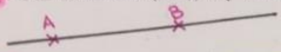
Chapitre V LES VECTEURS

I – Généralités

Définition 1 On dit que deux droites ont la même direction lorsqu'elles sont parallèles.

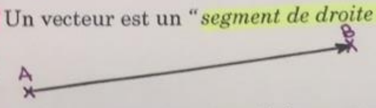
Remarque : une direction étant fixée, il y a deux sens de parcours sur une droite donnée.

Illustration : Sur la droite (AB), il y a deux sens de parcours : de A vers B et de B vers A..



Définition 2 : Un vecteur est un "*segment de droite orienté*".

Illustration :



Il faut trois renseignements pour caractériser un vecteur :

- Sa direction (celle de la droite (AB)).
- Son sens (de A vers B)
- Sa longueur, encore appelée la norme du vecteur, qui n'est autre que la longueur du segment [AB].

On adoptera la notation $\overrightarrow{AB}$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le point A est appelé l'*origine* du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est appelé *l'extrémité* du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
La flèche sur un vecteur va toujours de l'origine vers l'extrémité de ce vecteur !

Remarques importantes : Un vecteur n'est ni une longueur, ni une droite, ni un segment.

Ne pas oublier la flèche dans la notation des vecteurs qui donne tout son sens au vecteur.

En particulier, $\underbrace{\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}}_{\text{vecteurs}}$, tandis que $\underbrace{AB = BA}_{\text{longueurs}}$, $\underbrace{[AB]=[BA]}_{\text{segments}}$, et $\underbrace{(AB)=(BA)}_{\text{droites}}$

Des cas particuliers de vecteurs : Le vecteur nul n'a pas de direction, ni de sens, et sa norme vaut 0.

On l'appellera le vecteur nul : on le notera $\vec{0}$: un vecteur est nul lorsque son origine coïncide avec son extrémité.
lire : le vecteur nul
être au même endroit

Deux vecteurs qui ont la même direction, la même norme, mais des sens contraires sont dits opposés.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés : par analogie avec les nombres, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $-\overrightarrow{AB}$ et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Illustration :

$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs opposés.
On notera : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

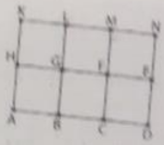
Propriété : **égalité de deux vecteurs.**

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont *les mêmes caractéristiques*, à savoir s'ils ont la même direction, le même sens, et la même norme.

Illustration : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie donc que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, que l'on se déplace pour aller de A vers B dans le même sens que pour aller de C vers D, et qu'enfin, les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.

Exemple

On donne la figure ci-contre formée de six carrés identiques juxtaposés :



a) Citer deux vecteurs égaux.

b) Citer deux vecteurs qui ont seulement la même norme. longueur

c) Citer deux vecteurs opposés.

d) Citer deux vecteurs qui ont la même direction, des sens opposés et des normes différentes.

a) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

b) $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MF}$ ont seulement la m̂ norme.

c) $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{MF}$ sont opposés.

d) $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la m̂ direction, des sens opposés et des normes différentes.

Remarque cruciale : A partir de maintenant, on emploiera fréquemment le terme de représentant d'un vecteur : un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur qui est égal à $\overrightarrow{AB}$.

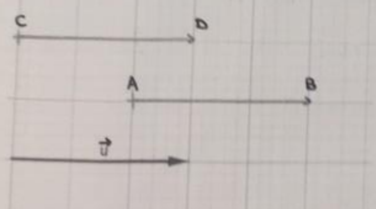
Comme il y a une infinité de représentants d'un vecteur donné, on note conventionnellement $\vec{u}$ un tel représentant, sans nommer son origine et son extrémité.

Exemple

Donner deux représentants du vecteur $\overrightarrow{GE}$ dans l'exemple précédent.

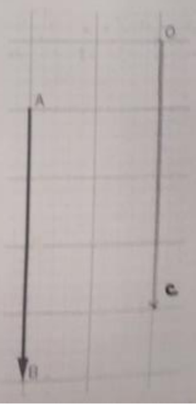
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LN}$ sont 2 représentants de $\overrightarrow{GE}$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{GE}$.

Illustration : *a*) Construire deux représentants du vecteur $\vec{u}$ dessiné ici :



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

b) Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont l'origine est le point O :



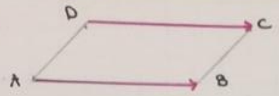
II – Lien entre les vecteurs et la géométrie

Nous allons voir, grâce à la propriété suivante, que les vecteurs constituent un outil très performant pour faire de la géométrie.

Théorème fondamental **(fait le lien entre les vecteurs et la géométrie).**

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Illustration :



Preuve :

Si ABCD est un pgm, alors : $(AB) /\!/ (DC)$ car les ĉ opposés d'un pgm sont 2 à 2 parallèles :
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la m̂ direction.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont le m̂ sens.

Enfin : $AB = DC$ car les ĉ opposés d'un pgm ont la m̂ longueur.

Par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Réciproque : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: alors $(AB) /\!/ (DC)$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la m̂ direct° et $AB = DC$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

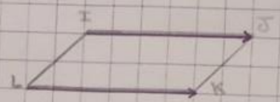
Donc ABCD qui n'est pas croisé est un pgm.

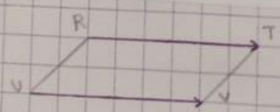
Avertissement : dès qu'on parle de vecteurs, de parallélogrammes…., faites toujours, même si cela n'est pas demandé, une figure à main levée.

J'attire votre attention sur le fait que $ABCD$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et non pas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ comme on est souvent tenté de l'écrire par rapidité. Attention à l'ordre des points.

Exemples

- $IJKL$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$
- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{UV}$ équivaut à dire que le quadrilatère RTVU est un pgm.





Application : Construction géométrique d'un représentant d'un vecteur donné (sur papier sans carreau).

Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine C.

