Chapitre VII LES VECTEURS

I – Généralités

Définition 1 : On dit que deux droites ont la même direction lorsqu'elles sont parallèles.

Remarque : une direction étant fixée, il y a deux sens de parcours sur une droite donnée.

Illustration : Sur la droite (AB), il y a deux sens de parcours : de A vers B et de B vers A.

Définition 2 : Un vecteur est un *"segment de droite orienté »*.

Illustration :

Il faut trois renseignements pour caractériser un vecteur :

- Sa direction (celle de la droite (AB)).
- Son sens (de A vers B).
- Sa longueur, encore appelée la norme du vecteur, qui n'est autre que la longueur du segment $[AB]$.

Le point A est appelé l'*origine* du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est appelé *l'extrémité* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
La flèche sur un vecteur va toujours de l'origine vers l'extrémité de ce vecteur !

Remarques importantes : Un vecteur n'est ni une longueur, ni une droite, ni un segment.

Ne pas oublier la flèche dans la notation des vecteurs qui donne tout son sens au vecteur.

En particulier, $\underbrace{\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}}_{\text{vecteurs}}$, tandis que $\underbrace{AB = BA}_{longueurs}$, $\underbrace{[AB]=[BA]}_{segments}$, et $\underbrace{(AB)=(BA)}_{droites}$

Des cas particuliers de vecteurs : Le vecteur nul n'a pas de direction, ni de sens, et sa norme vaut 0.

On l'appellera le vecteur nul : on le notera $\vec{0}$: un vecteur est nul lorsque son origine coïncide avec son extrémité.

Deux vecteurs qui ont la même direction, la même norme, mais des sens contraires sont dits opposés.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés : par analogie avec les nombres, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $-\overrightarrow{AB}$ et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Illustration :

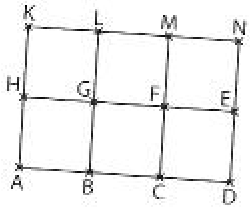
Propriété : **égalité de deux vecteurs.**

♥♥**Deux vecteurs sont égaux s'ils ont *les mêmes caractéristiques*, à savoir s'ils ont la même direction, le même sens, et la même norme.** ♥♥

Illustration : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie donc que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, que l'on se déplace pour aller de A vers B dans le même sens que pour aller de C vers D, et qu'enfin, les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.

Exemple

On donne la figure ci-contre formée de six carrés juxtaposés :



a) Citer deux vecteurs égaux.

b) Citer deux vecteurs qui ont seulement la même norme.

c) Citer deux vecteurs opposés.

d) Citer deux vecteurs qui ont la même direction, des sens opposés et des normes différentes.

✂---

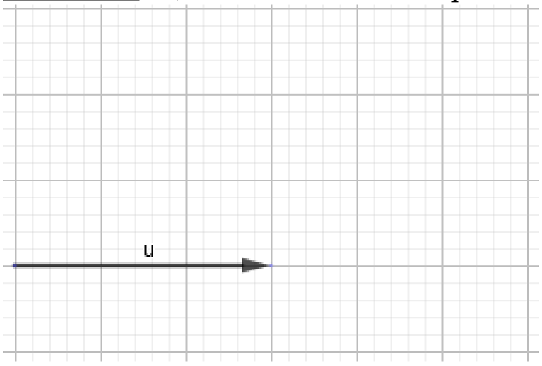
Remarque cruciale : A partir de maintenant, on emploiera fréquemment le terme de <u>représentant d'un vecteur</u> : <u>un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur qui est égal à $\overrightarrow{AB}$</u>.

Comme il y a une infinité de représentants d'un vecteur donné, on note conventionnellement $\vec{u}$ un tel représentant, sans nommer son origine et son extrémité.

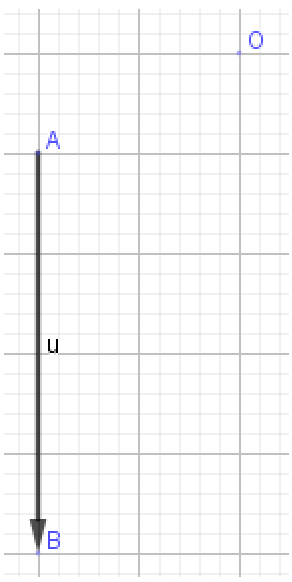
Exemple

Donner deux représentants du vecteur $\overrightarrow{GE}$ dans l'exemple précédent.

Illustration : *a*) Construire deux représentants du vecteur $\vec{u}$ dessiné ici :



b) Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont l'origine est le point O :



II – Lien entre les vecteurs et la géométrie

Nous allons voir, grâce à la propriété suivante, que les vecteurs constituent un outil très performant pour faire de la géométrie.

