Chapitre 7 — Fonctions, courbes représentatives, et sens de variation

I - Vocabulaire des fonctions

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction notée f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un unique réel appelé l'image de x par la fonction f, que l'on note $f(x)$.

Notation : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

Remarque : x est appelé la variable de la fonction.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = x^2$.

Rq : f s'appelle la fonct° carrée

Calculer $f(5)$; Quelle est l'image de $-\frac{3}{4}$ par f?

$f(5) = 5^2 = 25.$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$

Méthode : Pour déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction f, on remplace x par la valeur donnée (par l'énoncé) dans l'expression $f(x)$.

Définition 2

Soit f une fonction.
L'ensemble de tous les réels qui ont une image par f est appelé ***l'ensemble de définition*** de la fonction f, on dit encore domaine de définition de f. On le notera, en général, $\mathcal{D}_f$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner à x, pour lesquelles on a le droit d'effectuer le calcul de l'expression $f(x)$.

Une valeur x pour laquelle le calcul de l'expression de $f(x)$ n'est pas possible est appelée une ***VALEUR INTERDITE*** pour la fonction f.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Rq : f est appelée la fonction inverse.
0 est une valeur interdite pour f, car on ne peut pas diviser par 0.
Pour toutes les autres valeurs du réel x, on peut calculer $\frac{1}{x}$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$……………, donc $\mathcal{D}_f$ = $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$……………

$\mathbb{R}^*$ signifie :
tous les réels
sauf le nb 0.

On pourra retenir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ auquel on retire les éventuelles valeurs interdites de f

On notera: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}$ (lire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites).

*Remarque***: En classe de seconde, les valeurs interdites, et donc les éventuels trous dans les ensembles de définition, apparaissent dès lors qu'il y a des dénominateurs (ils doivent être non nuls) ou des racines carrées (le *radicande*, c'est-à-dire ce qui est sous la racine doit être positif).

Exercice 1

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, son ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; ***b)*** $g(x) = x^2 + 1$; ***c)*** $h(x) = \sqrt{x}$; ***d)*** $i(x) = \sqrt{3-2x}$

a) Ici il faut que : $x - 1 \neq 0$ (dénominateur non nul)
$x \neq 1$

C.à.d : $x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Donc : $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

b) $g(x) = x^2 + 1$

g est définie sur $\mathbb{R}$ car on peut élever au carré n'importe quel réel, et on peut ajouter

Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

c) $h(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{x}$ est calculable si et seulement si $x \geqslant 0$.

Donc $\mathcal{D}_h = [0; +\infty[$

d) $i(x) = \sqrt{3-2x}$

$i(x)$ est calculable ssi $3 - 2x \geqslant 0$

$3 \geqslant 2x$

$2x \leqslant 3$

$x \leqslant \dfrac{3}{2}$ (car $2>0$)

Donc $\mathcal{D}_i =]-\infty; \frac{3}{2}]$.

Définition 3

Soit f une fonction, et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.
Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

Schéma : $x \xrightarrow{f} f(x)$: image
$y = f(x)$: x est un antécédent de y par f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer l'antécédent de 4 par f.

Méthode : On cherche s'il existe un réel x *tel que* $f(x) = 4$. *Donc, on doit résoudre l'équation :* $f(x) = 4$, *où* x *est l'inconnue, et s'assurer que la (les) solution(s) obtenues sont bien situées dans* $\mathcal{D}_f$.

Ici : $f(x) = 4$ équivaut à dire que : $2x + 1 = 4$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ et $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ où $\mathbb{R} = \mathcal{D}_f$.

Le nb $\frac{3}{2}$ est donc l'antécédent de 4 par f.

Remarque : $f(2) = 5$ équivaut à dire que l'image de 2 par f vaut 5.
$f(2) = 5$ implique seulement que 2 est ***un*** antécédent de 5 par f.

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

-3 a-t-il un antécédent par f ? Justifier.

On résout l'équation : $f(x) = -3$, càd : $x^2 = -3$: aucune solut° car $x^2 \geq 0$ pr tte valeur de x.
$S = \emptyset$

-3 n'a aucun antécédent par f.

Antécédent(s) de 4 par f : $f(x) = 4$
$x^2 = 4$ → Donc $\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$
$|x| = 2$ Donc $S = \{-2 ; 2\}$
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 - 2^2 = 0$
$(x-2)(x+2) = 0$

$x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 2$ ou $x = -2$

$S = \{2 ; -2\}$

Donc 4 a deux antécédents par f : les nb -2 et 2.

Remarque cruciale : Un nombre donné peut avoir aucun antécédent par une fonction f, ou bien un seul antécédent par f, ou bien plusieurs antécédents par f.

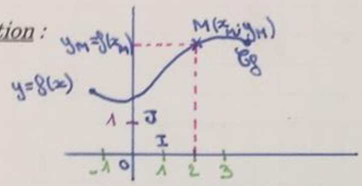
Définition 4 ♥

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

On appelle ***courbe représentative de la fonction f***, ou encore, graphe de f, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y = f(x)$, le réel x prenant toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$.
On notera C_f la courbe représentative de la fonction f:

$C_f = \{M(x ; y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)\}$. La relation $y = f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f.

Illustration :



Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par : $f(x) = x^2$.

Construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3 ; 3]$. Signifie que $x \in [-3; 3]$ ou $-3 \leq x \leq 3$.

Méthode : On commence toujours par faire un tableau de valeurs de la fonction f, qui permet de déterminer et de placer des points situés sur C_f.
Ici, $f(x) = x^2$. Tableau de valeurs pour f sur $[-3; 3]$:

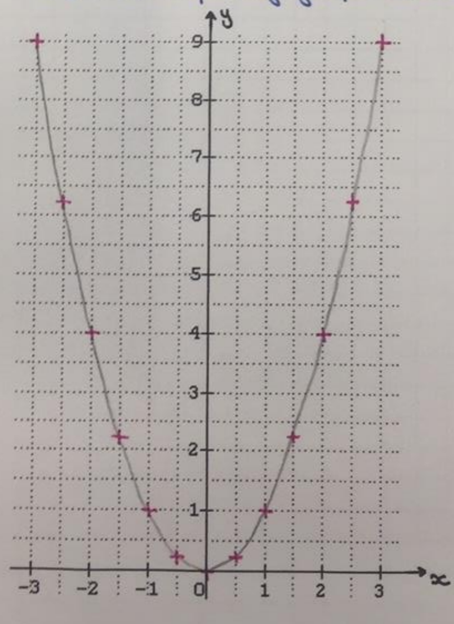
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9*

* $f(3) = 3^2 = 9$.

Pas égal à 1 : x "avance" régulièrement de 1 en 1.

Tracé :

$f(2) = 4$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(2;4)$.



Remarques importantes : Comment réussir le tracé de son chef d'œuvre ?

1) Ne pas relier deux points consécutifs par un segment de droite.

2) Une courbe sera d'autant plus précise qu'il y aura de points placés dessus.

Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

A quelle condition un point $M(x ; y)$ est-il situé sur la courbe C_f représentant f?

♥♥ *Règle XXL* : $M(x ; y) \in C_f$ *si et seulement si* : $y = f(x)$ et $x \in D_f$ ♥♥

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. On note C_f sa courbe représentative.

a) Le point $A(1 ; 2)$ est-il situé sur C_f? Justifier.
b) Même question pour le point $B(3 ; 2)$.
c) Déterminer les coordonnées du point C qui a pour abscisse 2 et qui est situé sur C_f.

a) $A(\underset{x}{1} ; \underset{y}{2})$

Calculons $f(1)$: Si $f(1) = 2$, alors $A \in C_f$

Si $f(1) \neq 2$, alors $A \notin C_f$

Ici : $f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 - 1 = 1 - 3 + 0 = -2$.

Or -2 n'est pas l'ordonnée du point A $(-2 \neq 2)$

$\boxed{\text{Donc } A(1 ; 2) \notin C_f}$

b) $B(\underset{x}{3} ; \underset{y}{2})$

Calculons $f(3)$: Si $f(3) = 2$, alors $A \in C_f$

Si $f(3) \neq$, alors $A \notin C_f$

Ici : $f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 3 - 1$

$f(3) = 2$

Donc : $B(3 ; 2) \in C_f$

c) $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$

$C(x_c ; y_c)$ avec : $x_c = 2$ (énoncé).