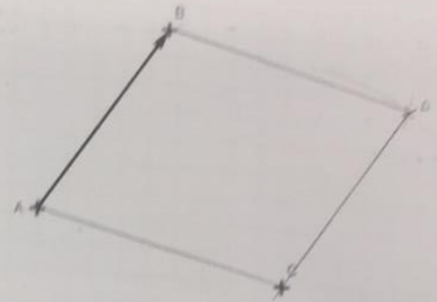
Méthode : On cherche à construire le point D tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Donc ABDC est un pgm :

Construction :

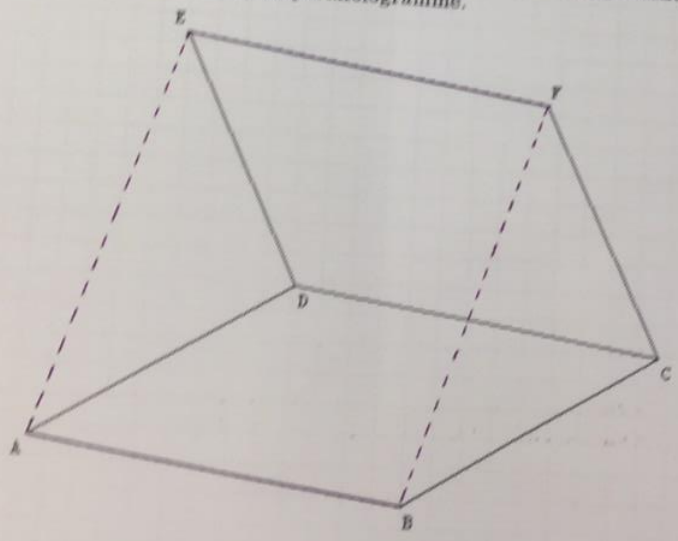
On utilise le compas en se souvenant que les 2 opposés d'un pgm sont de m longueur :

On reporte au compas AB à partir du point C et AC à partir du point B.



Exercice 1

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ et $CDEF$ sont des parallélogrammes. Démontrer que $ABFE$ est un parallélogramme.



ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
CDEF est un pgm, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$

Par suite, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$.

Donc par théorème le quadrilatère ABFE est un pgm.

Exercice 2

Construire trois points A, I et B tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
Que peut-on dire du positionnement de ces trois points ? Justifier.

Construire 3 points A, I et B tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

I est le milieu du segment [AB] car : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, donc (AI) et (IB) sont parallèles : ces deux droites sont confondues, donc A, I et B sont alignés.

De +, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $AI = IB$

Donc I = milieu de [AB]

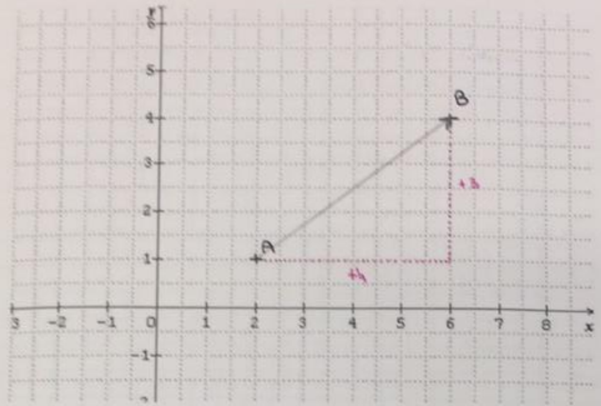
III – Les translations

Définition : Le mouvement qui consiste à se déplacer en ligne droite sans tourner est appelé une translation.
Par exemple, un escalator, un ascenseur sont animés de mouvement de translation.

Remarque : Le mouvement décrit précédemment qui permet d'aller d'un point A à un point B est appelé la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

IV – Vecteurs et géométrie analytique



Un exemple d'introduction : Soit $A(2\ ;\ 1)$ et $B(6\ ;\ 4)$, et considérons le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Placer A, B et construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Pour aller du point A au point B en suivant les directions des axes de coordonnées, on avance de 4 unités à l'horizontale et on monte de 3 unités à la verticale.

On dira que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (4 ; 3) et on notera en colonne les coordonnées d'un vecteur : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Cette notation, permet de différencier les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point.

♥♥ Propriété (XXL)

Soit $(O\ ; I\ ; J)$ un repère du plan et $A(x_A\ ; y_A)$ et $B(x_B\ ; y_B)$ deux points placés dans c repère.

Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Rq : $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A$

$y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A$

Si de plus le repère $(O\ ; I, J)$ est orthonormé, alors :

$$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{\text{norme du vecteur } AB} = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2}$$

Cette propriété traduit l'exemple vu en introduction.

Retenir : pour déterminer les coordonnées d'un vecteur, on fait :

♥♥ **abscisse de L'EXTREMITÉ – abscisse de L'ORIGINE du vecteur**, et pareil en ordonnée.

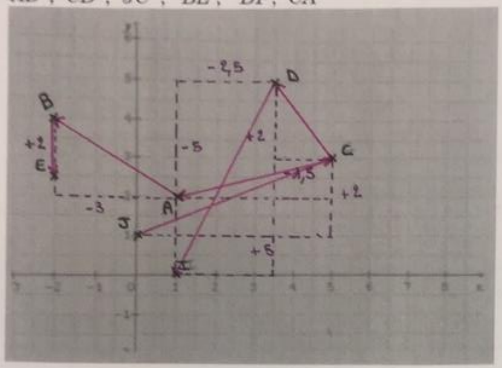
Exemple 1 : Soit $A(2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 3)$ et $C(-4\ ;\ 1)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B = -4+1 = -3 \\ y_C - y_B = 1-3 = -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : En utilisant le repère ci-dessous, lire les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{CA}$



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1,5\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0\\-1,5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}-2,5\\-5\end{pmatrix}$

Recapitulatif :

⟶ avancer suivant x ⇒ signe +

⟵ reculer suivant x ⇒ signe −

↑ monter suivant y ⇒ signe +

↓ descendre suivant y ⇒ signe −

Propriété clé

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les m̂ coordonnées.