Théorème fondamental **(Fait le lien entre les vecteurs et la géométrie).**

♥♥♥♥ $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si …………… ♥♥♥♥

Illustration :

Preuve :

✂---

Avertissement : dès qu'on parle de vecteurs, de parallélogrammes, faites toujours, même si cela n'est pas demandé, une figure à main levée.
J'attire votre attention sur le fait que $ABCD$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et non pas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ comme on est souvent tenté de l'écrire par rapidité. Attention à l'ordre des points.

Exemples

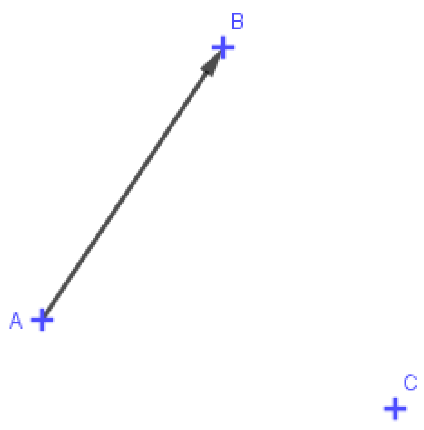
- $IJKL$ est un parallélogramme équivaut à dire que ……………………………………………………..
- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{UV}$ équivaut à dire que ……………………………………………………………………………..

Application : Construction géométrique d'un représentant d'un vecteur donné (sur papier sans carreau).

Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine C.

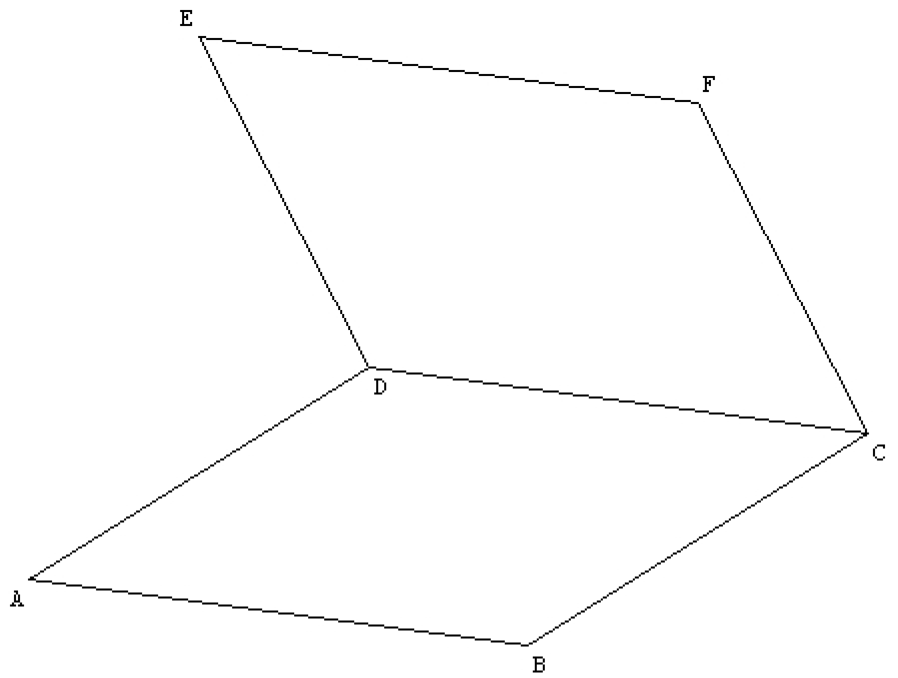
Méthode :

Construction :



Exercice 1

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ et $CDEF$ sont des parallélogrammes.
Démontrer que $ABFE$ est un parallélogramme.



✂---

Exercice 2

Construire trois points A, I et B tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
Que peut-on dire du positionnement de ces trois points ? Justifier.

✂---

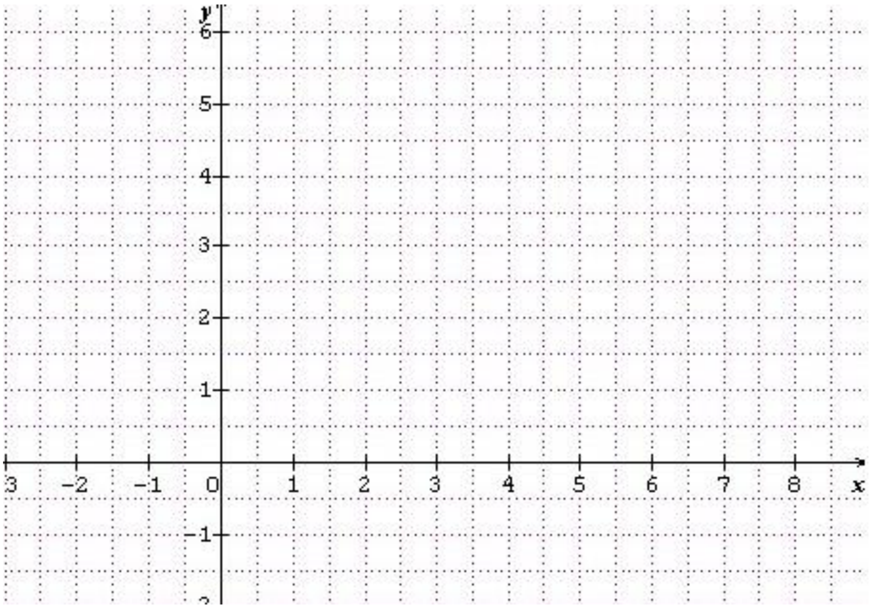
III – Les translations

Définition : Le mouvement qui consiste à se déplacer en ligne droite sans tourner est appelé une translation.
Par exemple, un escalator, un ascenseur sont animés de mouvement de translation.