Donc $C(2 ; y_c)$

De plus, $C \in \mathcal{C}_g$, donc $y_c = g(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 2 - 1 = 8 - 12 + 1 = -3$.

Donc $C(2 ; -3)$.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et C_g sa courbe représentative.

↳ signifie que $x \in \mathbb{R}$

a) Le point $A(\frac{1}{2} ; \frac{4}{9})$ appartient-il à C_g ?

b) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui appartient à C_g ?

a) $A\left(\frac{1}{2} ; \frac{4}{9}\right)$

Ici : $g\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Or $\frac{4}{9} \neq \frac{4}{5}$, donc $A\left(\frac{1}{2} ; \frac{4}{9}\right) \notin \mathcal{C}_g$.

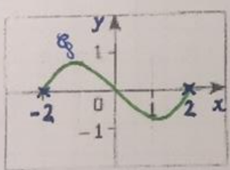
b) Tout point de l'axe des ordonnées a pour abscisse 0.

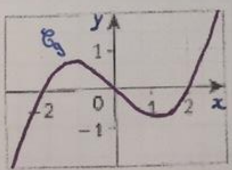
Soit K le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 : $K(0 ; g(0))$ avec $g(0) = \dfrac{1}{0^2+1} = \dfrac{1}{1} = 1$.

$K(0 ; 1)$ appartient à $\mathcal{C}_g$ et à l'axe des ordonnées.

Exercice 4

A l'aide des graphiques suivants, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ***f, g*** dont on donne les courbes représentatives :





Ici, $\mathcal{D}_g = [-2 ; 2]$

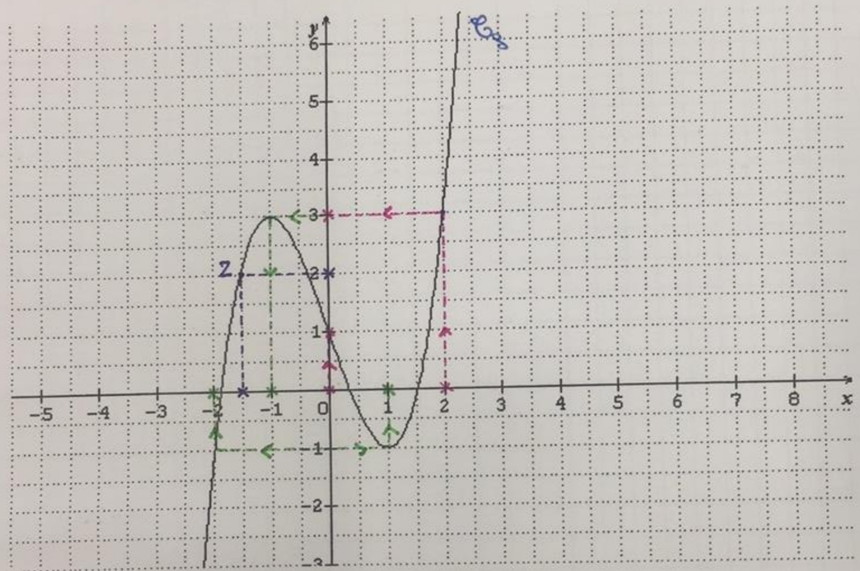
Convent° : S'il n'y a pas de croix délimitant la courbe, cela signifie qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc ici : $\mathcal{D}_g =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

II - Lectures graphiques

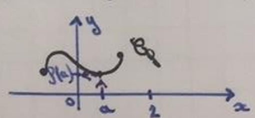
Exemple : A l'aide du graphique donné, déterminer :

a) L'image de 2 par la fonction *f*. $f(2) = 3$.
b) L'image de 0 par *f*. $f(0) = 1$.
c) Le(s) antécédent(s) de 3 par *f*. $f(x) = 3$ (on cherche x) donc -1 et 2 sont les antécédents de 3 par f.
d) Le(s) antécédents de − 1 par *f*. $f(x) = -1$ donc -2 et 1 sont les antécédents de -1 par f.
e) Le point Z(−1,5 ; 2) appartient-il à la courbe représentant *f*? $Z(-1{,}5 ; 2) \in \mathcal{C}_f$.

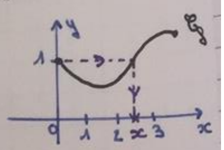


- Méthode graphique pour lire l'image d'un réel ***a*** donné par une fonction f :

• on se place sur l'axe des x, à l'abscisse a.
•• on place le point M de $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse a.
••• l'ordonnée du point M est la valeur cherchée : $f(a)$.



- Méthode graphique pour déterminer les éventuels antécédents d'un nombre ***b*** donné par une fonction :



• on se place sur l'axe des y à l'ordonnée b.
•• on place les éventuels points de $\mathcal{C}_f$ ayant pour ordonnée b.
•• les abscisses de ces éventuels points sont les antécédents de b par f.

⚠ Les images ($f(x)$) se lisent tjs sur l'axe des ordonnées (y).

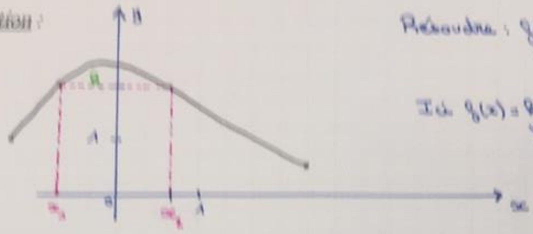
Les antécédents (x) se lisent tjs sur l'axe des abscisses (x).

III – Résolution graphique d'équations

Propriété : Equation de la forme $f(x) = k$, où k est un réel donné et f une fonction donnée, et x la variable. (x : l'inconnue)

Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = k$, sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et de la droite horizontale d'équation $y = k$, que j'appellerai provisoirement, la droite d'ordonnée constante égale à k.

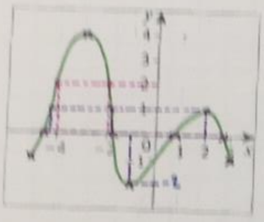
Illustration :



Résoudre : $f(x) = k$ revient à chercher le(s) antécédent(s) de k par f.

Ici $f(x) = k$ admet deux solution : x_1 et x_2.
$S = \{x_1 ; x_2\}$

Exemple : Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, puis résoudre graphiquement sur D_f les équations suivantes :



$D_f = [-5 ; 3]$

a) $f(x) = 2$; b) $f(x) = 1$; c) $f(x) = 0$; d) $f(x) = -2,5$; e) $f(x) = -2$.

a) $S = \{-4 ; 2\}$

b) $f(x) = 1$ lorsque $x \approx -4,2$ ou $x \approx -1,9$ ou $x = 2$.

c) $f(x) = 0$ lorsque $x \approx -4,5$ ou $x \approx -1,8$ ou $x \approx 0,7$ ou $x \approx 2,8$.

d) $f(x) = -2,5$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$

e) $f(x) = -2$ lorsque $x = -1$: $S = \{-1\}$.

