Chapitre 6 — Intervalles de $\mathbb{R}$ - Inégalités et inéquations

Rappels : soient a et b deux nombres réels.

Ecrire $a < b$ signifie que ..le nb a est strictement inférieur au nb b...... *Exemple* : $2 < 3{,}5$

Ecrire que $a > b$ signifie que .le nb a est strictement supérieur au nb b. *Exemple* : $4{,}1 > -1$

Ecrire que $a \leq b$ signifie que a est inférieur ou éventuellement égal à b. *Exemple* : $x \leq 2{,}5$ signifie que le réel x peut prendre n'importe quelle valeur inférieure ou égale à 2,5, ou encore que le réel x est au plus égal à 2,5.

Ecrire que $a \geq b$ signifie que..le nb a est supérieur ou égal au nb b........

Exemple : $y \geq -1$ signifie que.le nb y est supérieur ou égal au nb -1.

Enfin *les nombres réels positifs* sont *les nombres strictement supérieurs à 0*, et *les nombres réels négatifs* sont *les nombres strictement inférieurs à 0.*

Ecrire : $a > 0$ ou dire le réel a est un nombre positif a le même sens !

De même, $a < 0$ revient à dire que le réel a est un nombre négatif.

Les phrases : $a < b$ et $b > a$ ont exactement le même sens mathématique ! Il faut savoir jongler entre ces deux écritures ! De façon imagée : si vous avez moins d'argent que votre frère, c'est que votre frère a plus d'argent que vous !

Définition : comparer deux nombres réels a et b signifie : trouver lequel des deux nombres est supérieur à l'autre, ou s'ils sont égaux.

Quand on demande de ***comparer deux réels a et b***, on vous demande donc de mettre entre a et b l'un des symboles suivants : $<$, $>$ ou $=$!

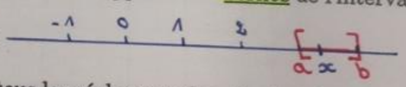
Enfin, il arrive parfois que l'on écrive une double inégalité : $2 \leq x \leq 5$ qui est une écriture compacte de la ***double condition*** : $x \geq 2$ *et* $x \leq 5$.
$2 \leq 2$ et $x \leq 5$.

I - Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1 : Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$.
L'ensemble de tous les nombres réels compris entre a *(inclus)* et b (inclus) est appelé l'intervalle fermé d'extrémités a et b. On le notera $[a ; b]$.

Ainsi, $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$. a et b sont aussi appelées les <u>bornes</u> de l'intervalle.
tel que

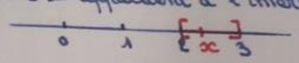
Représentation sur une droite graduée :



Exemple : $[2\ ;\ 3]$ désigne l'ensemble de tous les réels compris entre 2 et 3.

Ecrire : $x \in [2\ ;\ 3]$ équivaut à dire : $2 \leqslant x \leqslant 3$.
On notera donc : $x \in [2\ ;\ 3] \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$.
équivaut

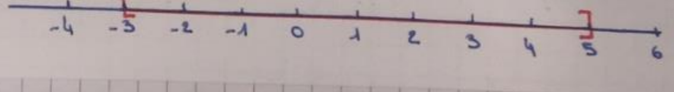
le nb x appartient à l'intervalle fermé d'extrémités 2



Exercice 1

Dire si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$:

a) -1 ; *b)* 6 ; *c)* -3 ; *d)* 10^{-5}.



a) -1 appartient à l'intervalle $[-3;5]$

Se note : $-1 \in [-3;5]$

b) $6 \notin [-3;5]$

c) $-3 \in [-3;5]$

d) $10^{-5} = 0{,}00001$

$10^{-5} \in [-3;5]$

a et b désignent des réels tels que $a \leq b$. Il existe 9 types d'intervalles de $\mathbb{R}$:

L'ensemble des réels x tels que :	est l'intervalle noté :	représentation de l'intervalle
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	a x 0 1 b
$a \leq x < b$	$[a;b[$	a x 0 1 b
$a < x \leq b$	$]a;b]$	a x 0 1 b
$a < x < b$	$]a;b[$ ⇒ intervalle ouvert	a x 0 1 b
$x > a$	$]a;+\infty[$	a x 0 1
$x \geq a$	$[a;+\infty[$	a x 0 1
$x < a$	$]-\infty;a[$	x a 0 1
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	x a 0 1
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	0 1 x

Remarques fondamentales

Tout d'abord les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Dans les intervalles contenant l'un de ces symboles, les crochets seront toujours orientés vers l'extérieur de l'intervalle.

Comme on ne peut comparer entre eux que deux nombres réels, on s'interdira d'écrire par exemple : $\cancel{-\infty < 2}$ ou encore $\cancel{x < +\infty}$.

Sur le sens des crochets : Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'intérieur de l'intervalle, la borne où figure ce crochet appartient à l'intervalle.
Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'extérieur de l'intervalle, la borne où figure ce dernier n'appartient pas à cet intervalle.

Par exemple, pour l'intervalle [2 ; 3[, on a : $2 \in [2;3[$ et $3 \notin [2;3[$
Pour l'intervalle]-2,5 ; 0], on a : $-2{,}5 \notin]-2{,}5;0]$ et $0 \in]-2{,}5;0]$

Enfin, on peut noter $\mathbb{R}$ = $]-\infty;+\infty[$: $\mathbb{R}$ est représenté par toute la droite graduée !

Exemples : 1) Traduire en termes d'appartenance à un intervalle :

a) $-2 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-2 ; 1]$; *b)* $x > 3 \Leftrightarrow x \in]3 ; +\infty[$; *c)* $x \leqslant -4 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4]$

2) Traduire l'appartenance d'un réel x à chacun des intervalles suivants par des inégalités :

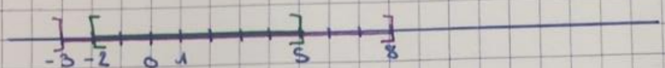
a) $x \in]-3 ; 8] \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 8$; *b)* $x \in]-\infty ; \pi[\Leftrightarrow x < \pi$; *c)* $x \in]-10 ; 3[\Leftrightarrow -10 < x < 3$ *d)* $x \in [2 ; +\infty[\Leftrightarrow x \geqslant 2$.