Remarque : Le mouvement décrit précédemment qui permet d'aller d'un point A à un point B est appelé la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ équivaut à dire que ……………

IV – Vecteurs et géométrie analytique



Un exemple d'introduction : Soit A(2 ; 1) et B(6 ; 4), et considérons le vecteur . Placer A et B, puis construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Pour aller du point A au point B en suivant les directions des axes de coordonnées, on avance de ... unités à l'horizontale et on monte de … unités à la verticale.

On dira que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (… ; …) et on notera en colonne les coordonnées d'un vecteur : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

Cette notation, permet de différencier les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point.

♥♥ ***Propriété (XXL)*** ♥♥

Soit $(O ; I ; J)$ un repère du plan et $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points placés dans ce repère.

Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ♥♥ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ ♥♥

Si de plus le repère *(O ; I ; J)* est orthonormé, alors :

♥♥ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB =$ …………………………………………………….♥♥

Cette propriété traduit l'exemple vu en introduction.

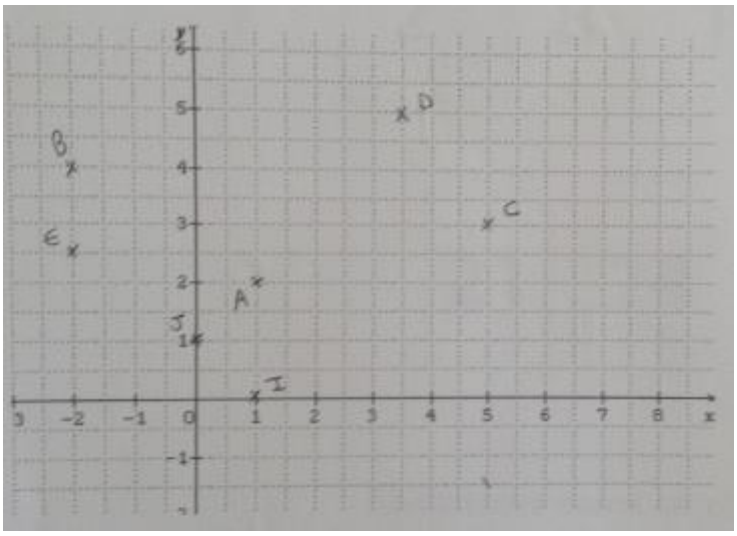
Retenir : pour déterminer les coordonnées d'un vecteur, on fait :

♥ **abscisse de………………… – abscisse de ……………………… du vecteur** ♥, et pareil en ordonnée.

Exemple 1 : Soit A(2 ; 5), B(– 1 ; 3) et C(-4 ; 1).Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

<u>Exemple 2</u> : En utilisant le repère ci-dessous, <u>lire</u> les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{CA}$



✂---

<u>Propriété clé</u>

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont ....

x, x', y, y' étant des réels, on a : ♥♥ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si : ♥♥

<u>Exercices fondamentaux</u> (à maîtriser parfaitement.)

<u>Exercice 3</u>

1) Dans un repère $(O ; I ; J)$, placer les points : A(1 ; 2) ; B(– 3 ; 4) et C(– 5 ; – 4) et D(– 1 ; – 6).

2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Déterminer les coordonnées du point K centre de ce parallélogramme.

✂---

<u>Exercice 4</u>

1) Placer dans un repère orthonormé (O ; I ; J) les points K(3 ; 5) ; L(– 1 ; 1) et M(2 ; – 3).
2) Déterminer, en utilisant des vecteurs, les coordonnées du point $\boldsymbol{N}$ tel que le quadrilatère KLMN soit un parallélogramme.

✂---

V – Opérations algébriques sur les vecteurs

A) Somme de deux vecteurs

Intuitivement, on comprend aisément si l'on raisonne en termes de translation, que prendre un escalator qui emmène de A à B puis prendre un autre escalator qui emmène de B à C revient à prendre un escalator qui emmène de A à C.

De cette façon assez intuitive, on va définir la somme de deux vecteurs :

♥♥ ***Propriété* : La relation de Michel CHASLES (1793-1880)** ♥♥

Pour tous points A, B et C, on a : ……………………..