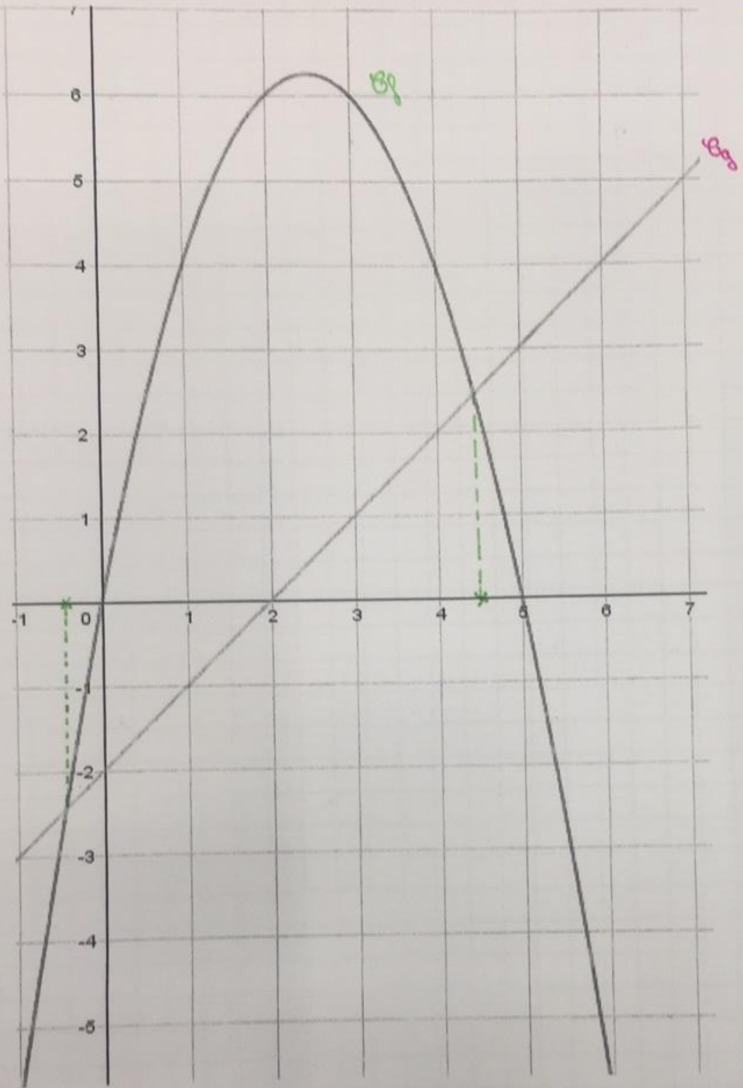
♥♥ **Propriété** : Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, où f et g sont deux fonctions données, et x la variable.

Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des éventuels points d'intersection.

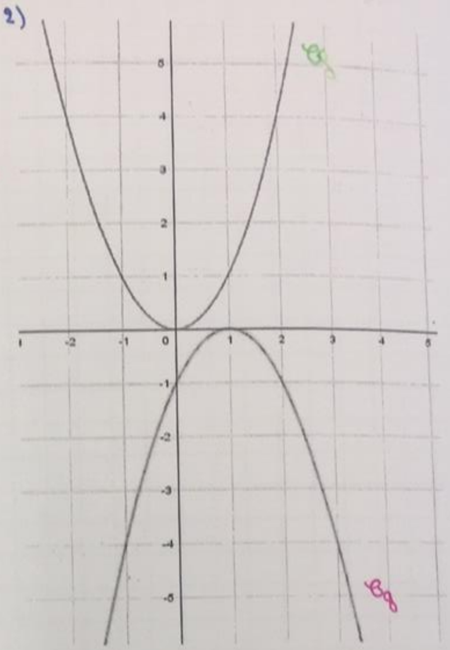
Illustration :

__Exemples__ : résoudre graphiquement les équations : $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1)



2)



1) $f(x) = g(x)$ a pour solutions : $x \approx -0{,}3$ ou $x \approx 4{,}4$.

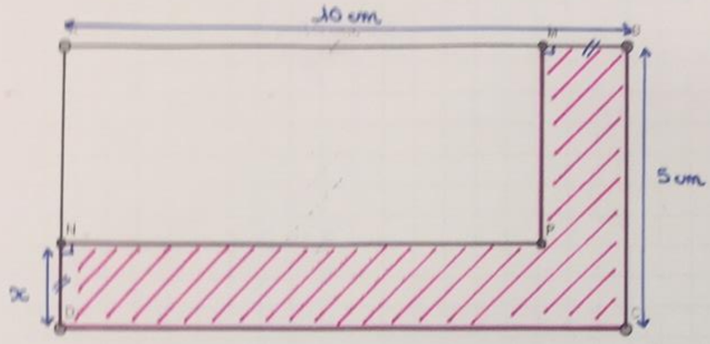
2) $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

Exercice 5

ABCD est un rectangle tel que : $AB = 10$ *cm* et $AD = 5cm$.

Soit *M* un point appartenant au segment [*AB*], et *N* un point appartenant au segment [*AD*] tel que $MB = ND$. On construit enfin le point *P* tel que *AMPN* soit un rectangle.

On note $x = MB = ND$.



a) A quel intervalle noté *I*, le nombre *x* appartient-il ?

b) Vérifier que pour tout réel *x* appartenant à *I*, l'aire du polygone *MBCDNPM*, notée ***f(x)***, est égale à $-x^2 + 15x$.

hexagone

c) Existe-il une (des) valeur(s) de *x* appartenant à *I* pour laquelle l'aire de ce polygone soit égale à 8 cm^2? Expliquer votre démarche.

a) $0 \leq x \leq 5$, càd $x \in I$ où $I = [0 ; 5]$.

b) $x \mapsto f(x) =$ aire de (MBCDNPM) $= A(ABCD) - A(AMPN) = (10 \times 5) - (10 - x) \times (5 - x) = 50 - (50 - 10x - 5x + x^2$
$x \mapsto f(x) = 50 - 50 + 10x + 5x - x^2 = -x^2 + 15x$.

c) On doit résoudre l'équation : $f(x) = 8$ càd $-x^2 + 15x = 8$

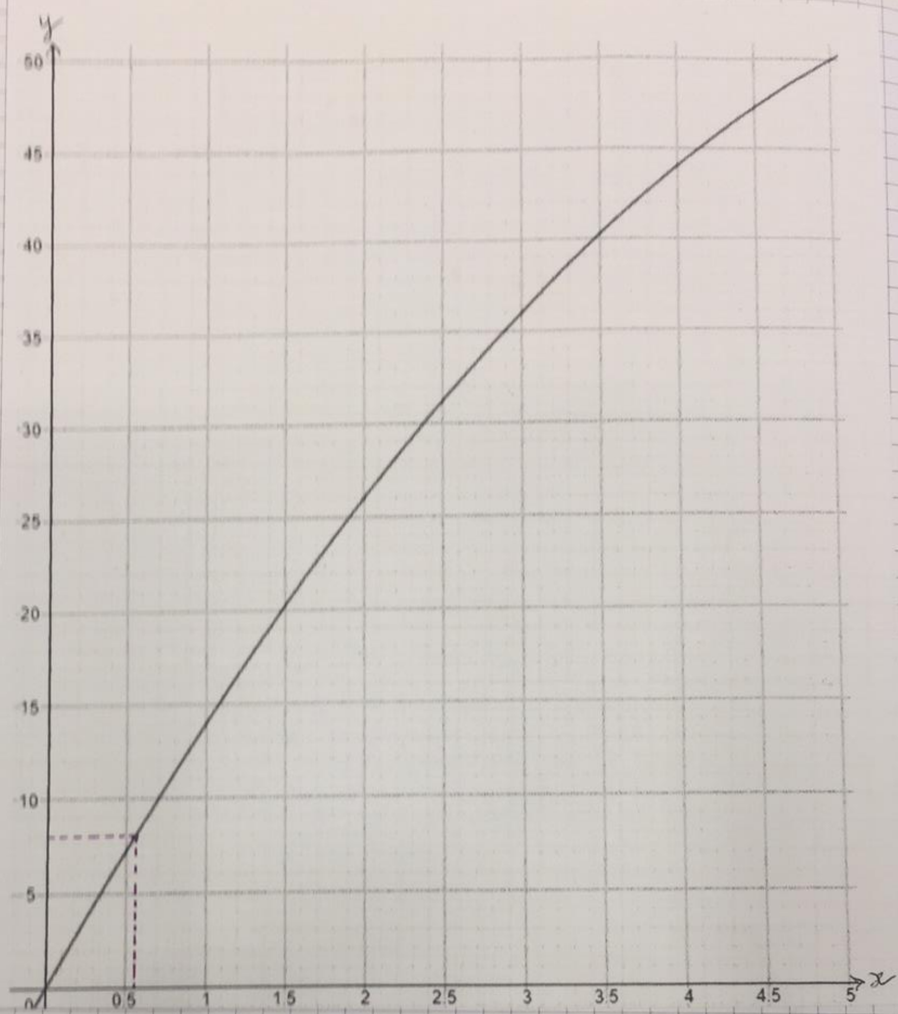
On procède donc graphiquement en traçant la courbe représentative de la fonction f sur $I = [0 ; 5]$ (et $f(x) = -x^2 + 15x$).