x, x', y, y' étant des réels, on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si : $x = x'$ et $y = y'$

Exercices fondamentaux (à maîtriser parfaitement)

Exercice 3

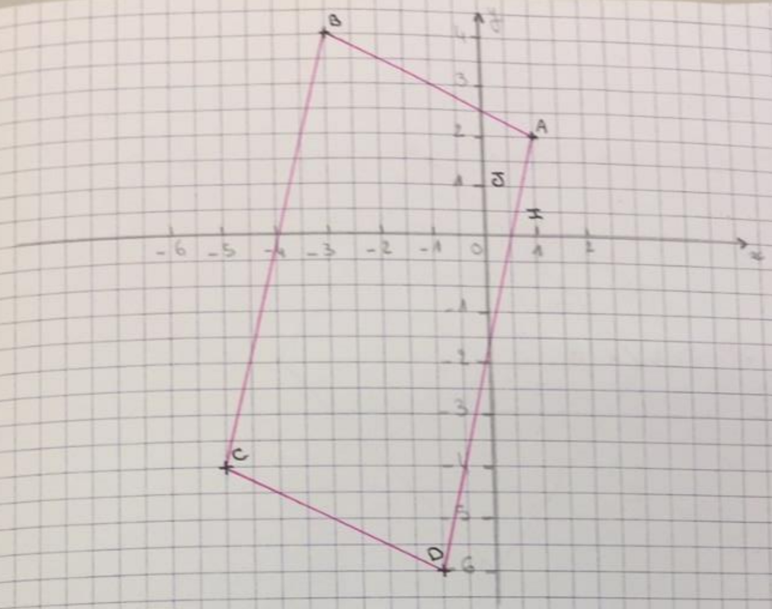
1) Dans un *R.O.N.* $(O ; I ; J)$, placer les points : $A(1 ; 2)$; $B(-3 ; 4)$ et $C(-5 ; -4)$ et $D(-1 ; -6)$.

2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Déterminer les coordonnées du point K centre de ce parallélogramme.

→ voir p. suivante

1)



2) Pour prouver que ABCD est un pgm il suffit de prouver que $\vec{AB} = \vec{DC}$ en prouvant qu'ils ont l[es] m̂ coordonnées.

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -3-1 = -4 \\ y_B - y_A = 4-2 = 2 \end{pmatrix}$

$\vec{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D = -5-(-1) = -4 \\ y_C - y_D = -4-(-6) = 2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{AB} = \vec{DC}$

ABCD est un pgm.

3) K est le centre du pgm ABCD donc K est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

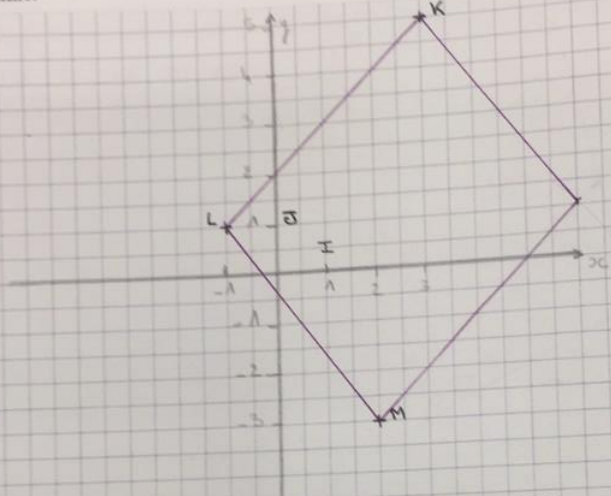
$K(x_K ; y_K)$ est le milieu de [AC] donc : $\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1. \end{cases}$

Donc $K(-2 ; -1)$

Exercice 5

1) Placer dans un *repère orthonormé* $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points $K(3\ ;\ 5)$; $L(-1\ ;\ 1)$ et $M(2\ ;\ -3)$.

2) Déterminer, en utilisant des vecteurs, les coordonnées du point N tel que le quadrilatère $KLMN$ soit un parallélogramme.



On cherche ici quelles doivent être les coordonnées du point N pour que KLMN soit un pgm.

Soit $N(x_N ; y_N)$: Or KLMN est un pgm, donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

Or $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} x_L - x_K = -1-3 = \underline{-4} \\ y_L - y_K = 1-5 = \underline{-4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix} x_M - x_N = \underline{2 - x_N} \\ y_M - y_N = \underline{-3 - y_N} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, donc ces vecteurs ont les m̂ coordonnées, donc : $-4 = 2 - x_N$ (m̂ abscisse) et $-4 = -3 - y_N$ (m̂ ordonnée)

$x_N = 2+4 = 6$ $\qquad$ $y_N = -3+4 = 1$

Donc $N(6 ; 1)$.

V – Opérations algébriques sur les vecteurs

A) Somme de deux vecteurs

Intuitivement, on comprend aisément si l'on raisonne en termes de translation, que prendre un escalator qui emmène de A à B puis prendre un autre escalator qui emmène de B à C revient à prendre un escalator qui emmène de A à C.

De cette façon assez intuitive, on va définir la somme de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propriété : La relation de Michel CHASLES (1793-1880)

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Remarques :

- Cette relation n'est valable qu'avec des vecteurs : écrire : pour tous points A, B et C, $AB + BC = AC$ constitue une monstruosité ! Pourquoi au fait ?
- **Pour appliquer cette relation, observez bien que les vecteurs doivent être mis bout à bout, c'est-à-dire que <u>l'extrémité de l'un doit coïncider avec l'origine de l'autre</u>.**
- Cette relation de Chasles, s'étend à plus de deux vecteurs : par exemple, écrire plus simplement la somme de vecteurs suivante : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

Exemples

Réduire les sommes de vecteurs suivantes :

a) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FE}$; b) $\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PA}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AR}$

d) $\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$; e) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{TI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BT}$ f) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CD} + (-\overrightarrow{CT}) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TD}$

$\Downarrow$ cela ne se simplifie pas davantage !