Remarques :

- Cette relation n'est valable qu'avec des vecteurs : écrire : pour tous points A, B et C, $AB + BC = AC$ constitue une monstruosité ! Pourquoi au fait ?
- **Pour appliquer cette relation, observez bien que les vecteurs doivent être mis bout à bout, c'est-à-dire que 💣 <u>l'extrémité de l'un doit coïncider avec l'origine de l'autre</u>.💣**
- Cette relation de Chasles, s'étend à plus de deux vecteurs : par exemple, écrire plus simplement la somme de vecteurs suivante : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.

Exemples

Réduire les sommes de vecteurs suivantes :

a) $\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE} =$; b) $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{PZ} =$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{BC} =$

d) $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BZ} =$; e) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{TI} =$ f) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CT} =$

Exercice 5

$ABCD$ est un parallélogramme.

Montrer, à l'aide de la relation de *Chasles*, que pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

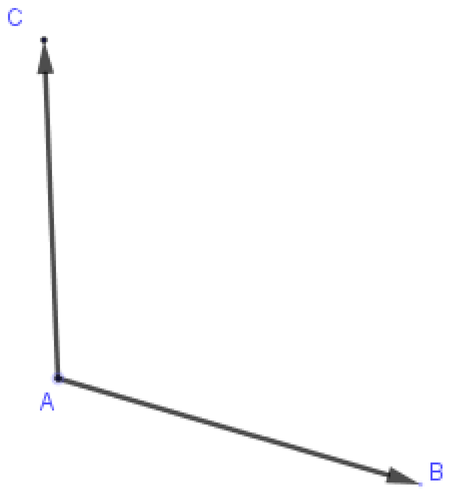
✂---

Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui ne sont pas mis bout à bout mais qui ont la même origine ?

Exemple : Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ issu de A.

Méthode : On se ramène à ce que l'on sait faire ! On va mettre bout à bout le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine B.

__Construction__ :



Règle du parallélogramme : (Permet d'additionner deux vecteurs qui ont la même origine).

Pour tous points A, B, C et D, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ **⇔ ………. est un parallélogramme.**

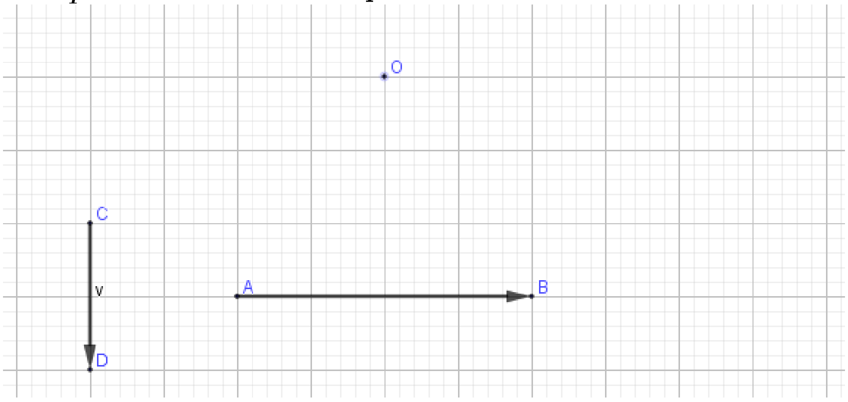
__Preuve__ :

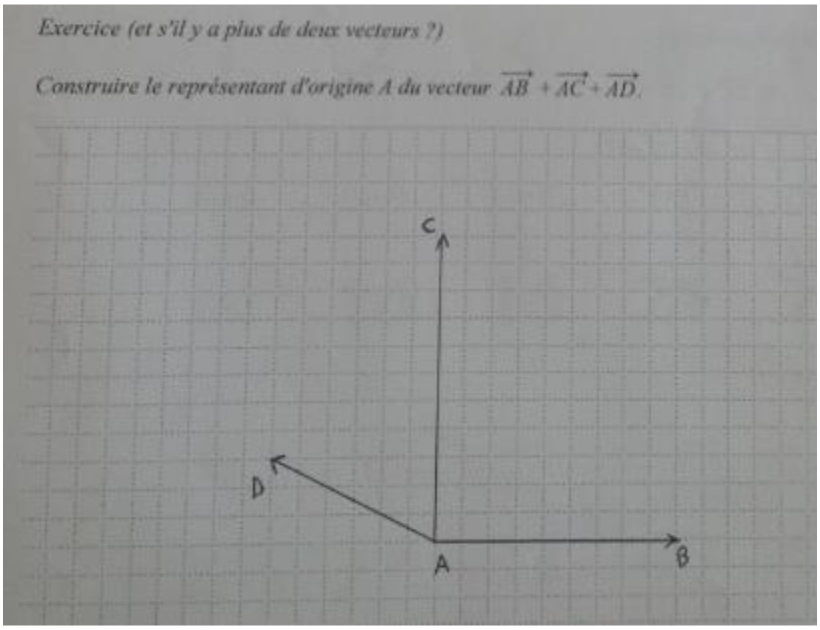
__Exemple__ : Construire le point R sachant que : $\overrightarrow{AV} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AR}$.

Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui n'ont rien de commun ?