En résolvant graphiquement l'équation $f(x) = 8$, cette dernière admet 1 seule solution sur $[0 ; 5]$.

$x \approx 0,55$ cm. Il y a une seule valeur de x pr laquelle l'aire du polygone admet pour aire 8 cm^2, c'est lorsque $x \approx 0,55$ cm.

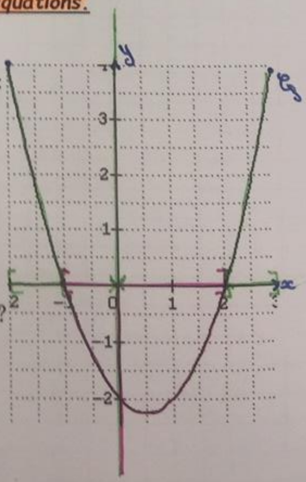
⇒ voir graphique au verso.

⚠ Résolut° graphique ⇒ valeur approchée.



IV - *Signe des valeurs prises par une fonction, résolution graphique d'inéquations.*

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction *f* ci-contre, déterminer :



a) L'ensemble de définition de *f.*

b) Le signe des nombres : ***f(0)*** ; ***f(1)*** ; ***f(-1,5)*** ; ***f(3).***

c) Sur quel intervalle les valeurs prises par la fonction *f* sont-elles négatives ? ou nulles

d) Sur quel(s) intervalle(s) les valeurs prises par *f* sont-elles strictement positives ?

e) On résume l'étude du signe des valeurs prises par la fonction *f* en faisant le tableau suivant, appelé ......de signes..................... :

a) $\mathcal{D}_f = [-2 ; 3]$

b) $f(0) < 0$

$f(1) < 0$

$f(-1,5) > 0$

$f(3) > 0$

c) Sur $[-1 ; 2]$, les valeurs prises par f sont négatives ou nulles :

$f(x) \leq 0$ sur $[-1 ; 2]$.

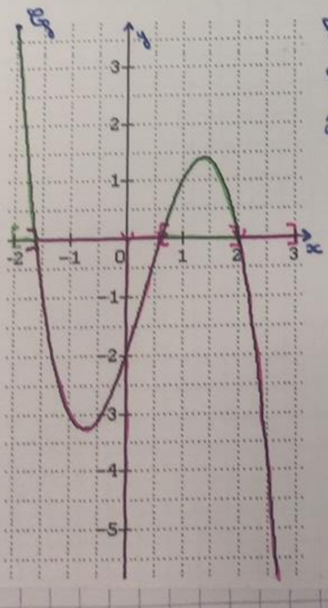
d) $f(x) > 0$ lorsque $x \in [-2 ; -1[\cup]2 ; 3]$.

e)

x	-2		-1		2		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 6

Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ les inéquations : $f(x) < 0$, puis $f(x) \geq 0$, puis dresser le tableau de signes de la fonction f dont on vous donne le graphe :



$f(x) < 0$ ssi $x \in]-1,6 ; 0,6[\cup]2 ; 3]$.

$f(x) \geq 0$ équivaut à $x \in [-2 ; -1,6] \cup [0,6 ; 2]$.

Donc :

x	-2		$-1,6$		$0,6$		2		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 7

f est une fonction définie sur $[-2\ ;\ 5]$ qui a pour tableau de signes :

$f(2)=0$

x	-2		0		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$f(0)=0$
courbe passe par l'origine

→ voir graphique après ex.

Construire une courbe représentative possible pour f dans un repère orthonormé.

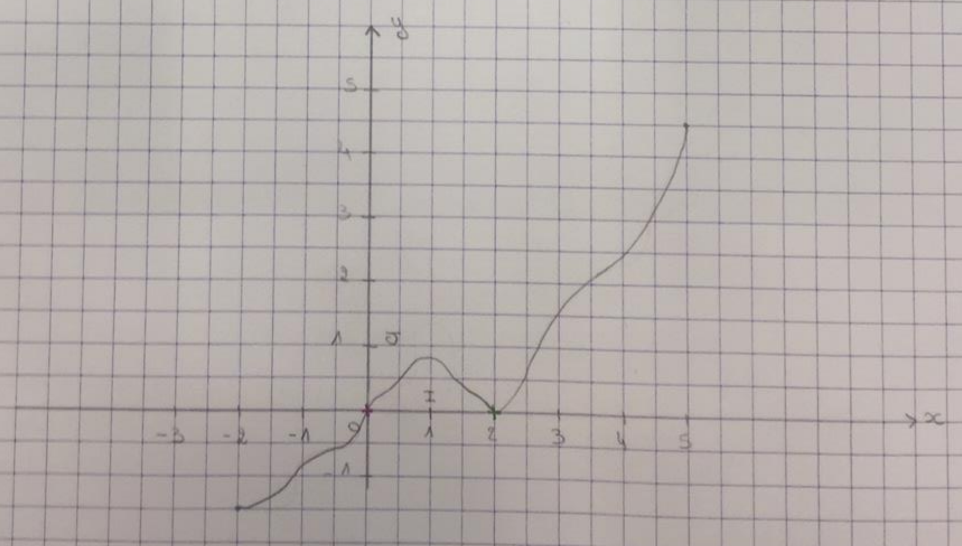
Remarque cruciale : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Résoudre l'inéquat°

$f(x) < 0$ sur I équivaut graphiquement à chercher les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée négative, cad situés en dessous de l'axe des abscisses.

$f(x) > 0$ sur I équivaut graphiquement à chercher les abscisses de tous les points de $\mathcal{C}_f$ qui ont une ordonnée positive, cad au dessus de l'axe des abscisses.

$f(x) = 0$ équivaut graphiquement à chercher les abscisses des éventuels points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

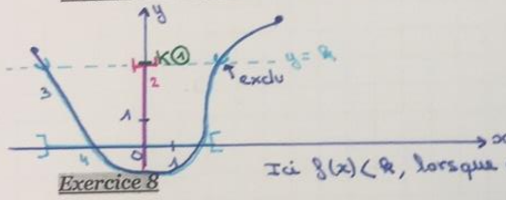


Propriété fondamentale

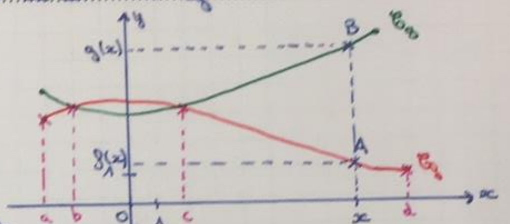
Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I, et k un réel fixé.

- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < k$ revient à chercher les abscisses (x) de tous les points de la courbe C_f dont l'ordonnée est strictement inférieure à ce réel k...
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > k$ revient à chercher les abscisses (x) de tous les points de la courbe C_f dont l'ordonnée est strictement supérieure à k....
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < g(x)$ revient à : chercher les abscisses (x) de tous les points de la courbe C_f qui sont situés EN DESSOUS de ceux de C_g.......
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > g(x)$ revient à : chercher les abscisses de tous les points de C_f qui sont situés au-dessus de ceux de C_g.......................

Illustrations et justification :



Ici $f(x) < k$, lorsque $a < x < b$

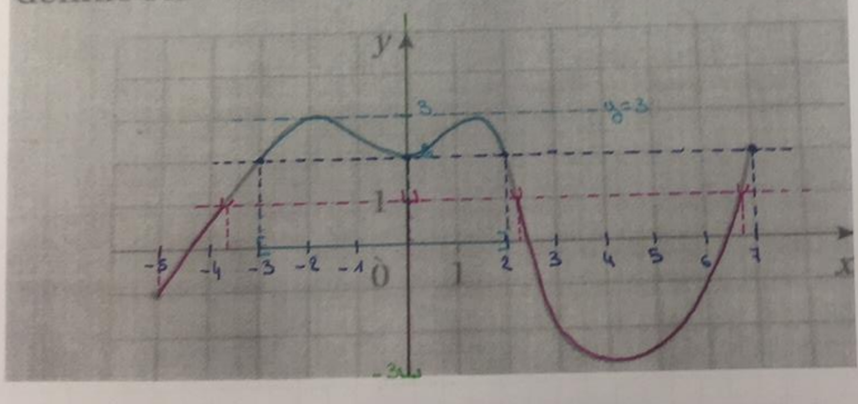


Ici $f(x) < g(x) \iff a \leq x \leq b$ et $c \leq x \leq d$.