Exercice 5

$ABCD$ est un parallélogramme.

Montrer, à l'aide de la relation de *Chasles*, que pour tout point M on a : $\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}} + \underbrace{\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \underbrace{\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}} + \underbrace{\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}}$

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

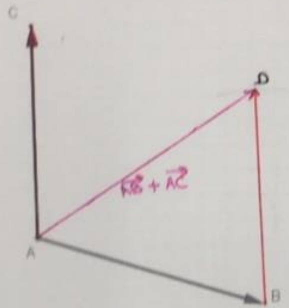
Or $ABCD$ est un pgm donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.

Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui ne sont pas mis bout à bout mais qui ont la même origine ?

Exemple : Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ issu de A.

Méthode : On se ramène à ce que l'on sait faire ! On va mettre bout à bout le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine B.

Construction :



On construit le point D tel que : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$: ABCD est un pgm!

Par suite, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

Règle du parallélogramme : **(permet d'additionner deux vecteurs qui ont la même origine).**

Pour tous points *A, B, C* et *D*, on a :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.

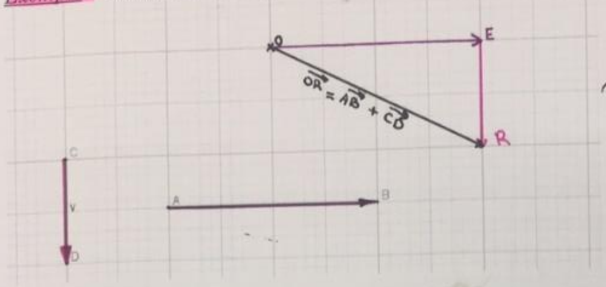
Preuve :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AC})$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
Donc ABDC est un pgm.

Exemple : Construire le point R sachant que : $\overrightarrow{AV}+\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AR}$.
$\overrightarrow{AV}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AJ}$
$\overrightarrow{AV}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{JR}$
$\overrightarrow{AV}=\overrightarrow{JR}$ signifie que AVRJ est un pgm.

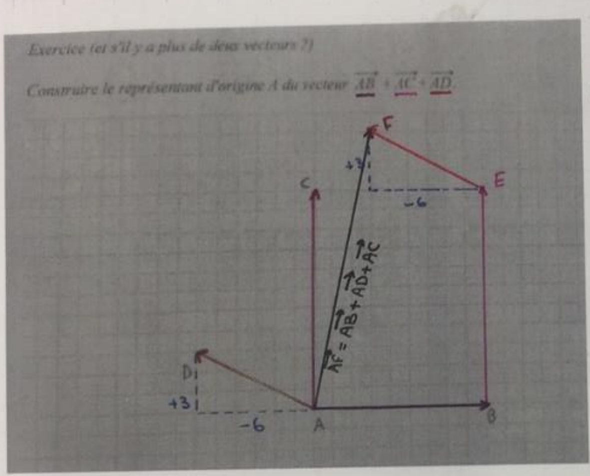
Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui n'ont rien de commun ?

Méthode **: *on se ramène à ce que l'on sait déjà faire*,** en construisant un représentant de l'un des deux vecteurs dont l'origine est placée à l'extrémité de l'autre.

Exemple : Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ d'origine O.



Soit E le point tel que : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$
et R le point tel que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ER}$
Par suite : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{OR}$
Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OR}$



Soit E le point tel que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$
et F le point tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$
Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$

Remarque : pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ on a : 1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; 2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$; 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
Notez l'analogie de ces règles avec celles connues concernant les nombres réels.

Propriété et retour de l'analytique

1) L'addition des vecteurs est commutative, c'est-à-dire que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
on permute l'ordre des deux vecteurs, mais pas l'ordre des lettres de chaque vecteur !

2) Dans un *R.O.N.* (*O* ; *I* ; *J*), soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$.

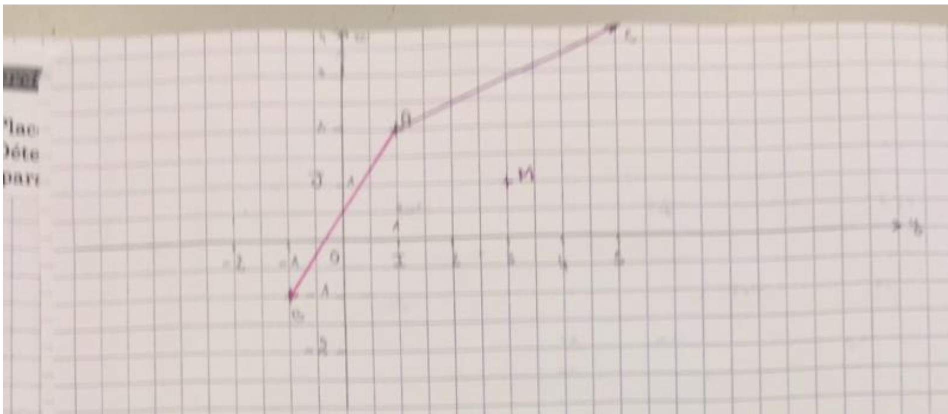
En d'autres termes, pour avoir les coordonnées de la somme de deux vecteurs donnés, il suffit d'additionner....... respectivement les coordonnées de même nom de chacun des deux vecteurs.

Remarque : Ces deux règles s'étendent à une somme de ***plus de deux*** vecteurs.

Exemple fondamental : Dans un *R.O.N.* (O ; I ; J), soit $A(1 ; 2)$; $B(-1 ; -1)$ et $C(5 ; 4)$.

1) Faire une figure, puis déterminer, par le calcul, les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2) Déterminer les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

=> voir p. suivante



1 On cherche les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Soit M $(x ; y)$: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 2 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = -1 - 2 = -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-1=4 \\ 4-2=2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2+4=2 \\ -3+2=-1 \end{pmatrix}$

Bilan : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2+4=2 \\ -3+2=-1 \end{pmatrix}$

Donc : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que : $x_M - 1 = 2$ et $y_M - 2 = -1$

$y_M = 2 + 1 = 3$ $y_M = -1 + 2 = 1$

$\Downarrow$

2 vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les m̂ coordonnées.