__Méthode__ ***: on se ramène à ce que l'on sait déjà faire***, en construisant un représentant de l'un des deux vecteurs dont l'origine est placée à l'extrémité de l'autre.

__Exemple__ : Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ d'origine O.




Exercice (et s'il y a plus de deux vecteurs ?)

Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

__Remarque__ : pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ on a : 1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; 2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$; 3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.
Notez l'analogie de ces règles avec celles connues concernant les nombres réels.

__Propriété et retour de l'analytique__

1) L'addition des vecteurs est commutative, c'est-à-dire que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$
on permute l'ordre des deux vecteurs, mais pas l'ordre des lettres de chaque vecteur !

2) Dans un *R.O.N.* (*O* ; *I* ; *J*), soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$.

En d'autres termes, pour avoir les coordonnées de la somme de deux vecteurs donnés, il suffit ……………………… respectivement les coordonnées de même nom de chacun des deux vecteurs.

__Remarque__ : Ces deux règles s'étendent à une somme de ***plus de deux*** vecteurs.

__Exemple fondamental__ : Dans un *R.O.N.* (*O* ; *I* ; *J*), soit $A(1\ ;\ 2)$; $B(-1\ ;\ -1)$ et $C(5\ ;\ 4)$.

1) Faire une figure, puis déterminer, par le calcul, les coordonnées du point *M* tel que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2) Déterminer les coordonnées du point *K* tel que : $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

B) Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ qui est défini comme suit :

- $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.
- $k\vec{u}$ a : le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$.
- $k\vec{u}$ a pour norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ où $|k|$ désigne la distance à 0 du nombre k appelée la valeur absolue de k. Par exemple : $|3| = ...; |-8| = ...; |-2,3| = ...$

Remarque : si $k = 0$, alors $0 \times \vec{u} = \vec{0}$; si $\vec{u} = \vec{0}$, alors pour tout réel k, $k\vec{u} = \vec{0}$.

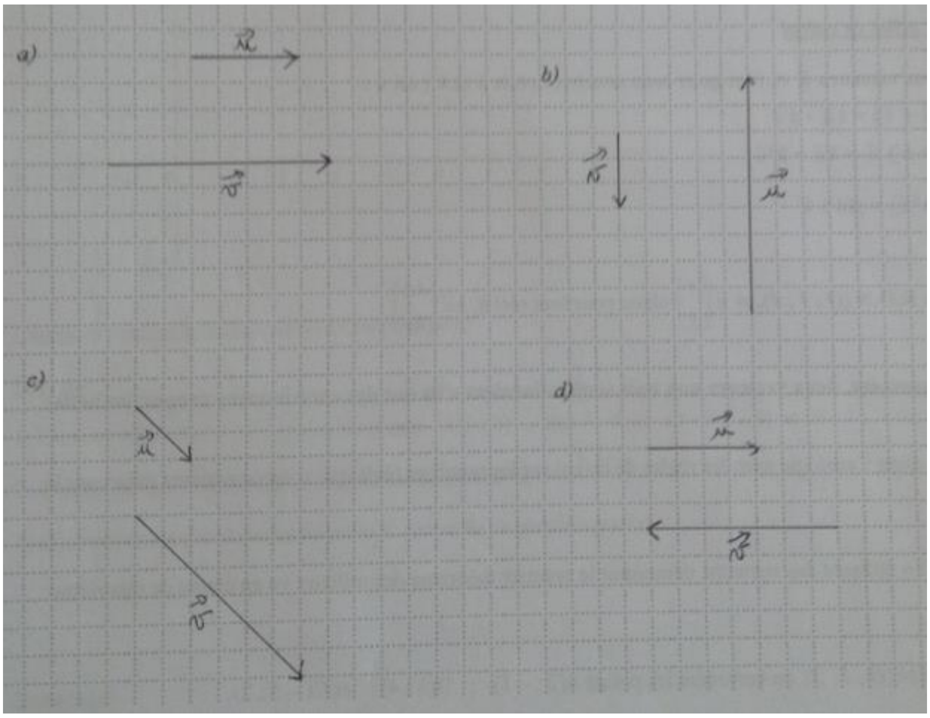
$\vec{u}$, $2\vec{u}$, $0,74\vec{u}$ ont ……………………………………………………………………………………………………..

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$:

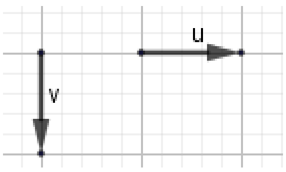
$-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $-\frac{4}{5}\vec{u}$ ont………………………………………………………………………………………………….

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$:

Exemples : Sur chacun des exemples ci-dessous, exprimer, lorsque c'est possible, le vecteur $\vec{v}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire, trouver, si possible, un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$:



f)



Définition : ♥Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits ***colinéaires*** s'il existe un **réel *k*** tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.♥

Remarque : colinéaire signifie porté par la même ligne, à savoir que des vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction et réciproquement.