3) Vrai ou faux : *affirmation 1* : $[-2 ; 5[\subset]-3 ; 8]$; *affirmation 2* : si $x < 3$, alors $x \leqslant 3$.

est inclus dans

Affirmation 3 : Formuler la réciproque de l'affirmation 2, et déterminer si elle est vraie ou fausse :

3) 1.



Vrai : Si $x \in [-2 ; 5[$, alors : $-2 \leqslant x < 5$.

Or, $-3 < 2$ et $5 \leqslant 8$, donc $-3 < x \leqslant 8$

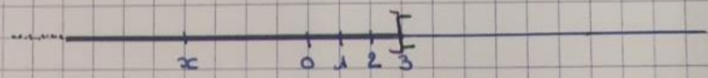
donc $x \in]-3 ; 8]$.

2. Vrai car Si $x < 3$, alors $x \in]-\infty ; 3[$

et $x \leqslant 3$ revient à dire que $x \in]-\infty ; 3]$.

Or $]-\infty ; 3[\subset]-\infty ; 3]$.

Donc l'affirmat° est vraie !



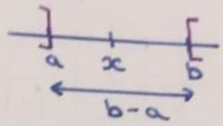
3. La réciproque de 2. est : " Si $x \leqslant 3$, alors $x < 3$ ".

Cette affirmation est fausse !

On autorise à x de valoir 3 lorsqu'on écrit $x \leqslant 3$ tandis que lorsque $x < 3$: 3 est interdit pour x.

Définition

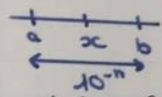
Soit a, b et x trois nombres réels.
On dit que a et b encadrent le réel x si et seulement si $a<x<b$.
a est appelé la ....borne inférieure.....de l'encadrement.
b est appelé la...borne...supérieure.....de l'encadrement.
Le réel $b-a$ est appelé .l'amplitude.. de l'encadrement.



Exemple

$\underset{a}{4} < \underset{x}{4{,}07} < \underset{b}{5}$ est un encadrement du nombre décimal 4,07 d'amplitude 1.

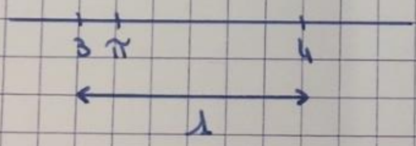
Lorsqu'on demander **d'encadrer un nombre x par deux décimaux, à** 10^{-n} ***près*** (où n est un entie
naturel) près, cela signifie : trouver deux nombres décimaux a et b tels que :
......$a < x < b$............. et ....$b - a = 10^{-n}$..................



Donner un encadrement à l'$\underbrace{\text{unité}}_{1}$ près de π, puis à 10^{-1} près, puis à 10^{-2} près.

$\pi \simeq 3{,}1415926535$

$3 < \pi < 4$: encadrement de π à l'unité près.



$3{,}1 < \pi < 3{,}2$: encadrement de π à 10^{-1} $(=0{,}1)$ près.

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$: encadrement de π à 10^{-2} $(=0{,}01)$ près.

$3{,}141 < \pi < 3{,}142$: encadrement de π à 10^{-3} $(=0{,}001)$ près.

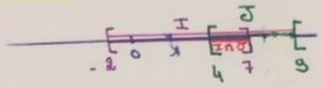
Définitions

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1) L'ensemble de tous les nombres réels qui appartiennent simultanément (= à la fois) à I et à J est appelé l'intersection de I et de J : on la note $I \cap J$ et on lit I inter J.

2) L'ensemble de tous les nombres réels qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles I ou J est appelé la réunion de I et de J : on la note $I \cup J$ et on lit I union J.

Illustration :



$I = [-2;7]$

$J = [4;9[$

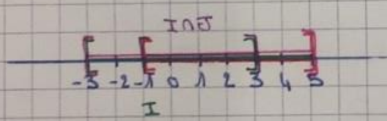
$I \cap J = [4;7]$

$I \cup J = [-2;9[$

Exercice 2

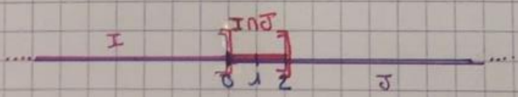
Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée, puis déterminer $I \cap J$ puis $I \cup J$.

	Intervalle I	Intervalle J
Cas 1	[-3 ; 3]	[-1 ; 5]
Cas 2	]-∞ ; 2]	]0 ; +∞[
Cas 3	[4 ; +∞[	]-5 ; +∞[
Cas 4	]-∞ ; 3[	[-2 ; +∞[
Cas5	[1 ; 2]	[3 ; 4]



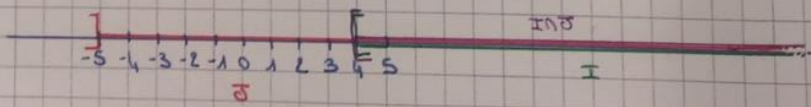
Cas 1 : $I \cap J = [-1;3]$

$I \cup J = [-3;5]$



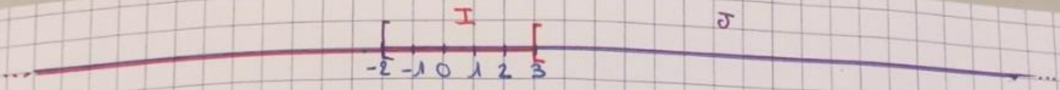
Cas 2 : $I \cap J =]0;2]$

$I \cup J =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

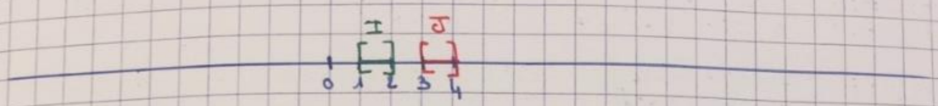


Cas 3 : $I \cap J = [4;+\infty[$

$I \cup J =]-5;+\infty[$



Cas 4 : $I \cup J =]+\infty ; +\infty[$ et $I \cap J = [-2 ; 3[$.