Donc M $(3 ; 1)$

2 On cherche les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Soit K $(x_K ; y_K)$: $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix} x_A - x_K = 1 - x_K \\ y_A - y_K = 2 - y_K \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix} -1 - x_K \\ -1 - y_K \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 5 - x_K \\ 4 - y_K \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1 - x_K + (-1) - x_K + 5 - x_K = 5 - 3x_K \\ 2 - y_K + (-1) - y_K + 4 - y_K = 5 - 3y_K \end{pmatrix}$ et $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ équivaut à dire que : $5 - 3x_K = 0$ et $5 - 3y_K = 0$

$y_K = \frac{5}{3}$

$5 = 3x_K$

$x_K = \frac{5}{3}$

Donc K $\left(\frac{5}{3} ; \frac{5}{3}\right)$

Produit d'un vecteur par un réel

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ qui est défini comme suit :

- $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.
- $k\vec{u}$ a : le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$.
- $k\vec{u}$ a pour norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ où $|k|$ désigne la distance à 0 du nombre k appelée la valeur absolue de k. Par exemple : $|3| = 3$; $|-8| = 8$; $|-2{,}3| = 2{,}3$

valeur absolue de k

Remarque si $k = 0$, alors $0 \times \vec{u} = \vec{0}$; si $\vec{u} = \vec{0}$, alors pour tout réel k, $k\vec{u} = \vec{0}$.

$\vec{u}$, $2\vec{u}$, $0{,}74\vec{u}$ ont la m̂ direction, le m̂ sens car $2>0$ et $0{,}74>0$, mais pas la m̂ longueur, norme.

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$: $\|2\vec{u}\| = |2| \times \|\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$

$\|0{,}74\vec{u}\| = |0{,}74| \times \|\vec{u}\| = 0{,}74\|\vec{u}\|$

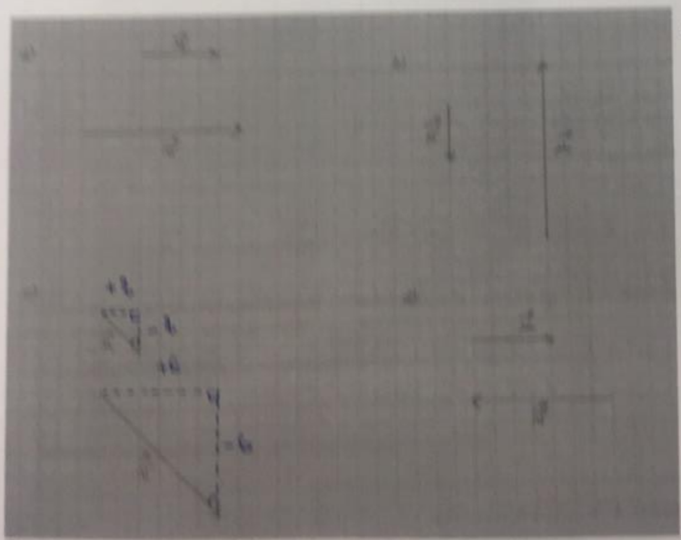
$-3\vec{u}$; $-\frac{4}{5}\vec{u}$ ont la m̂ direction (que $\vec{u}$) et le m̂ sens (opposé à celui de $\vec{u}$).

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$: $\|-3\vec{u}\| = |-3| \times \|\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$

$\|-\frac{4}{5}\vec{u}\| = |-\frac{4}{5}| \times \|\vec{u}\| = \frac{4}{5}\|\vec{u}\|$

Ex : Construisons un représentant de $-3\vec{v}$:

Exemples Sur chacun des exemples ci-dessous, exprimer, lorsque c'est possible, le vecteur $\vec{v}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire, trouver, si possible, un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$: ∃ possible si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont la m̂ direction



a) $\vec{w} = k\vec{v}$ avec $k>0$ car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ m̂ sens

$\|\vec{v}\| = 4$; $\|\vec{w}\| = 8$

et $\vec{w} = k\vec{v}$, $\|\vec{w}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$

$8 = k \times 4$

$k = \frac{8}{4} = 2$

$\vec{w} = 2\vec{v}$

b) $\vec{w} = k\vec{v}$ avec ⚠ $k<0$ car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'ont pas le m̂ sens

$\|\vec{w}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 9$

$\|\vec{w}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$

$3 = -k \times 9$

$k = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

$\vec{w} = -\frac{1}{3}\vec{v}$

d) c) → voir p. suivante

f)

⚠ Impossible d'écrire $\vec{w} = k\vec{v}$ car $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'ont pas la m̂ direction.

Exerci

1) Plac
2) Déte
un para

c) $\vec{v} = 3\vec{u}$

d) $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k < 0$.

avec $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 7$

$\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
$7 = -k \times 4$
$k = -\frac{7}{4}$

$\vec{v} = -\frac{7}{4}\vec{u}$

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits ***colinéaires*** s'il existe un **réel *k*** tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : colinéaire signifie porté par la même ligne, à savoir que des vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction et réciproquement.

En particulier, lorsque $\vec{v} = -\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés ($k = -1$). Des vecteurs opposés sont donc colinéaires. Attention, des vecteurs colinéaires ne sont pas nécessairement opposés !