Exercice 8

1) En s'aidant des graphiques ci-dessous, résoudre graphiquement les équations et inéquations demandées :

Soit la représentation graphique de la fonct
définie sur l'intervalle [−5 ; 7].



a) $f(x) = 2$; b) $f(x) < 1$; c) $f(x) \geq -3$; d) $2 \leq f(x) \leqslant 3$

a) $f(x) = 2$ a pour solut° : $x = -3$; $x = 0$; $x = 2$; $x = 7$. $S = \{0 ; -3 ; 2 ; 7\}$

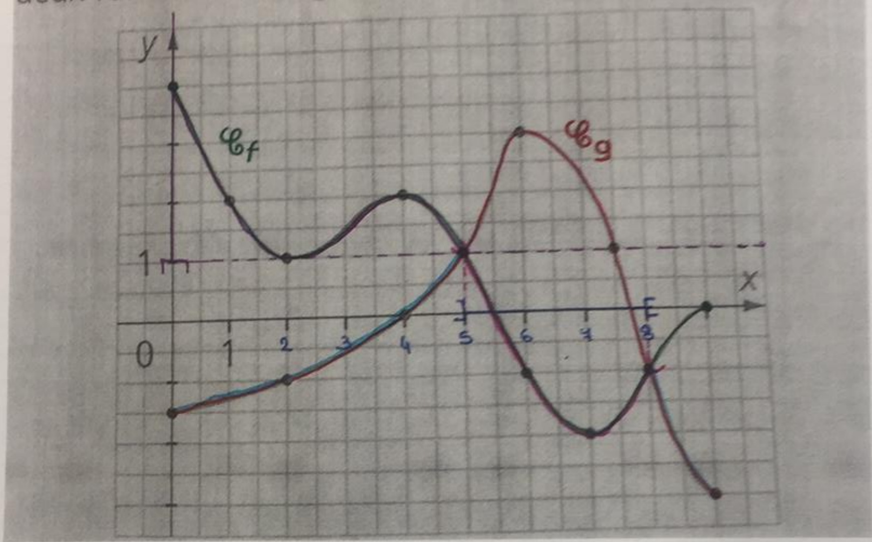
b) $f(x) < 1$ lorsque : $-5 \leqslant x < -3,7$ ou $2,2 < x < 6,7$.

c) $f(x) \geqslant -3$ a pr solut° : $[-5 ; 7]$. $S = [-5 ; 7]$.

d) $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$ a pr solu° : $[-3 ; 2]$. $S = [-3 ; 2]$.

2)

On donne les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur [0 ; 9].



a) $f(x) < g(x)$; **b)** $g(x) \leq f(x)$; **c)** $1 < f(x) < g(x)$.

a) $f(x) < g(x)$ a pr sol° : $]5 ; 8[$. $S =]5 ; 8[$.

⇒ Je veux que $\mathscr{C}_f$ soit située en dessous de $\mathscr{C}_g$.

b) $g(x) \leqslant f(x)$ a pr sol° : $[0 ; 5] \cup [8 ; 9]$. $S = [0 ; 5] \cup [8 ; 9]$.

⇒ Je veux que $\mathscr{C}_g$ soit au dessous de $\mathscr{C}_f$ (en incluant les points d'intersect°).

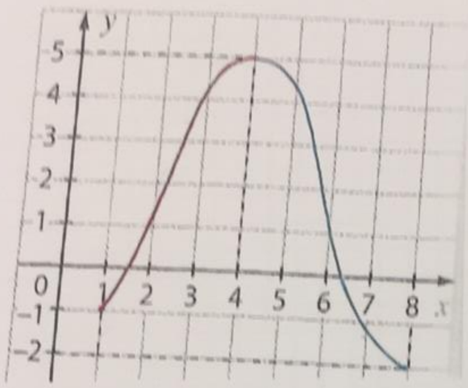
c) $1 < f(x) < g(x)$

⇒ On cherche les points de $\mathscr{C}_f$ qui ont une ordonnée strictement supérieure à 1 et situés au dessous de $\mathscr{C}_g$.

$S = \varnothing$

V - Sens de variation d'une fonction et tableau de variation

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8].



On observe que lorsque les valeurs prises par x augmentent en restant dans l'intervalle [1 ; 4], les valeurs $f(x)$ augmentent également : ceci se traduit graphiquement par une courbe *"ascendante"* sur l'intervalle *[1 ; 4]*.

A contrario, lorsque les valeurs de x augmentent en restant dans l'intervalle *[4 ; 8]*, les valeurs prises par f, c'est-à-dire les valeurs $f(x)$ diminuent : ceci se traduit graphiquement par une portion de courbe *"descendante"* sur l'intervalle [4 ; 8].

Nous allons rigoureusement définir ces phénomènes de courbes ascendantes, respectivement courbes descendantes.

Définition fondamentale

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f, et I un intervalle contenu dans D_f.

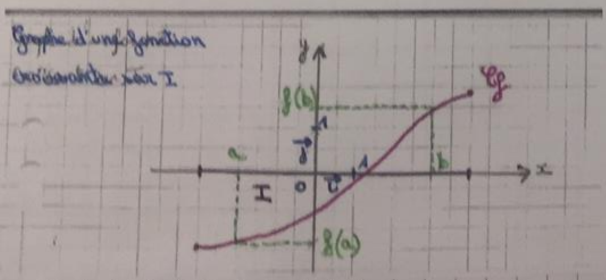
1) f est dite croissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ augmente.

Ceci se traduit rigoureusement par :

♥♥ ***f est croissante sur I lorsque :***
Pour tous réels a *et* b ***appartenant à I, si*** $a \leq b$***, alors*** $f(a) \leq f(b)$.♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que celui des nombres a et b : une *fonction croissante* sur un intervalle *conserve donc l'ordre dans les inégalités* : antécédents et images sont rangés dans le même ordre lorsqu'on a une fonction croissante sur un intervalle !

Illustration :



2) f est dite décroissante sur I si lorsque x augmente en appartenant à I, alors $f(x)$ diminue.

Ceci se traduit rigoureusement par :

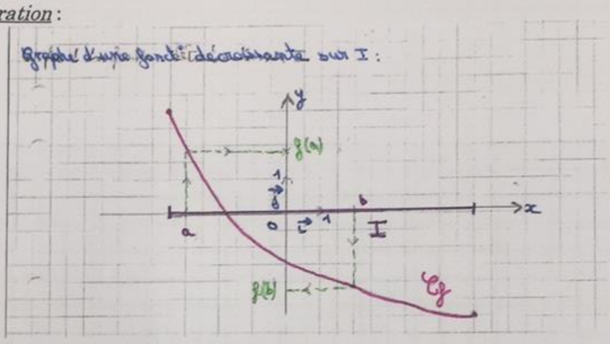
♥♥ ***f est décroissante sur I lorsque :***
*Pour tous **réels** a **et** b **appartenant à** I**, si** $a \leq b$**, alors** $f(a) \geq f(b)$.* ♥♥

En des termes plus savants, les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans l'ordre contraire de celui des nombres a et b.

Une *fonction décroissante* sur un intervalle *change donc l'ordre dans les inégalités* :

Antécédents et images sont rangés dans l'ordre contraire lorsqu'on a une fonction décroissante sur un intervalle !

Illustration :

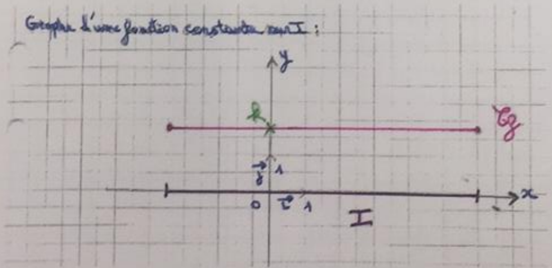


13

Définition

Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si les valeurs prises par f ont toutes la même valeur sur I, c'est-à-dire s'il existe un réel k, tel que pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on ait : $f(x) = k$.