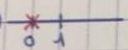
Cas : $I \cap J = \emptyset$ (= aucun réel n'appartient à la fois à I et à J.)

$I \cup J = [1 ; 2] \cup [3 ; 4]$

Exercice 3

Ecrire, en utilisant des intervalles, l'ensemble des réels x tels que :

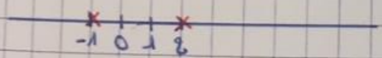
a) $x \neq 0$ *b)* $x \neq -1$ et $x \neq 2$. *c)* $x \notin [1 ; 3]$.

a) 

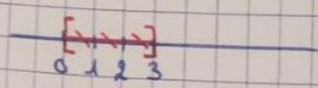
$\underbrace{x \neq 0}$

équivaut à : $x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

b) $x \neq -1$ et $x \neq 2$ équivaut à dire que : $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$



c) $x \notin [1 ; 3]$ équivaut à dire que : $x \in]-\infty ; 0[\cup]3 ; +\infty[$.



II - Inégalités

Règles fondamentales sur les inégalités

a) Inégalités et addition

On peut toujours ajouter (respectivement *soustraire*) un *même* nombre *aux deux membres* d'une inégalité, en *conservant son sens.*

Pour tous réels a, b et c, on a :

1) Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$

2) Si $a \leqslant b$, alors $a - c \leqslant b - c$

Retenir qu'on ne change pas le sens d'une inégalité en y ajoutant (respectivement soustrayant) un même nombre dans chacun de ses deux membres.

Remarque : Les règles énoncées restent vraies si on met n'importe lequel des symboles : $<$, $>$ ou $\geq$.
De même dans les propriétés qui suivent.

Exercice 4

Soient a, b et c trois nombres réels.

Démontrer que : $a \leqslant b$ *équivaut à* : $a + c \leqslant b + c$. *(On notera : $a \leqslant b \Leftrightarrow a + c \leqslant b + c$).*

Étape 1 : Si on sait que $a \leqslant b$, alors $a+c \leqslant b+c$ (d'après la règle 1).

Étape 2 : Si on sait que : $a+c \leqslant b+c$, alors $a+c-c \leqslant b+c-c$

$a \leqslant b$

Propriété

Soient a, b, c *et* d des nombres réels.

1) $a \leqslant b$ équivaut à dire que $a - b \leqslant 0$

2) Si $a < b$ et si $c < d$, alors : $a + c < b + d$

On peut donc additionner membre à membre deux inégalités de même sens.

Preuve : $a \leqslant b$ donc $a - b \leqslant b - b$
$a - b \leqslant 0$

on sait que $a < b$, et $c < d$,
donc : $a + c < b + c$ et $b + c < b + d$
Donc : $a + c < b + d$

Remarque : La propriété *1)* est fondamentale pour la suite : ***Comparer deux nombres réels a et b reviendra donc à chercher le signe de la différence a − b !***

2) ***Pas de règle pour soustraire membre à membre deux inégalités !!***

Donnons quelques contrexemples : $8 < 12$: Vrai ; $-5 < 0$: Vrai ; $8 - (-5) < 12 - 0$; $13 < 12$ FAUX !

Ne jamais soustraire membre à membre des inégalités, même si elles ont le même sens.

b) Inégalités, produits et quotients

1) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un *même nombre strictement positif*, en *conservant le sens de l'inégalité.*

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

Si $a \leqslant b$ *et si* $c > 0$*, alors.* $a \times c \leqslant b \times c$ ..... *et* ..... $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$ ....

Pourquoi ? Si $a \leqslant b$, alors $a - b \leqslant 0$ et $c > 0$. Donc $c(a-b) \leqslant 0$ (règle des signes d'un produit)
Donc $c \times a - c \times b \leqslant 0$. Donc $a \times c - b \times c \leqslant 0$. Donc $a \times c \leqslant b \times c$.

2) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un *même nombre strictement négatif*, en changeant le sens de l'inégalité.

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

Si $a \leqslant b$ *et si* $c < 0$*, alors....* $a \times c \geqslant b \times c$ .. *et* ... $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$ ....

Même type de justification qu'au point précédent.

> **Retenir qu'on** *ne change pas le sens* **d'une inégalité** *en multipliant* **(respectivement divisant)** *par un même nombre POSITIF* **chacun de ses deux membres.**
>
> ***A contrario, on*** *change le sens* **d'une inégalité** *en multipliant* **(respectivement divisant)** *par un même nombre NEGATIF* **chacun de ses deux membres.**

Remarque : on peut, à titre d'exercice, vérifier que les propositions suivantes sont équivalentes. Ces dernières seront d'un usage fréquent dans la résolution des inéquations !

> Pour tout nombre $c > 0$: $a < b$ **est équivalente à :** $a \times c < b \times c$.
>
> Pour tout nombre $c < 0$: $a < b$ **est équivalente à :** $a \times c > b \times c$.