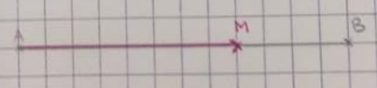
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exercice 6 : $[AB]$ est un segment de longueur 6 cm. Construire un tel segment, puis placer les points M, N, P et Q sachant que :

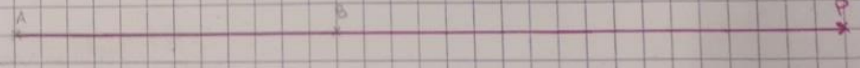
a) $\underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\vec{v}} = \overset{>0}{\frac{2}{3}} \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\vec{u}}$; *b)* $\overrightarrow{AP} = \overset{>0}{2{,}5}\ \overrightarrow{AB}$; *c)* $\overrightarrow{AN} = -1{,}5\overrightarrow{AB}$ *d)* $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

a) $\|\overrightarrow{AM}\| = \left|\frac{2}{3}\right| \times \|\overrightarrow{AB}\|$

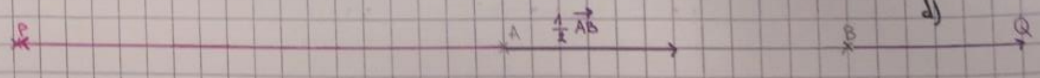
$\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{2}{3} \times 6 = 4$



b) $\|\overrightarrow{AP}\| = |2{,}5| \times \|\overrightarrow{AB}\|$
$\|\overrightarrow{AP}\| = 2{,}5 \times 6 = 15$



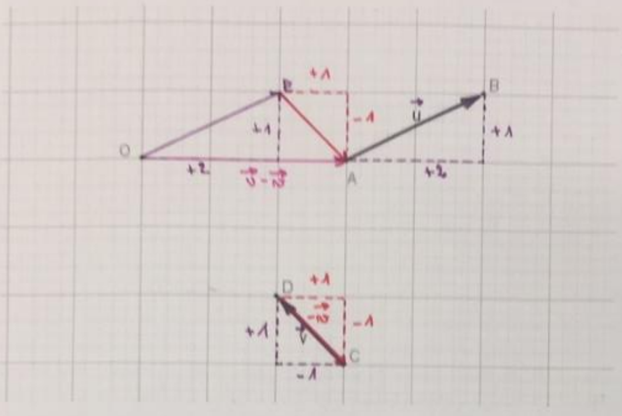
c) $\overrightarrow{AN} = -1{,}5\overrightarrow{AB}$
$\|\overrightarrow{AN}\| = |-1{,}5| \times \|\overrightarrow{AB}\|$
$\|\overrightarrow{AN}\| = 1{,}5 \times 6 = 9$



Exercice 7 : Construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DC} = -\vec{v}$

Donc : $\vec{u} - \vec{v} = \underbrace{\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}}_{\text{Chasles}} = \overrightarrow{OA}$



Propriétés utiles en calcul vectoriel

1) **Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k', on a :**

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ $\qquad k(\vec{u} - \vec{v}) = k\vec{u} - k\vec{v}$
- $(k + k')\,\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\,\vec{u}$

2) **Dans un *repère* $(O ; I ; J)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors, pour tout réel k, $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$**

On retiendra que multiplier par k un vecteur $\vec{u}$ revient à multiplier par k chacune des coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Remarque : noter l'analogie avec les règles de calcul sur les nombres réels que vous connaissez déjà pour le 1).

Propriété

Soient A et B deux points du plan.

Dire que le point I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à : $\boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$ ....ou encore $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

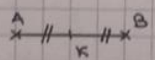
Exercice 8

A l'aide de la propriété précédente, démontrer après les avoir rappelées, les relations qui donnent les coordonnées du milieu d'un segment en fonction des coordonnées de ses extrémités.

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$

Soit $K(x_K ; y_K)$ le milieu de $[AB]$.

Propriété : $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ Preuve :



K est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exerci

1) Plac
2) Déte
un par

Or $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}x_K-x_A\\ y_K-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_B-x_A)\\ \frac{1}{2}(y_B-y_A)\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ équivaut à :

$x_K-x_A=\frac{1}{2}(x_B-x_A)$

$x_K=x_A+\frac{1}{2}(x_B-x_A)$

$x_K=\frac{2x_A}{2}+\frac{x_B-x_A}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}$

et $y_K-y_A=\frac{1}{2}(y_B-y_A)$

$y_K=y_A+\frac{1}{2}(y_B-y_A)$

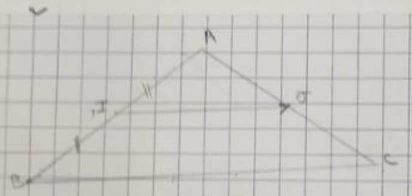
$y_K=\frac{2y_A}{2}+\frac{y_B-y_A}{2}=\frac{y_A+y_B}{2}$

Donc $K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Exercice 9

1) Soit ABC un triangle, I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$. En utilisant des vecteurs, démontrer que (IJ) et (BC) sont parallèles et que $IJ=\dfrac{BC}{2}$.

2) En déduire que pour tout quadrilatère $ABCD$, le quadrilatère dont les sommets sont les milieux respectifs des côtés de $ABCD$ est un parallélogramme.



1) But : Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Ainsi $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (*)

Il résulte de (*) que : $(IJ)\parallel(BC)$ car 2 vecteurs colinéaires ont m̂ direct°.

et $\|\overrightarrow{IJ}\|=\|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\|$

$IJ=\left|\frac{1}{2}\right|\times\|\overrightarrow{BC}\|$

$IJ=\frac{1}{2}\times BC$

$IJ=\frac{BC}{2}$

3)

Soit I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA]

But : Démontrer que IJKL est un pgm.

(3) : Construisons la diagonale [AC] du quadrilatère ABCD.

Plaçons-nous dans le triangle ABC : I = milieu de [AB]
J = milieu de [BC]

Donc d'après le th. 1 : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (1)

De même dans le triangle DAC : L = milieu de [AD]
K = milieu de [DC]

Donc $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}}$ $\left(= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc d'après le théorème fondamental du parallélogramme IJKL est un pgm.