Illustration :



Dans le cas d'une fonction constante sur un intervalle I, C_f est donc une portion de droite parallèle à l'axe des abscisses !

Définition

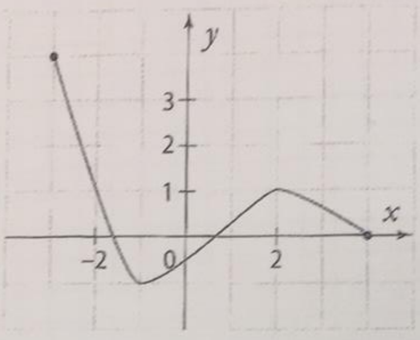
f est dite monotone sur l'intervalle I si f est soit croissante sur I soit décroissante sur I, c'est-à-dire si elle garde le même sens de variation sur tout l'intervalle I.

Définition

Etudier le sens de variation d'une fonction *f, c'est déterminer les intervalles sur lesquels f croît et ceux sur lesquels f décroît.*

Exemple :

f est une fonction définie sur $[-3 ; 4]$ dont voici la courbe ci-dessous.



Avec des phrases, décrivons le sens de variation de f sur $[-3 ; 4]$:

- f décroît sur l'intervalle $[-3 ; -1]$.
- f croît sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
- f décroît sur l'intervalle $[2 ; 4]$.

On résume cette étude en construisant un tableau, nommé ***tableau de variation*** de la fonction f:

x	-3		-1		2		4
$f(x)$	4	↘	-1	↗	1	↘	0

La première ligne du tableau contient les bornes de l'ensemble de définition de f et les éventuelles valeurs de x en lesquelles le sens de variation de f change.

La seconde ligne contient des flèches qui matérialisent le sens de variation de f, avec la convention qu' une ***flèche ascendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction croissante*** sur ce même intervalle, et qu'une ***flèche descendante*** sur un intervalle correspond à une ***fonction décroissante*** sur ce dernier.
On met aussi, lorsque c'est possible, les images par f des valeurs mises dans la première ligne du tableau.

Enfin, même si c'est assez rare en pratique, une flèche horizontale représente une fonction constante.

Exemple :

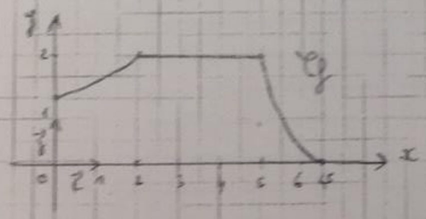


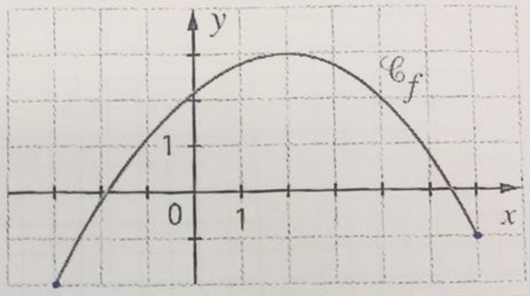
Tableau de variation de f sur $[0 ; 6{,}5]$:

x	0		2		5		$6{,}5$
$f(x)$	1	↗	2	→	2	↘	0

Exercice 9

1)

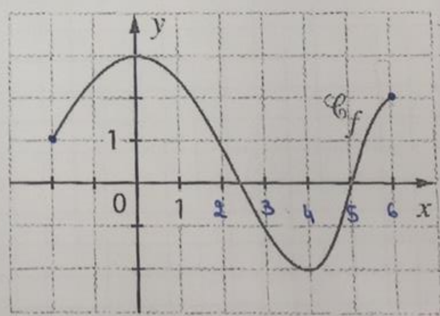
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ donnée ci-contre. Dresser le tableau de variation de f.



x	-3		2		6
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1

2) On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.

1. Décrire par des phrases les variations de f.
2. Construire le tableau de variation de f.

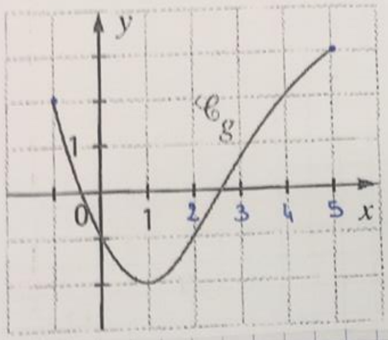


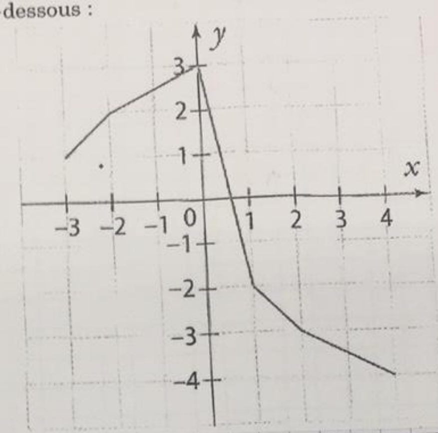
1. - f croît sur l'intervalle $[-2 ; 0]$.
   - f décroît sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
   - f croît sur l'intervalle $[4 ; 6]$

2.

x	-2		0		4		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	2

3) Dresser le tableau de variation des fonctions g et h sur leur ensemble de définition dont on donne les courbes représentatives C_g et C_h ci-dessous :





x	-1		1		5
$g(x)$	2	↘	-2	↗	3

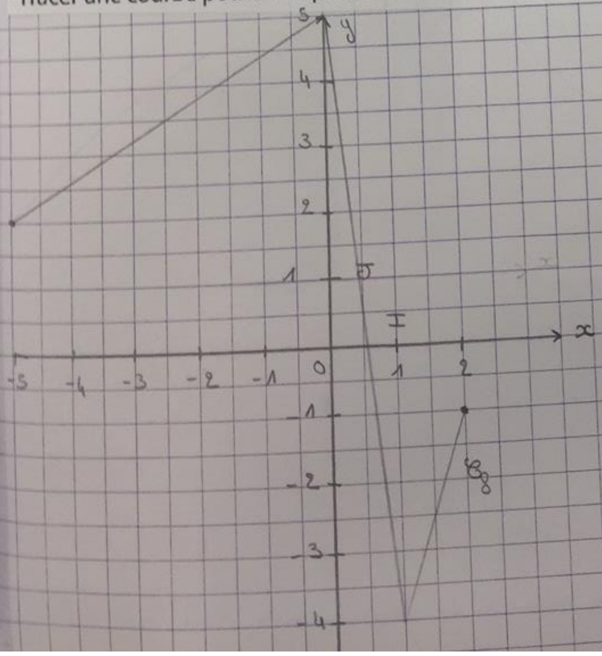
x	-3		0		4
$h(x)$	1	↗	3	↘	-4

Exercice 10

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		0		1		2
$f(x)$	2	↗	5	↘	-4	↗	-1

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.



Exercice 11

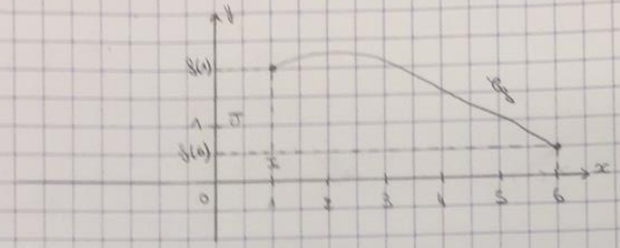
f est une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;6]$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ?

« Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f est décroissante sur $[1\,;6]$. »

2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

1. Faux : Contre-exemple graphique : Ici : $f(1) \geqslant f(6)$ et f n'est pas décroissante sur $[1;6]$!!!



2. Rappel : la réciproque de : "Si $\underbrace{A\ldots}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{B\ldots}_{\text{conclus°}}$", c'est "Si B, alors A".

Ici la réciproque est : " Si f décroît sur $[1;6]$, alors $f(1) \geqslant f(6)$".

Déf : f décroît sur $[1,6]$ signifie que :
Pr ts réels a et b, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$
En particulier, pr $a = 1$ et $b = 6$: $1 \leqslant 6$ donc $f(1) \geqslant f(6)$.

Donc la réciproque est vraie.