Exercice 5

1) Sachant que $x \leq 3$ et $y \leq -5$, que peut-on en déduire pour les expressions suivantes :

a) $x - 4$; b) $3y$

c) $-4x$; d) $x + y$

2) Sachant que : $-2 < x < 1$ et que $2 < y < 3$, déterminer le meilleur encadrement possible de :

a) $\frac{x+y}{2}$; b) $2x - y$

1)a) On sait que $x \leqslant 3$.
Donc : $x - 4 \leqslant 3 - 4$
Donc : $x - 4 \leqslant -1$.

b) On sait que $y \leqslant -5$.
Donc : $3 \times y \leqslant 3 \times (-5)$ (car $3 > 0$)
Donc : $3y \leqslant -15$.

c) On sait que $x \leqslant 3$.
Donc : $-4 \times x \geqslant -4 \times 3$ (car $-4 < 0$)
Donc : $-4x \geqslant -12$

d) On sait que $x \leqslant 3$ et $y \leqslant -5$.
← on ajoute membre à membre des inégalités de même sens
Donc : $x + y \leqslant 3 + (-5)$
Donc : $x + y \leqslant -2$

2) a) On sait que $-2 < x < 1$ et que $2 < y < 3$.

Donc : $-2+2 < x+y < 1+3$

Donc : $0 < x+y < 4$

Donc : $\frac{0}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{4}{2}$ (car $2 > 0$)

Donc : $0 < \frac{x+y}{2} < 2$

b) $-2 < x < 1$

Donc : $-2 \times 2 < 2x < 1 \times 2$ (car $2 > 0$)

Donc : $-4 < 2x < 2$

et $2 < y < 3$

$2x - y = 2x + (-y)$

Donc $-1 \times 2 > -1 \times y > -1 \times 3$ (car $-1 < 0$)

$-2 > -y > -3$

Donc : $-3 < -y < -2$

Bilan : On a $-4 < 2x < 2$

$-3 < -y < -2$

Donc : $-4 + (-3) < 2x + (-y) < 2 + (-2)$

Donc : $-7 < 2x - y < 0$.

Exercice 6

1) Montrer que pour tout réel x : si $x > 1$, alors $x^2 > x$. Montrer aussi que si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$.

Que pensez-vous de l'affirmation :" *le carré de n'importe quel nombre réel est toujours supérieur ou égal à ce dernier*" ?

2) Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $2^n < 2^{n+1}$.

1) *) On sait que $x > 1$: $x \times x > x \times 1$ (car $x > 1$ donc $x > 0$)

Donc : $x^2 > x$

**) On sait que : $0 < x < 1$:

Donc : $0 \times x < x \times x < 1 \times x$ (car $x > 0$)

Donc : $0 < x^2 < x$

Donc : $x^2 < x$

Affirmat° fausse : On vient de prouver que si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$!!

2) $\hat{o}$ On sait que $1 < 2$. Donc : $\underbrace{1 \times 2^n} < 2 \times 2^n$ car $2^n > 0$.

$2^n < 2^{n+1}$ car $2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Exercice 7

1) Montrer que si $0 < a < b$ et si $0 < c < d$, alors $0 < ac < bd$. Interpréter géométriquement.

2) En déduire un encadrement de $(x-1)(x+3)$ sachant que $2 < x < 5$.

1) On sait que : $0 < a < b$ et $0 < c < d$:

$a > 0$ et $c > 0$ donc d'après la règle des signes d'un produit, $ac > 0$. (ou $0 < ac$).

On sait que : $0 < a < b$.

Donc $0 \times c < a \times c < b \times c$ car on a $c > 0$!

Donc $0 < ac < bc$

On sait que : $0 < c < d$

Donc : $0 \times b < c \times b < d \times b$ car $b > 0$

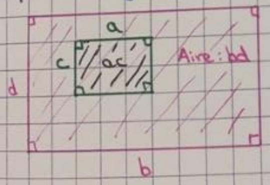
Donc : $0 < bc < bd$.

Donc : $ac < bd$

(transitivité de l'inégalité)

Conclusion : $0 < ac < bd$.

Interprétation géométrique :



$0 < a < b$

$0 < c < d$

Aire du petit rectangle vert < aire du rectangle rose

2) On sait ici que : $2 < x < 5$.

Donc : $2 - 1 < x - 1 < 5 - 1$

$1 < x - 1 < 4$

$2 < x < 5$

Donc : $2 + 3 < x + 3 < 5 + 3$

$5 < x + 3 < 8$

Par suite on a : $0 < 1 < x - 1 < 4$

$0 < 5 < x + 3 < 8$

Donc d'après q.1 : $0 < 1 \times 5 < (x-1)(x+3) < 4 \times 8$

Donc : $5 < (x-1)(x+3) < 32$

III- Inéquations

Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue, souvent nommée x en mathématiques.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité écrite est vraie.

Exemple : Soit l'inéquation : $2x + 6 \leqslant 0$.

Résoudre cette inéquation, c'est déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité $2x + 6 \leqslant 0$ est vraie : on cherche donc toutes les valeurs de x telles que $2x + 6$ soit négatif ou nul !
Ces valeurs de x sont appelées les solutions de l'inéquation.

Remarque cruciale

Deux inéquations sont dites équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solution.

Par exemple, les inéquations $x - 1 \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$ sont équivalentes.

Une ***inéquation*** est dite ***résolue lorsqu'on a isolé l'inconnue x.***

Les règles du paragraphe précédent sur les inégalités vont nous donner un moyen efficace et sûr pour résoudre des inéquations :

Application à la résolution d'inéquations : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x - 1 \geqslant 3$; *b)* $-4x < -x + 6$; *c)* $4 - 2(6 - 2x) > 1 - (-14x + 9)$

d) $x + 1 \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$; *e)* $2x - 6 > 3 - (4 - 2x)$; *f)* $x < 2x - (x - 6)$; *g)* $x^2 + 1 > (x+2)^2$

a) $2x - 1 \geqslant 3$

$2x - 1 + 1 \geqslant 3 + 1$

$2x \geqslant 4$

$\frac{2x}{2} \geqslant \frac{4}{2}$ (car $2 > 0$)

$x \geqslant 2$

$S = [2 ; +\infty[$

$2x-1 \underset{-1}{\overset{+1}{\rightleftarrows}} 2x \underset{\times 2}{\overset{\div 2}{\rightleftarrows}} x$

b) $-4x < -x + 6$

$-3x < 6$

$x > \frac{6}{-3}$ (car $-3 < 0$)