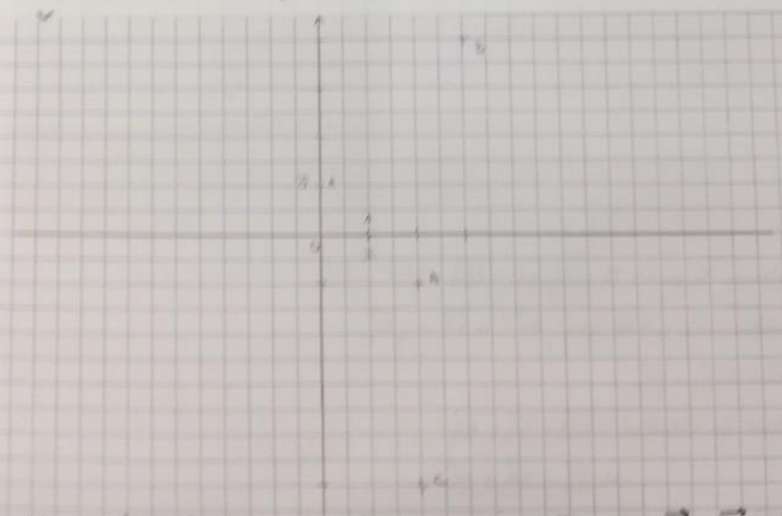
$\Rightarrow$ th. du milieu

Exercice 10

① Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points $A(2\ ;\ -1)$; $B(3\ ;\ 4)$ et $C(-5\ ;\ 2)$.

En raisonnant sur les coordonnées des vecteurs, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ ② En déduire $\left\|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right\|$



① Soit $M(x_M\ ;\ y_M)$: on cherche ici les valeurs x_M et y_M telles que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A = x_M - 2 \\ y_M - y_A = y_M - (-1) = y_M + 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 3 - 2 = 1 \\ y_B - y_A = 4 - (-1) = 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = -5 - 2 = -7 \\ y_C - y_A = 2 + 1 = 3 \end{pmatrix}$

Exerci

1) Plac
2) Déte
un par

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-14\\6\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+(-14)=-13\\5+6=11\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-13\\11\end{pmatrix}$

Enfin, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que ces 2 vecteurs ont les mêmes coordonnées, de sorte que :

$x_M-2=-13$ et $y_M+1=11$

$x_M=-13+2$ $\quad$ $y_M=11-1$

$x_M=-11$ $\quad$ $y_M=10$

Donc $M(-11;10)$

② D'après ① : $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-13\\11\end{pmatrix}$, donc $\|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-13)^2+11^2}=\sqrt{169+121}$
$=\sqrt{290}\approx 17.$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$
alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$
$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

b)

Exercice 11

A, B et C sont trois points donnés du plan. On se propose de construire le point D tel que :
$2\,\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$.

a) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Construire alors rigoureusement le point D.

On cherche à construire le point D vérifiant : $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$

a) But : trouver 2 réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

On sait que : $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$

Or d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

Ainsi la relation : $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}$

s'écrit : $2\overrightarrow{DA}+3(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$

$$2\vec{DA} + 3\vec{DA} + 3\vec{AB} = \vec{DA} + \vec{AC}$$

$$5\vec{DA} + 3\vec{AB} = \vec{DA} + \vec{AC}$$

$$3\vec{AB} = DA + \vec{AC} - 5\vec{DA}$$

$$3\vec{AB} = -4\vec{DA} + \vec{AC}$$

$$3\vec{AB} - \vec{AC} = -4\vec{DA}$$

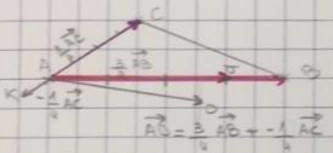
$$3\vec{AB} - \vec{AC} = 4\vec{AD}$$

$$\vec{AD} = \frac{3\vec{AB} - \vec{AC}}{4} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$$

$$x = \frac{3}{4} \; ; \; y = -\frac{1}{4}$$

b)



VI – Géométrie et vecteurs

Propriété clé (sert à montrer un alignement de points)

Trois points *A*, *B* et *C* deux à deux distincts sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Preuve : évidente, résulte de la notion même de vecteurs colinéaires.

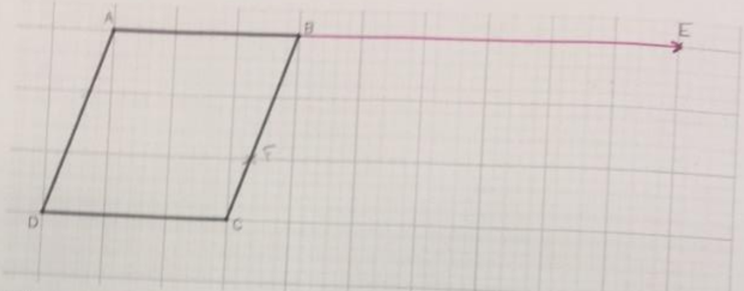
Prenez le temps de comprendre que, les origines et extrémités de deux vecteurs colinéaires qui ont une origine ou extrémité commune, forment trois points alignés.
Cela est utile en exercice.

Exerci

1) Plac
2) Déte
un par

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme.



i) Construire rigoureusement les points E et F sachant que : $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CB}$.

ii) Quelle conjecture émettez-vous concernant les points D, E et F ?

iii) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{A}$
x et y, nb à trouver

iv) Démontrer que $3\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CF}$, puis en déduire que $3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}$.

v) Qu'en déduit-on concernant les points D, E et F.

ii) Il semblerait que les points D, E et F soient alignés.

iii) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB}$ (*)

iv) $3\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CF}$

D'après la relat° de Chasles : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$

Donc : $3\overrightarrow{DF} = 3(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF})$
$3\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$ (* *)

On sait que (énoncé) : $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CF} = 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB}$

Or ABCD est un pgm, donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

Donc $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$

et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ car ABCD = pgm.

Donc $3\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$

En remplaçant ds (* *) on a : $3\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$
$3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB}$
$3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}$

v) On a établi que : $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DF}$

Cela signifie que $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires. Or ils ont un point D en commun.

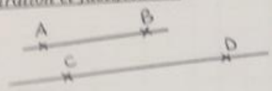
Donc E, F et D sont alignés.

