puis dans le 3e sac.

*a*) Effectuer un arbre permettant de visualiser toutes les issues possibles à l'issue de l'expérience aléatoire décrite plus haut.

*b*) Calculer la probabilité des événements suivants :

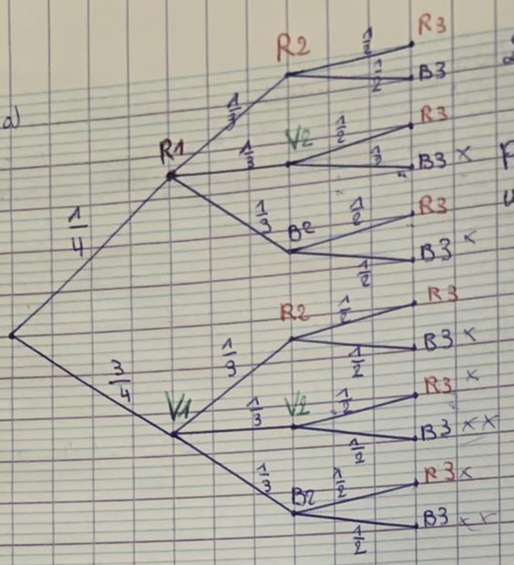
R : *« les trois billes tirées sont rouges »*
U : *« une bille exactement est rouge »*
A : *« aucune bille n'est rouge »*
V : *« les trois billes tirées sont vertes »*.

1a) $p(V_1) = 3\,p(R_1)$
et $p(V_1) + p(R_1) = 1$
Donc $3\,p(R_1) + p(R_1) = 1$
$4\,p(R_1) = 1$
$\to p(R_1) = \frac{1}{4}$
Donc $\boxed{p(V_1) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}$

1b) $p(B_2) = \frac{1}{3}$ $\quad p(R_2) = \frac{1}{3}$ $\quad p(V_2) = \frac{1}{3}$
1c) $p(R_3) = \frac{1}{2}$ $\quad p(B_3) = \frac{1}{2}$

2) a)

2) a)




2b) $p(R) = p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

$p(V) = 0$ car V est un évènement impossible car pas de bille verte dans le sac 3

U = " Piocher exactement une bille rouge "

$$p(U) = \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}, + \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$p(U) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{1}{2} \times \cancel{3}$$

$$p(U) = \frac{1}{12} + \frac{3}{8} = \frac{2}{24} + \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$$

A = " Aucune bille rouge piochée "

$$p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$p(A) = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = \frac{1}{4}$$

**Exercice 12**

On considère un QCM qui comporte 5 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses proposées, et une seule est la bonne réponse. Un candidat répond au hasard à chacune des questions systématiquement.

Calculer, après avoir décrit l'univers des possibles, les probabilités des événements suivants :

A : " Faire tout juste "     B : " Faire tout faux "     C : " avoir au moins une bonne réponse ".

3 choix, 3 choix ...

$\Omega = \{(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$ où $l_i \in \{A;B;C\}$ et $i \in [\![1;5]\!]\}$ entiers de l'intervalle $[1;5]$

$card(\Omega) = 3\times3\times3\times3\times3 = 3^5 = 243$

A = "Faire tout juste"

$p(A) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{243}$ $(\approx 0{,}004)$

car à chaque question on a 1 chance sur 3 de faire juste.

B = "Faire tout faux"

$p(B) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ car il y a 2 réponses fausses sur 3, par question

$p(B) = \frac{32}{243}$ $(\approx 0{,}13)$

$C = \overline{B}$ Donc $p(C) = p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{243}{243} - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$ $(\approx 0{,}87)$

**Exercice 13** On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, et on s'intéresse à la distance entre les deux résultats obtenus (différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres).

*a*) Faire un tableau à double entrée contenant toutes les éventualités possibles.

*b*) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = *"Obtenir un écart impair"*. B = *"Obtenir 0 comme écart "*.

C =*" Obtenir au moins 4 comme écart"*. D = *" Obtenir au plus 2 comme écart"*.

*c*) Définir en français l'événement contraire de C, puis calculer la probabilité de cet événement.

*d*) Décrire en français l'événement $A \cap \bar{C}$ , puis calculer sa probabilité.

*e*) Décrire en français l'événement $A \cup \bar{C}$, puis calculer sa probabilité.

a)

| Dé 2 \ Dé 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

b) A = " Obtenir un écart impair " $A = \{1;3;4\}$

$p(A) = \frac{18}{36} = \boxed{\frac{1}{2}}$

B = " Obtenir 0 comme écart "

$\boxed{p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$

C = " Obtenir $\overbrace{\text{au moins 4}}^{\geq 4}$ comme écart "

$C = \{4;5\}$

Donc $p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

D = " Obtenir au plus 2 comme écart. "

$D = \{0;1;2\}$, donc $p(D) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

c) $\bar{C}$ = « obtenir au plus 3 »

$p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

d) $A \cap \bar{C}$ = " Obtenir un écart impair et au maximum égal à 3 ".

$A \cap \bar{C} = \{1;3\}$

$p(A \cap \bar{C}) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

e) $A \cup \bar{C}$ = " Obtenir un écart impair ou au maximum égal à 3 "

$A \cup \bar{C} = \{0;1;2;3;5\}$

$p(A \cup \bar{C}) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

Bis : $p(A \cup \bar{C}) = \underbrace{p(A)}_{} + \underbrace{p(\bar{C})}_{} - \underbrace{p(A \cap \bar{C})}_{}$

$= \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{4}{9}$

$p(A \cup \bar{C}) = \frac{9}{18} + \frac{15}{18} - \frac{8}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$