$x > -2$

$S =]-2 ; +\infty[$

c) $4 - 2(6 - 2x) > 1 - (-14x + 9)$

$4 - 12 + 4x > 1 + 14x - 9$

$-8 + 4x > 14x - 8$

$-8 + 4x - 14x > -8$

$-8 - 10x > -8$

$-10x > 0$

$x < \frac{0}{-10}$ (car $-10 < 0$) Donc $x < 0$, donc $S =]-\infty ; 0[$

d) $x+1 \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$

$\frac{x}{1} - \frac{5}{3}x + 1 \leq \frac{4}{5}$

$\frac{3x}{3} - \frac{5x}{3} \leq \frac{4}{5} - \frac{1}{1}$

$-\frac{2x}{3} \leq \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

$-\frac{2x}{3} \leq \frac{-1}{5}$

$-\frac{2}{3}x \div \frac{-2}{3} \geq \frac{-1}{5} \div \frac{-2}{3}$ (car $-\frac{2}{3} < 0$)

$x \geq \frac{-1}{5} \times \frac{3}{-2}$

$x \geq \frac{-3}{-10}$

$x \geq \frac{3}{10}$

$S = \left[\frac{3}{10} ; +\infty\right[$

e) $2x - 6 > 3 - (4 - 2x)$

$2x - 6 > 3 - 4 + 2x$

$2x - 6 > -1 + 2x$

$-6 > -1$: faux pr tte valeur de x.

$S = \emptyset$

f) $x < 2x - (x - 6)$

$x < 2x - x + 6$

$x < x + 6$

$0 < 6$: Vrai pr tte valeur de x.

$S = \mathbb{R}$

g) $x^2 + 1 > (x+2)^2$

$x^2 + 1 > x^2 + 4x + 4$

$1 > 4x + 4$

$-3 > 4x$

$x < \frac{-3}{4}$ (car $4 > 0$)

$S = \left]-\infty ; \frac{-3}{4}\right[$

Remarque importante : L'inéquation $A(x) \geqslant B(x)$ équivaut à : $A(x) - B(x) \geqslant 0$.
Ne le perdez jamais de vue, on va s'en servir dans la suite….

Exercice 8

Pour louer une voiture $^{1 \text{ journée}}$ deux formules sont disponibles :

Formule A : 30€ par jour de location plus 0,20€ par *km* parcouru.

Formule B : 50€ par jour plus 0,16€ par *km* parcouru.

Déterminer à partir de quelle distance parcourue la formule *B* est plus avantageuse pour vous.

o) Je loue et parcours 100 km :

Formule A : $30 + 0,20 \times 100 = 50$ €

Formule B : $50 + 0,16 \times 100 = 66$ €

Pour 100 km parcourus, il est préférable de choisir la formule A (car $50 < 66$).

Soit x la distance parcourue en km :

Prix de revient avec la formule : $= 30 + 0,2x$.
(pr x km de parcours)

Prix de revient formule B : $= 50 + 0,16x$.

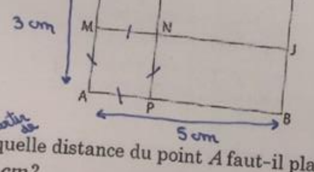
Prix FB < Prix FA équivaut à :

$$50 + 0,16x < 30 + 0,2x$$
$$50 + 0,16x - 0,2x < 30 + 0,2x - 0,2x$$
$$50 + 0,04x < 30$$
$$-0,04x < -20$$
$$x > \frac{-20}{-0,04} \quad (\text{car } -0,04 < 0)$$
$$x > \frac{20}{0,04}$$
$$x > 500$$
$$S =]500\,;+\infty[$$

Conclusion : La formule B est + avantageuse que la formule A pour + de 500 km parcourus !

Exercice 9

ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AD = 3 cm
M est un point du segment [AD] On place alors les points
P sur [AB] et N tel que AMNP soit un carré.
Le point I est l'intersection de (PN) et (CD) et le point J est
celle de (BC) et (MN).



A $^{\text{partir de}}$ quelle distance du point *A* faut-il placer le point *M* pour que le périmètre de *NICJ* soit supérieur à 10 *cm* ?

Choix de l'inconnue : Soit x la distance AM

Comme M appartient au segment [AD], on a : $0 \leqslant x \leqslant 3$

NICJ est un rectangle avec :

$NI = 3 - x$ et $NJ = 5 - x$

Donc $P(NICJ) = 2(3 - x + 5 - x) = 2(8 - 2x) = 16 - 4x$.

Enfin :

$$\begin{aligned} 16 - 4x &\geqslant 10 \quad) -16 \\ -4x &\geqslant -6 \\ x &\leqslant \frac{6}{4} \quad) \div -4 \quad (\text{car } -4 < 0) \\ x &\leqslant 1{,}5 \end{aligned}$$

Ici de plus : $0 \leqslant x \leqslant 3$

$\Big\}$ Donc : $[0 ; 1{,}5]$

Pour que le périmètre de NICJ soit supérieur à 10 cm, il faut placer M sur [AD] à une distan
AM inférieure à 1,5 cm.

IV - Tableaux de signes et inéquations

Nous allons, à l'aide d'un tableau de signes, résoudre des inéquations un peu plus complexes, du type :

$(2x+1)(x+3) > 0$ ou encore $\frac{x-1}{2x+5} \leq 0$.

Qu'est-ce qu'un tableau de signes ?

C'est un tableau qui résume les signes pris par une expression algébrique $A(x)$, selon les intervalles auxquels appartient x, avec les conventions suivantes : mettre un signe $+$ pour les valeurs de x telles que $A(x) > 0$, mettre un signe $-$ pour les valeurs de x telles que $A(x) < 0$, et enfin mettre des zéros sous les valeurs de x qui annulent l'expression $A(x)$.