En particulier, lorsque $\vec{v} = -\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés ($k = -1$). Des vecteurs opposés sont donc colinéaires. Attention, des vecteurs colinéaires ne sont pas nécessairement opposés !

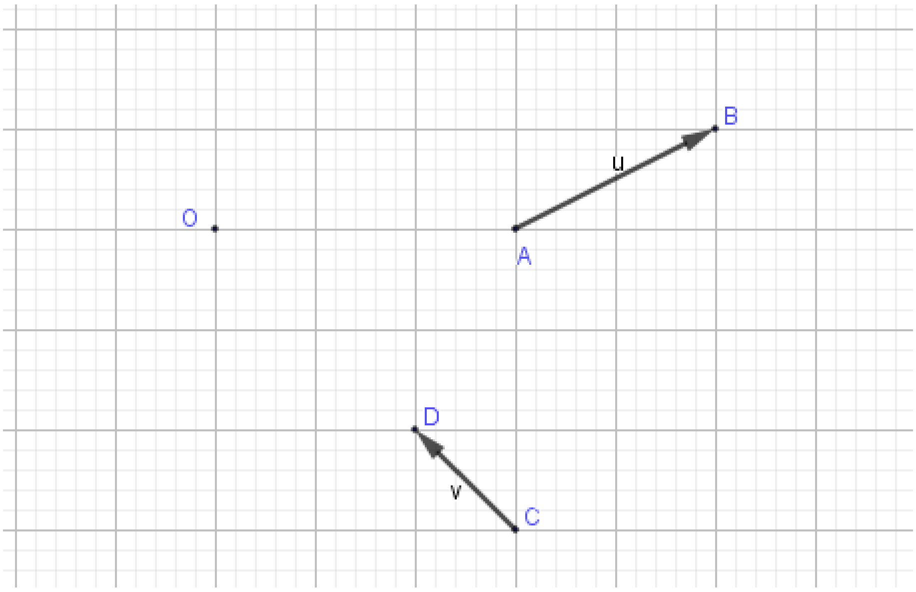
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exercice 6 : $[AB]$ est un segment de longueur 6 cm. Construire un tel segment, puis placer les points M, N, P et Q sachant que :

$a)\ \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $b)\ \overrightarrow{AP} = 2{,}5\,\overrightarrow{AB}$; $c)\ \overrightarrow{AN} = -1{,}5\overrightarrow{AB}$ $d)\ \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

✂---

Exercice 7 : Construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$:



Propriétés utiles en calcul vectoriel

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels *k* et *k'*, on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\,\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\,\vec{u}$

2) Dans un *repère* $(O\,;I\,;J)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors, pour tout réel *k*, $k\vec{u}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

On retiendra que multiplier par k un vecteur $\vec{u}$ revient à multiplier par k chacune des coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Remarque : noter l'analogie avec les règles de calcul sur les nombres réels que vous connaissez déjà pour le 1).

Propriété

Soient A et B deux points du plan.

♥Dire que le point I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à : …………………..ou encore …………♥

Exercice 8

A l'aide de la propriété précédente, démontrer après les avoir rappelées, les relations qui donnent les coordonnées du milieu d'un segment en fonction des coordonnées de ses extrémités.

✂---

Exercice 9

Dans un *repère orthonormé* $(O\,;I\,;J)$, on considère les points $A(2\;;\;-1)$; $B(3\;;\;4)$ et $C(-5\;;\;2)$.

En raisonnant sur les coordonnées des vecteurs, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. En déduire $\left\|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right\|$.

✂---

Exercice 10

A, B et C sont trois points donnés du plan. On se propose de construire le point D tel que :
$2\,\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$.

a) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Construire alors rigoureusement le point D.

✂---

VI – Géométrie et vecteurs

Propriété clé (sert à montrer un alignement de points)

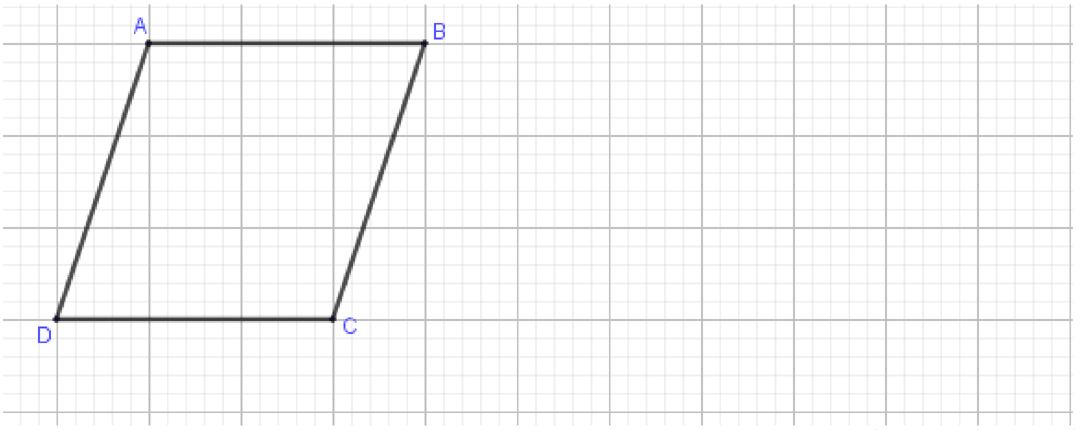
♥♥***Trois points A, B et C deux à deux distincts sont alignés si et seulement si ……………………***♥♥

Preuve : évidente, résulte de la notion même de vecteurs colinéaires.