Exercice 12

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	4	5
$f(x)$	0				-2			3

a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.
b) Même question avec $f(-3)$ et $f(-2)$.
c) Peut-on comparer, avec les informations dont on dispose, les nombres $f(-1)$ et $f(2)$?

a) $2 < 4$ et f croît sur $[2;4]$ car elle croît sur $[1;5]$.

Donc par déf f croissante, on a : $f(2) \leqslant f(4)$.

b) $-3 \leqslant -2$

Or f décroît sur $[-3,-2]$, donc $f(-3) \geqslant f(-2)$.

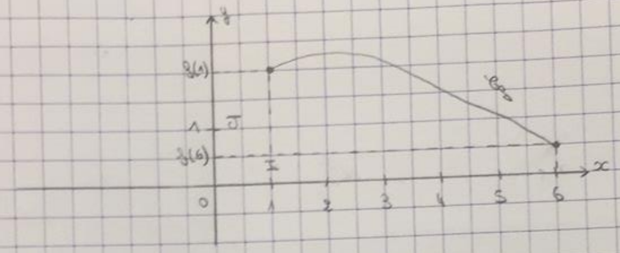
c) On ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(2)$ à l'aide du seul tableau de varia° car f n'est pas monotone sur $[-1;2]$.

Exercice 11

f est une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;6]$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ?
« Si $f(1) \geqslant f(6)$, alors f est décroissante sur $[1\,;6]$. »
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

1. Faux : Contre-exemple graphique : Ici : $f(1) \geqslant f(6)$ et f n'est pas décroissante sur $[1;6]$!!!



2. Rappel : la réciproque de : "Si $\underbrace{A\ldots}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{B\ldots}_{\text{conclus°}}$", c'est "Si B, alors A".

Ici la réciproque est : " Si f décroît sur $[1;6]$, alors $f(1) \geqslant f(6)$".

Déf : f décroît sur $[1;6]$ signifie que :
Pr ts réels a et b, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$
En particulier, pr $a = 1$ et $b = 6$: $1 \leqslant 6$ donc $f(1) \geqslant f(6)$.

Donc la réciproque est vraie.

Exercice 12

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	4	5
$f(x)$	0 ↘				-2 ↗			3

a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.
b) Même question avec $f(-3)$ et $f(-2)$.
c) Peut-on comparer, avec les informations dont on dispose, les nombres $f(-1)$ et $f(2)$?

a) $2 < 4$ et f croît sur $[2;4]$ car elle croît sur $[1;5]$.

Donc par déf f croissante, on a : $f(2) \leqslant f(4)$.

b) $-3 \leqslant -2$

Or f décroît sur $[-3;2]$, donc $f(-3) \geqslant f(-2)$.

c) On ne peut pas comparer $f(-1)$ et $f(2)$ à l'aide du seul tableau de variat° car f n'e[st pas] monotone sur $[-1;2]$.

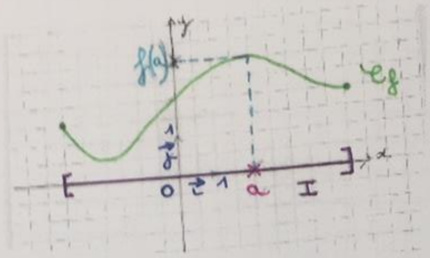
VI - Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.

♥♥♥ ***f admet un maximum sur I atteint lorsque $x = a$*** si **pour tout réel x appartenant à I**, on a : $f(x) \leq f(a)$.♥♥♥

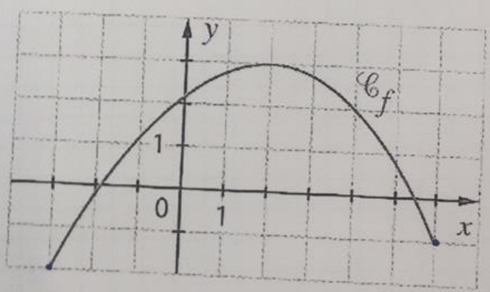
Le réel ***f(a)*** est appelé le maximum de f sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de f situé *le plus "haut possible"*.

Illustration :



f admet un maximum sur I atteint lorsque x = a.
La valeur du maximum est égale à f(a).
⚠ La valeur du maximum se lit tjs sur l'axe des ordonnées (↑y).

Exemple



Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :

Le maximum de f sur l'intervalle [-3 ; 6] est égal à .3..
Ce maximum est atteint lorsque x = .2.

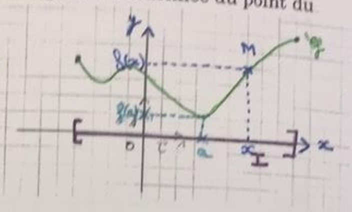
Remarque : attention à ne pas confondre la **valeur du maximum de f** sur un intervalle I, et la **valeur de x en lequel ce maximum est atteint**. Dire que f admet un maximum n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle.

Définition

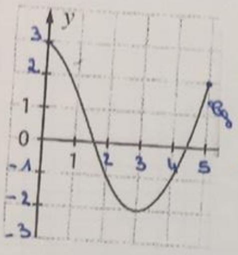
Une fonction f admet un minimum sur un intervalle I atteint lorsque $x = a$, lorsque pour tout réel x appartenant à l'intervalle I, on a : $f(x) \geq f(a)$.

Le réel ***f(a)*** est appelé le minimum de ***f*** sur l'intervalle I : il correspond à l'ordonnée du point du graphe de ***f*** situé *le plus "bas possible"*.

Illustration : Ici f admet un minimum sur I atteint lorsque $x = a$. Ce minimum est égal à $f(a)$.



Exemple : Grâce à la courbe C_f ci-contre, on peut dire que :



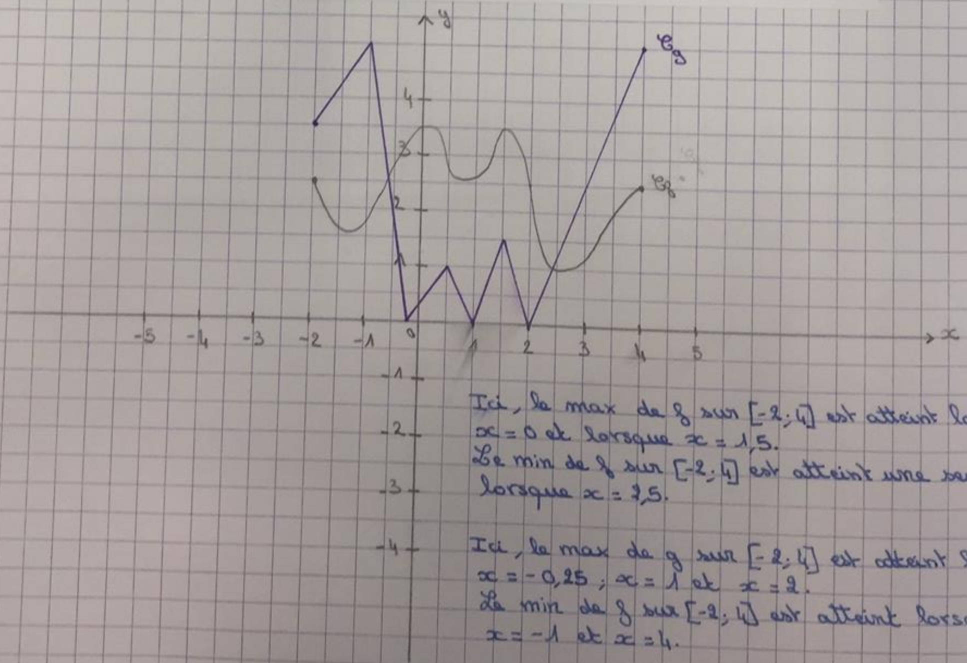
Ici, $D_f = [0 ; 5]$.

- f admet pr minimum -2 sur $[0 ; 5]$.
  Ce minimum est atteint lorsque $x = 3$.
- Le maximum de f sur $[0 ; 5]$ est égal à 3, et ce maximum est atteint lorsque $x = 0$.

Exercice supplémentaire

a) Tracer une courbe d'une fonction ***f*** définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint une seule fois.

b) Tracer une courbe d'une fonction ***g*** définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et dont le maximum sur cet intervalle est atteint deux fois et le minimum est atteint trois fois.