Exemple

Soit $A(x)$ une expression algébrique, avec x appartenant à $\mathbb{R}$:

On suppose que :

- ✓ $A(x)$ est de signe positif lorsque x appartient à l'intervalle : $]1 ; +\infty[$.
- ✓ $A(x)$ est de signe négatif lorsque x appartient à l'intervalle : $]-\infty ; 1[$.
- ✓ $A(1) = 0$.

On résume cela en construisant le tableau suivant, appelé tableau de signes de l'expression $A(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 10

1) S'aider du tableau de signe donné ci-dessous pour répondre aux questions suivantes :

x	$-\infty$		-4		0		$\frac{1}{2}$		5	8	12		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$			0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 0$?

b) Sur quels intervalles a-t-on $f(x) > 0$? ($f(x)$ est positif)

c) Sur quels intervalles a-t-on $f(x) < 0$? ($f(x)$ est négatif)

d) Quel est le signe de $f(8)$? Celui de $f(0)$?

a) Lorsque $x = -4$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 5$ ou $x = 12$.

b) Sur l'intervalle $]-\infty ; -4[$ et aussi sur $]5 ; 12[$

c) Sur l'intervalle $]-4 ; \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2} ; 5[$ et aussi sur $]12 ; +\infty[$.

d) $f(8) > 0$

$f(0) < 0$

2) On donne les tableaux de signes d'expressions algébriques $A(x)$ et $B(x)$ définies sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	

Donner, en justifiant, le tableau de signes de l'expression $A(x)\times B(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Ordre croissant

x	$-\infty$		-1		3		$-\infty$
Signe de $A(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $A(x)\times B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Obtenu à l'aide de la règle des signes d'un produit !

Exercice 11

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $\underbrace{(3x+6)}\underbrace{(-2x+5)} > 0.$

$A(x) \times B(x) > 0$

On pose $A(x) = 3x+6$ et $B(x) = -2x+5$

On étudie d'abord le signe des deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ de la suite de façon au tableau de signes complète.

Or $A(x) \geqslant 0$ équivaut à dire : $3x+6 \geqslant 0$ et $B(x) \geqslant 0$ revient à : $-2x+5 \geqslant 0$

signe + signe +

$3x \geqslant -6$ $-2x \geqslant -5$

$x \geqslant \frac{-6}{3}$ $x \leqslant \frac{5}{2}$ (car $-2<0$)

$x \geqslant -2$ $x \leqslant 2,5$

x	$-\infty$		-2		$2,5$		$+\infty$
Signe de $A(x) = (3x+6)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $B(x) = (-2x+5)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $A(x) \times B(x)$ $(3x+6)(-2x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

⇒ ordre croissant

⇒ règle des signes

<u>Conclusion :</u> $(3x+6)(-2x+5) > 0$ équivaut à $-2 < x < 2,5$.

$S =]-2\,;\,2,5[$.

Exercice 12

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $\frac{x+1}{2x+4} \geq 0.$

$$\begin{cases} A(x) = x+1 \\ B(x) = 2x+4 \end{cases}$$

$A(x) \geqslant 0$ équivaut à $x+1 \geqslant 0$ et $B(x) \geqslant 0$ équivaut à $2x+4 \geqslant 0$

$x \geqslant -1$ $2x \geqslant -4$

$x \geqslant \frac{-4}{2}$

$x \geqslant -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de $A(x) = x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $B(x) = 2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{x+1}{2x+4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

<u>Conclusion :</u> $\frac{x+1}{2x+4} \geqslant 0$ équivaut à :

$x \in]-\infty\,;\,-2[\cup [-1\,;\,+\infty[$

$S =]-\infty\,;\,-2[\cup [-1\,;\,+\infty[$

‖ double barre ⇒ interdiction d'effectuer le quotient lorsque $x = -2$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{3}{x+2} \leq \dfrac{1}{-4x+1}$.

NB : $A(x) \leqslant B(x)$ revient à dire : $A(x) - B(x) \leqslant 0$

On se ramène à un second membre nul.

$$\frac{3}{x+2} - \frac{1}{-4x+1} \leqslant 0$$

$$\frac{3(-4x+1)}{(x+2)(-4x+1)} - \frac{1(x+2)}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$$

Donc $\dfrac{3(-4x+1) - (x+2)}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0.$

$$\frac{-12x + 3 - x - 2}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0.$$

$$\frac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0.$$

$-13x + 1 \geqslant 0$

$-13x \geqslant -1$

$x \leqslant \dfrac{-1}{-13}$

$x \leqslant \dfrac{1}{13}$

$x + 2 \geqslant 0$

$x \geqslant -2$

$-4x + 1 \geqslant 0$

$-4x \geqslant -1$

$x \leqslant \dfrac{-1}{-4}$ (car $-4 < 0$)

$x \leqslant \dfrac{1}{4}$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{13}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $-13x$		+		+	0	−		−	
Signe de $x+2$		−	0	+		+		+	
Signe de $-4x+1$		+		+		+	0	−	
Signe $\frac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)}$		−	‖	+	0	−	‖	+	

Conclusion : $\dfrac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$ équivaut à dire : $x \in \left]-\infty ; -2\right[\cup \left[\frac{1}{13} ; \frac{1}{4}\right[$

$$S = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left[\frac{1}{13} ; \frac{1}{4}\right[$$

V - Valeurs absolues

Au collège, vous avez déjà entendu parler de la distance à 0 d'un nombre, et cette année cette notion est apparue dans les vecteurs.

Définition

Soient x et a deux réels.

On appelle distance entre les deux nombres x et a la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres.

Par exemple, la distance entre 1 et 2,5 est égale à .2,5 - 1 = 1,5..

La distance entre -3 et 1 est égale à : ..1 - (-3) = 1 + 3 = 4

Si les deux nombres sont égaux, la distance entre ces deux nombres est égale à ..0.