Prenez le temps de comprendre que, les origines et extrémités de deux vecteurs colinéaires qui ont une origine ou extrémité commune, forment trois points alignés.
Cela est utile en exercice.

Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme.



$i)$ Construire rigoureusement les points E et F sachant que : $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CB}$.

$ii)$ Quelle conjecture émettez-vous concernant les points D, E et F ?

$iii)$ A l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$iv)$ Démontrer que $3\,\overrightarrow{DF} = 3\,\overrightarrow{DC} + 3\,\overrightarrow{CF}$, puis en déduire que $3\,\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}$.

$v)$ Qu'en déduit-on concernant les points D, E et F.

✂---

Propriété *(sert à montrer le parallélisme de deux droites).*

A, B, C et D sont quatre points distincts.
♥♥ (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si...♥♥

Illustration et justification :

Exercice 12

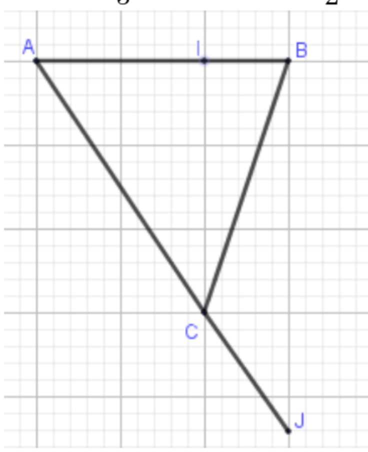
ABC est un triangle, I et J sont les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC}$

La figure ci-contre résume la situation :

1) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Etablir que $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que (IC) et (BJ) sont parallèles.



✂---

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une *base* de l'ensemble des vecteurs du plan s'ils *ne sont pas colinéaires*.

On notera $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ une telle base.

$\boxed{\textit{Base = couple de vecteurs non colinéaires}}$.

Remarque : On a coutume, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ; J)$, de noter : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
On parlera de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ au lieu de dire dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

Grâce à des propriétés vues en amont, on a : *si* $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base des vecteurs du plan, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit, de façon unique, sous la forme *:* $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ *: les réels x et y sont appelés coordonnées* (*ou composantes*) *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Exemples

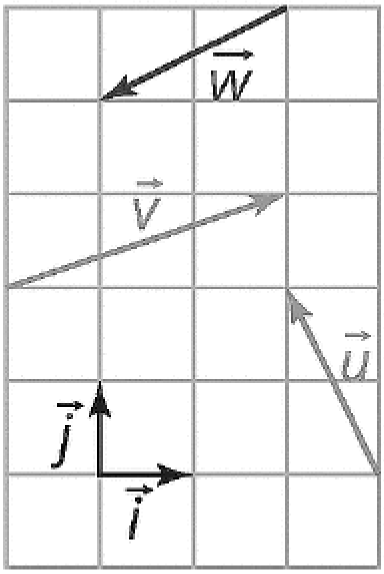
Soit $(\vec{i}\ ; \vec{j})$ une base du plan.

Si $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, *alors, dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, *on a :*

Si $\vec{v} = 5{,}2\vec{i} - 2\vec{j}$, *alors, dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, *on a :*

Si $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *alors on a :*

***Exercice* 13**
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}\,)$.



Définition

Si dans un même repère, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où x, y, x' *et* y' sont des réels, on appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $det\,(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ avec : $det\,(\vec{u}\,,\vec{v}\,) = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Exemples

Dans un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Calculer $det(\vec{u}\,,\vec{v})$ puis $det(\vec{u}, \vec{w})$ puis $det\,(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w})$.

✂---

Nous allons enfin traiter la notion de colinéarité de façon analytique, c'est-à-dire en se plaçant dans un repère et en utilisant les coordonnées.

Propriété XXXL

Deux vecteurs non nuls d'un même repère sont colinéaires si et seulement si ils ont des coordonnées ……………………………………….

En utilisant le déterminant, on a : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ……………………………………………………………

Preuve : Ecrite ci-dessous, à titre culturel.

Pour démontrer une équivalence, on démonte tout d'abord le sens direct, puis la réciproque

Sens direct : **montrons que si deux vecteurs sont colinéaires alors leur déterminant est nul.**

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Raisonnons par disjonction de cas.

1er cas : si $\vec{v} \neq \vec{0}$. Alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

or $k\vec{v}\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} kx' = x \\ ky' = y \end{cases}$.