Ici, le max de f sur $[-2 ; 4]$ est atteint lorsque $x = 0$ et lorsque $x = 1,5$.
Le min de f sur $[-2 ; 4]$ est atteint une seule fois lorsque $x = 2,5$.

Ici, le max de g sur $[-2 ; 4]$ est atteint lorsque $x = -0,25$; $x = 1$ et $x = 2$.
Le min de f sur $[-2 ; 4]$ est atteint lorsque $x = -1$ et $x = 4$.

Remarque

Cet exercice illustre le fait que dans la définition donnés de maximum et de minimum, il n'y a pas nécessairement unicité de l'abscisse en laquelle ce maximum est atteint.

Définition : On appelle ***extremum*** d'une fonction f sur un intervalle I tout éventuel ***minimum*** ou ***maximum*** de f sur I.

Par exemple, sur le graphique de la page précédente, on peut dire que -2 et 3 sont des **extrema** de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. *(Pluriel de extremum = extrema).*

Exercice 13

Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		1		5
$f(x)$	-7	↗	2	↘	-6

Déterminer les extrema de f sur son ensemble de définition, en précisant pour quelle valeur ils sont atteints.

Le max de f sur $[-3, 5]$ est égal à 2 et il est atteint lorsque $x = 1$.
Le min de f sur $[-3, 5]$ est égal à -7 et il est atteint lorsque $x = -3$.

Les extrema de f sont égaux à -7 et 2.

Exercice 14 *Comment prouver qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle donné ?*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 4 - (x - 2)^2$.
2) Calculer $f(2)$ puis démontrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq f(2)$.
Qu'en déduisez-vous concernant la fonction f ?

1. Développons pr tt réel x :

$4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = 4-x^2+4x-4 = -x^2+4x = f(x)$

Donc on a : $f(x) = 4-(x-2)^2$

2. $f(2) = 4-(2-2)^2 = 4-0^2 = 4$

On doit prouver que pr tt réel x, $f(x) \leq 4$.

Or pr tt réel x, $(x-2)^2 \geq 0$ (un carré de réel vaut au min. 0).

Donc $-(x-2)^2 \leq 0$ on x par -1, $-1 < 0$

Donc $\underbrace{4-(x-2)^2}_{f(x)} \leq 4+0$

Donc $f(x) \leq 4$

"Conclu" : On a prouvé que pr tt réel x : $f(x) \leq 4$ et $4 = f(2)$, donc $f(x) \leq f(2)$;

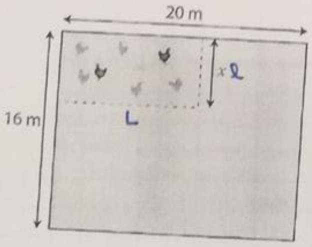
Cela signifie dc que f admet un max sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x = 2$ et ce max est égal à $4 = f(2)$

Exercice 15

Ghislaine a un terrain rectangulaire délimité par 4 murs.

Elle dispose de 12 mètres de grillage pour fabriquer un enclos rectangulaire au bout de son jardin afin d'y accueillir des poules et des coqs.

Elle a dessiné un plan de son futur enclos sur lequel le grillage est représenté par des pointillés.



Ghislaine aimerait que ses volailles disposent de la plus grande surface possible pour picorer.

On note x la largeur exprimée en mètres de son enclos, et $f(x)$ l'aire de l'enclos utilisant les 12 mètres de grillage.

a) A quel intervalle le réel x appartient-il ?

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

c) Conjecturer, à l'aide de votre tablette, le maximum de f sur $[0 ; 12]$, et pour quelle valeur de x il est atteint.

d) Démontrer cette conjecture et donner à Ghislaine la largeur et longueur de l'enclos d'aire maximale.

a) $0 < x < 12$

Donc $x \in]0 ; 12[$

b) $f(x) =$ aire enclos $= L \times l$ avec $l = x$ et $L = 12 - x$

$f(x) = x(12 - x)$

$f(x) = 12x - x^2$

$f(x) = -x^2 + 12x$

c) Grâce à la courbe $\mathcal{C}_f$ tracé sur $]0 ; 12[$:

On constate que f admet pr max 36 sur $]0 ; 12[$ et que ce max est atteint lorsque $x = 6$.

d) Ici, on doit prouver que f admet pr max 36 et que ce max est atteint lorsque $x = 6$.

Montrons dc que pr tt réel x appartenant à $]0 ; 12[$, $f(x) \leq f(6)$ avec $f(6) = -6^2 + 12 \times 6 = 36$

$f(6) = 36$

càd: $f(x) \leq 36$

Or $f(x) - 36 = -x^2 + 12x - 36 = -(x^2 - 12x + 36) = -(x-6)^2$.

Or $(x-6)^2 \geqslant 0$, dc $-(x-6)^2 \leqslant 0$

donc $f(x)-36 \leqslant 0$, dc $f(x) \leqslant 36$ et $36 = f(6)$, on a bien :

$f(x) \leqslant f(6)$: f admet dc pr max 36 sur $]0;12[$.

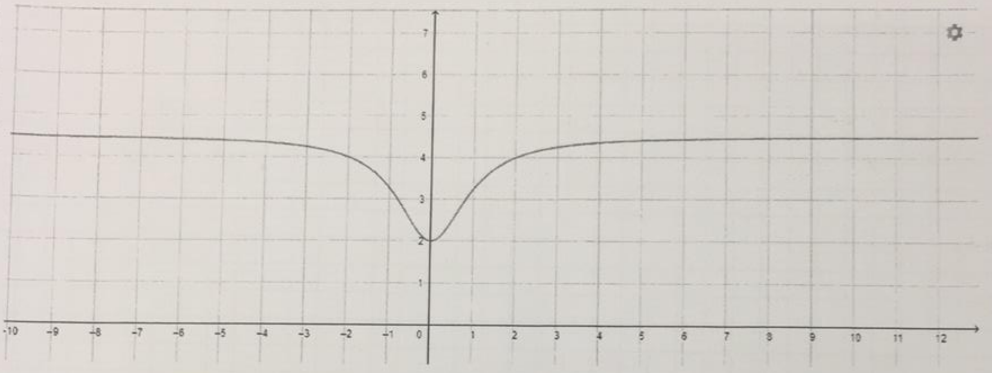
Ce max est atteint lorsque $x=6$.

Conclu° : L'aire de l'enclos est max lorsque $x = 6$ m.

Rq : L'enclos d'aire max sera dc de forme carré.

Exercice 16

f est la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{9x^2+4}{2(x^2+1)}$ et sa courbe représentative ci-dessous :



Calculer *f(0)*, puis démontrer que le minimum de *f* sur ℝ est atteint lorsque $x = 0$.

$f(0) = \frac{9 \times 0^2 + 4}{2(0^2+1)} = \frac{4}{2} = 2$

*) Rappel : Pour montrer que f admet un minimum sur ℝ atteint lorsque $x=0$, il suffit de prouver que : pr tt réel x, $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore que $f(x) \geqslant 2$.

Rappel : Pr prouver que $A \geqslant B$, il suffit par exemple de prouver que $A - B \geqslant 0$.

Ici montrons que pr tt réel x, $f(x) - 2 \geqslant 0$:

Or, pr tt réel x : $f(x) - 2 = \frac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - \frac{2}{1} = \frac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - \frac{2(2(x^2+1))}{2(x^2+1)} = \frac{9x^2+4-4(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{9x^2+4-4x^2-4}{2(x^2+1)}$

$f(x) - 2 = \frac{5x^2}{2(x^2+1)}$

Or, pr tt réel x, $x^2 \geqslant 0$, et $5 > 0$ donc $5x^2 \geqslant 0$

De m̂ $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ et $2 > 0$, donc $2(x^2+1) > 0$

d'après la règle des signes du quotient $\frac{9x^2+4}{2(x^2+1)} \geqslant 0$

Donc $f(x) - 2 \geqslant 0$

Donc $f(x) \geqslant 2$ donc $f(x) \geqslant f(0)$.

f admet bien un minimum sur ℝ atteint lorsque $x = 0$: Ce minimum est égal à 2.