Ainsi, la distance entre les réels x et a est égale à : $\begin{cases} x - a \text{ si } x \geqslant a \\ a - x \text{ si } x \leqslant a \end{cases}$

On adopte la notation : $|x-a|$ (lire ***valeur absolue de*** $x-a$) pour désigner la ***distance entre les réels x et a.***

Exemple : Ecrire sans valeur absolue : $|\pi-2|$ *puis* $|4-\pi|$.

$\pi \simeq 3,14$ donc $\pi > 2$	$\pi \simeq 3,14$ donc $\pi < 4$	$\pi \simeq 3,14$ donc $\pi > 1$
$\|\pi - 2\| = \pi - 2$	$\|4 - \pi\| = 4 - \pi$	$\|1 - \pi\| = \pi - 1$

Conséquences directes de la définition

Lorsque $a = 0$, la distance entre x *et* 0 est $|x-0| = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$ ♥♥♥

opposé

Ainsi, la distance entre x et 0 est égale à la valeur absolue de x.

Exemples

$|-2,6| = 2,6$; $|3,1| = $ ..3,1.......... ; $|0| = $ .0..........

Pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$

Vu que la distance entre les réels x et a est la même que celle entre les réels a et x, on a :
..$|x - a| = |a - x|$................

En particulier, pour $a = 0$: ..$|x| = |-x|$........................

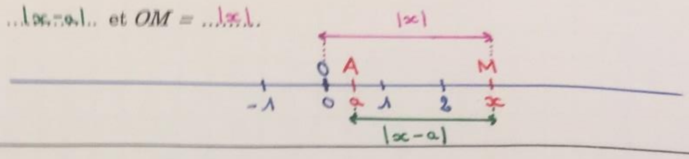
Les 2 nb opposés sont situés à la m distance de 0.

Interprétation géométrique :

Sur une droite graduée d'origine O, soient M et A les points d'abscisses respectives x et a.

Alors : $MA = |x-a|$ et $OM = |x|$.

Illustration :



Propriété

Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$

Pourquoi ? Si $x \geqslant 0$: $\sqrt{x^2} = x$

Si $x \leqslant 0$: $\sqrt{x^2} = -x$

Donc $\sqrt{x^2} = |x|$ ⇒ déf° valeur absolue

Equations et valeurs absolues :

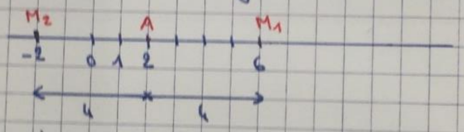
En interprétant la valeur absolue comme une distance, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

a) $|x-2| = 4$; b) $|x+5| = 0,5$; c) $|x-4| = -1$.

a) $|x-2| = 4$

Soit M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse 2 :

$|x-2|$ est donc la longueur AM : on veut que $AM = 4$:



Donc il y a 2 solut° : $x = 6$ et $x = -2$.

$S = \{-2, 6\}$

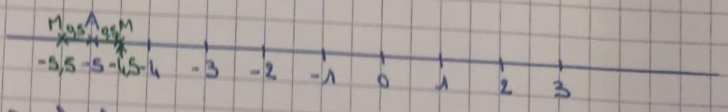
b) $|x+5| = 0,5$

On sait interpréter la valeur absolue d'une différence.

Or $x + 5 = x - (-5)$

Donc l'équation s'écrit : $|x - (-5)| = 0,5$

Soit M un point d'abscisse x et A le point d'abscisse -5 :



On cherche tous les points M distants de 0,5 unité du point A.

$S = \{-5,5 ; -4,5\}$

e) $|x-4| = -1$

Soit M le point d'abscisse x et A celui d'abscisse 4 :

$|x-4| = AM = -1$

Or une distance vaut au minimum 0.

Donc il est impossible d'avoir : $AM = -1$.

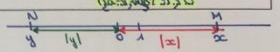
Donc l'équation n'admet aucune solution : $\mathcal{S} = \varnothing$.

Propriété

1) Pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y|$ *équivaut à* ... $x = y$ ou $x = -y$ ... ...

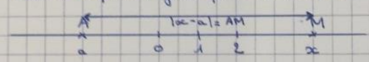
2) Pour tous réels a et r, l'équation : $|x-a| = r$ a pour ensemble de solution : $\begin{cases} \varnothing \text{ si } r < 0 \\ \{a\} \text{ si } r = 0 \\ \{a-r ; a+r\} \text{ si } r > 0 \end{cases}$

1\. Soit M le point d'abscisse x et N celui d'abscisse y :



$|x| = |y| \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow$ M et N sont $\underbrace{\text{confondus}}_{x = y}$ ou $\underbrace{\text{symétriques}}_{x = -y}$ par rapport à 0.

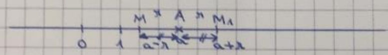
2\. Soit M le point ayant pour abscisse x.
Soit A le point ayant pour abscisse a.



Si $r < 0$: $|x-a| = r$: $\underbrace{AM}_{\geq 0} = \underbrace{r}_{< 0}$: Pas de solut° !

Si $r = 0$: $|x-a| = 0$, donc $AM = 0$, donc A et M sont confondus, donc ils ont la m
abscisse, donc $x = a$.

Si $r > 0$: $|x-a| = r$ équivaut à : $AM = r$



Donc : $\mathcal{S} = \{a-r ; a+r\}$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x a) $|x| = |2x-1|$ puis $|x+2| = 7{,}1$ b)

a) $|x| = \underbrace{|2x-1|}_{y}$ équivaut à : $x = 2x-1$ ou $x = -(2x-1)$

$1 = 2x - x$; $x = -2x + 1$

$x = 1$; $3x = 1$

$x = \frac{1}{3}$

$$\mathcal{S} = \left\{1 ; \frac{1}{3}\right\}$$

b) $|x+2| = 7,1$

$|x-(-2)| = 7,1$ $\left(\begin{array}{l}\text{forme : } |x-a| = r \\ \text{avec : } a = -2 \\ \quad\quad\; r = 7,1\end{array}\right)$

qui équivaut donc à :

$x = -2+7,1 = 5,1$ ou $x = -2-7,1 = -9,1$

$S = \{-9,1 ; 5,1\}$

Inéquations et valeurs absolues

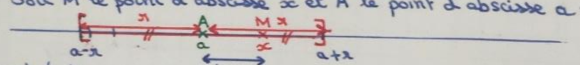
Propriété

Soient a et r deux réels avec $r > 0$.