Ainsi $xy' - x'y = kx' \times y' - x' \times ky' = kx'y' - kx'y' = 0$. Ce qui prouve que $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

2e cas : si $\vec{v} = \vec{0}$. Alors $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{vmatrix} = x \times 0 - y \times 0 = 0$. Ce qui prouve que $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Dans tous les cas $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, le sens direct est démontré.

Réciproque : **montrons que si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ signifie $xy' - x'y = 0$ donc $xy' = x'y$. Raisonnons par disjonction de cas.

1er cas : si $x \neq 0$. Alors $y' = \frac{x'y}{x} = \frac{x'}{x} \times y$ (car $x \neq 0$).

On pose $k = \frac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $kx = \frac{x'}{x} \times x = x'$.

Or $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ donc $k\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ce qui prouve que $k\vec{u} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2e cas : si $x = 0$. Dans ce cas $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $xy' = x'y$ s'écrit $0 = x'y$.

- Si $x' = 0$, alors : $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{v} = y'\vec{j}$, avec $y' \in \mathbb{R}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires ;

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{u} = y\vec{j}$, avec $y \in \mathbb{R}$ et $\vec{j} \neq \vec{0}$; donc $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à $\vec{j}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- Si $y = 0$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

Dans tous les cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, la réciproque est démontrée.

Lorsqu'on est dans un repère cette propriété permet de traiter efficacement et avec rapidité les problèmes d'alignement de points et de parallélisme de droites !

Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés en justifiant :

1) $A(\frac{-7}{2} ; \frac{-1}{2})$; $B(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$ et $C(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2})$

2a) D(1 ; 3) ; E(3 ; 4) ; F(– 3 ; 0).

2b) Déterminer le réel y pour que G(25 ; y) appartienne à la droite (AB).

✂---

Exercice 15

1) Dans un repère (O ; I ; J), placer les points A(2 ; 1) ; B(5 ; – 3) ; C(0 ; 3) et D(6 ; – 5).

2) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3) Les droites (IJ) et (AB) sont-elles parallèles ? Justifier.

✂---

Exercice 16

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 4\ cm$ et $AB = 2\ cm$.

a) Placer les points E, D, G, F définis par :

$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG} = -2\,\overrightarrow{AB}$ et enfin $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$.

En se plaçant dans un repère bien choisi, prouver que D, A et F sont alignés.

✂---

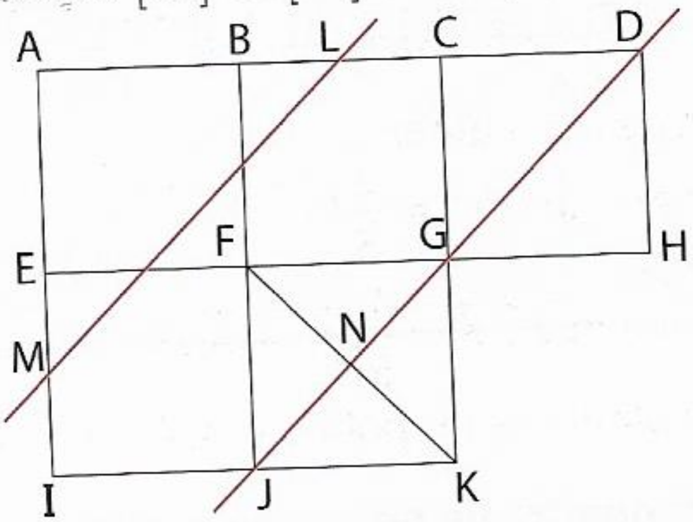
Exercices supplémentaires sur les vecteurs

Exercice 1

Voici un assemblage de cinq carrés.

L est le milieu de [AD], M est le milieu de [EI].

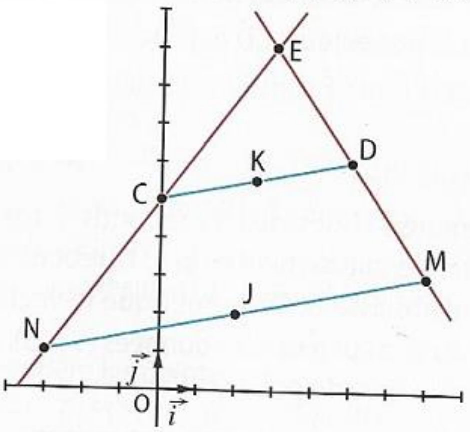
Les diagonales [FK] et [JG] se coupent en N.



Démontrer que les droites (ML) et (ND) sont parallèles.

Exercice 2

Soit les points M(7 ; 3), N(−3 ; 1), C(0 ; 5), D(5 ; 6) et E(3 ; 9).



1. Montrer que le quadrilatère MNCD est un trapèze.

2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (NC) et (MD).

3. Soit J et K les milieux respectifs des segments [NM] et [CD]. Calculer les coordonnées des points J et K.

4. Montrer que les points E, J et K sont alignés.