L'ensemble des réels x tels que : $|x-a| \leq r$ est exactement l'intervalle fermé $[a-r ; a+r]$

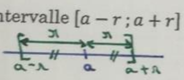
Donc $|x-a| \leq r$ équivaut à dire que $x \in [a-r ; a+r]$ ....ou encore à $a-r \leq x \leq a+r$......

Justification : Soit M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse a :



$|x-a| \leq r$ revient à dire que $AM \leq r$, càd lorsque $a-r \leq a+r$ / $x \in [a-r ; a+r]$.

Remarque : l'intervalle $[a-r ; a+r]$ est appelé intervalle fermé centré en a.



Exercice 15

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en interprétant chaque valeur absolue comme une distance :

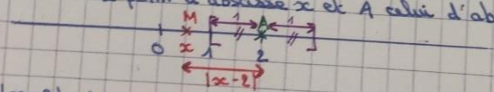
a) $|x-2| \leq 1$; b) $|x+1| < 4$; c) $|x-5| \geq 3$; d) $|x| \leq 10^{-1}$ e) $|x-7| > -2$.

2) Traduire à l'aide de valeurs absolues : $x \in]-5;9[$; $y \leqslant -2$ ou $y \geqslant 2$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x \leqslant |x|$.

1) a) $|x-2| \leq 1$

M1 Soit M le point d'abscisse x et A celui d'abscisse 2 :



$|x-2| = AM$

Donc : $|x-2| \leq 1 \Leftrightarrow AM \Leftrightarrow x \in [1;3]$

$S = [1;3]$

M2 # cours : $|x-2| \leq 1$ est de la forme : $|x-a| \leq r$ avec : $a = 2$
$r = 1$

$|x-2| \leq 1$ équivaut à : $2-1 \leq x \leq 2+1$

$1 \leq x \leq 3$

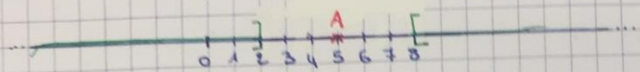
$S = [1;3]$

b) $|x+1| < 4 \Leftrightarrow |x-(-1)| < 4 \Leftrightarrow -5 < x < 3$

$S =]-5; 3[$

c) $|x-5| \geqslant 3$

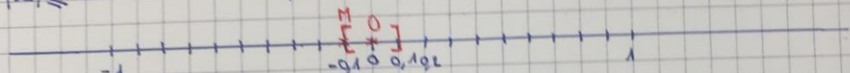
Soit M le point d'abscisse x et A celui d'abscisse 5 :



$x \in]-\infty; 2] \cup [8; +\infty[$

$S =]-\infty; 2] \cup [8; +\infty[$

d) $|x| \leqslant 10^{-1}$ Soit M le point d'abscisse x et O le point d'abscisse 0.



$|x-0| \leqslant 10^{-1}$

$OM \leqslant 10^{-1}$

$|x| \leqslant 10^{-1}$ équivaut à : $-0,1 \leqslant x \leqslant 0,1$

$S = [-0,1; 0,1] = [-10^{-1}; 10^{-1}]$

e) $\underbrace{|x-7|}_{AM} > -2$

$AM > -2$: tjs vrai car $AM \geqslant 0 > -2$!

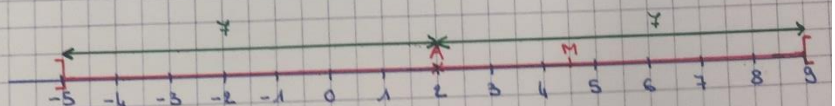
$S =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

2) a) $x \in]-5; 9[$.

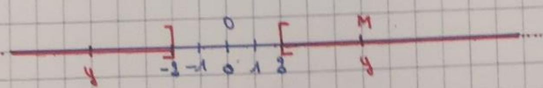
centre de $]-5; 9[$ est :

$\frac{-5+9}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x \in]-5; 9[\Leftrightarrow |x-2| < 7$



b) $y \leqslant -2$ ou $y \leqslant 2$: ...



3)

$\mathcal{S} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ car : Si $x < 0$: $x \leqslant |x|$ car $|x| \geqslant 0$!

Si $x \geqslant 0$: $|x| = x$ et $x \leqslant x$: vrai !

Donc $x < |x|$ est vraie pour tout réel x.

Exercice 16

Donner l'intervalle ou les intervalles correspondant à chacune des inégalités, et représenter l'ensemble des solutions de chaque inéquation sur l'axe gradué donné :

	INEGALITE		INTERVALLE	AXE GRADUE
a.	$\|x-7\| \le 1$ AM $\leqslant 1$	$\Leftrightarrow$	$x \in [6;8]$	
b.	$\|x-1\| < 7$ AM < 7	$\Leftrightarrow$	$x \in]-6;8[$	
c.	$\|x-3\| < 2$ AM < 2	$\Leftrightarrow$	$x \in]1;5[$	
d.	$\|x-3\| \ge 2$ AM $\geqslant 2$	$\Leftrightarrow$	$x \in]-\infty;1] \cup [5;+\infty[$	
e.	$\|x-4\| \le 5$ AM $\leqslant 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in$	
f.	$\|x-12\| > 7$ AM > 7	$\Leftrightarrow$	$x \in]-\infty;5[\cup]19;+\infty[$	
g.	$\|x+2\| \le 9$	$\Leftrightarrow$	$x \in$	
h.	$\|x+6\| > 5$	$\Leftrightarrow$	$x \in$