La conjecture de ii) est validée.

Propriété (sert à montrer le parallélisme de deux droites).

A, B, C et D sont quatre points distincts.
(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont COLINÉAIRES ....
càd montrer qu'il existe un nb k réel tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

Illustration et justification :



Exercice 13

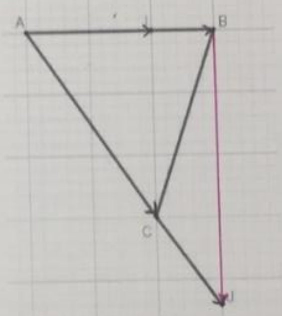
ABC est un triangle, I et J sont les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

La figure ci-contre résume la situation :

1) Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Etablir que $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que (IC) et (BJ) sont parallèles.



1) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ (et énoncé $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

Donc : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

Donc $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

3) Montrons que $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

et $\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IC}$

Définition

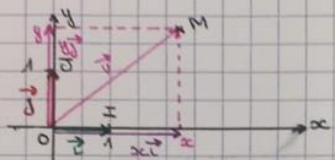
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une *base* de l'ensemble des vecteurs du plan s'ils *ne sont pas colinéaires*.

On notera $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ une telle base.

Base = couple de vecteurs non colinéaires

Remarque : On a coutume, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;J)$, de noter : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
On parlera de la base $(\vec{i},\vec{j})$ au lieu de dire dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

Grâce à des propriétés vues en amont, on a : *si* $(\vec{i},\vec{j})$ est une base des vecteurs du plan, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit, de façon unique, sous la forme : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ *: les réels x et y sont appelés coordonnées* (*ou composantes*) *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.



$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$
$\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ Rq : on dit que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exemples

Soit $(\vec{i}\ ;\vec{j})$ une base du plan.

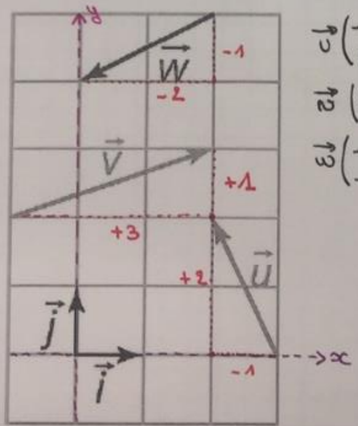
Si $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, *alors, dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, *on a :* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Si $\vec{v} = 5{,}2\vec{i} - 2\vec{j}$, *alors, dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, *on a :* $\vec{v}\begin{pmatrix}5{,}2\\-2\end{pmatrix}$

Si $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ *alors on a :* $\vec{w} = -1\vec{i} + 2\vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

Exercice 14

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Définition

Si dans un même repère, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où x, y, x' et y' sont des réels, on appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $det(\vec{u}, \vec{v})$ avec : $det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

déterminant

Exemples

Dans un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$. Calculer $det(\vec{u}, \vec{v})$ puis $det(\vec{u}, \vec{w})$ puis $det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w})$.

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 3 \times 4 = -2 - 12 = -14$

$\det(\vec{u}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -2 \times (-7) - 3 \times (-5) = 14 + 15 = 28$

$\det(\vec{u}; \vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -2 \times (-6) - 3 \times (-1) = 12 + 3 = 15$

avec $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 + (-5) = -1 \\ 1 + (-7) = -6 \end{pmatrix}$

Nous allons enfin traiter la notion de colinéarité de façon analytique, c'est-à-dire en se plaçant dans un repère et en utilisant les coordonnées.

Propriété XXXL

Deux vecteurs non nuls d'un même repère sont colinéaires si et seulement si ils ont des coordonnées ...PROPORTIONNELLES......

En utilisant le déterminant, on a : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si .....$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.......................................

Preuve : Ecrite ci-dessous, à titre culturel.

Pour démontrer une équivalence, on démonte tout d'abord le sens direct, puis la réciproque

Sens direct : **montrons que si deux vecteurs sont colinéaires alors leur déterminant est nul.**

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$. Raisonnons par disjonction de cas.

1er cas : si $\vec{v} \neq \vec{0}$. Alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

or $k\vec{v}\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} kx' = x \\ ky' = y \end{cases}$.

Ainsi $xy' - x'y = kx' \times y' - x' \times ky' = kx'y' - kx'y' = 0$. Ce qui prouve que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

2e cas : si $\vec{v} = \vec{0}$. Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{vmatrix} = x \times 0 - y \times 0 = 0$. Ce qui prouve que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Dans tous les cas $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, le sens direct est démontré.

Réciproque : **montrons que si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ signifie $xy' - x'y = 0$ donc $xy' = x'y$. Raisonnons par disjonction de cas.

1er cas : si $x \neq 0$. Alors $y' = \frac{x'y}{x} = \frac{x'}{x} \times y$ (car $x \neq 0$).

On pose $k = \frac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $kx = \frac{x'}{x} \times x = x'$.

Or $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ donc $k\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ce qui prouve que $k\vec{u} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2e cas : si $x = 0$. Dans ce cas $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $xy' = x'y$ s'écrit $0 = x'y$.

- Si $x' = 0$, alors : $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{v} = y'\vec{j}$, avec $y' \in \mathbb{R}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires ;

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ ainsi $\vec{u} = y\vec{j}$, avec $y \in \mathbb{R}$ et $\vec{j} \neq \vec{0}$; donc $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à $\vec{j}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- Si $y = 0$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

Dans tous les cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, la réciproque est démontrée.

Lorsqu'on est dans un repère cette propriété permet de traiter efficacement et avec rapidité les problèmes d'alignement de points et de parallélisme de droites !

Exerci
1) Plac
2) Déte
un parc

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés en justifiant :

1) $A(\frac{-7}{2};\frac{-1}{2})$; $B(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et $C(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$

2a) $D(1 ; 3)$; $E(3 ; 4)$; $F(-3 ; 0)$.

2b) Déterminer le réel y pour que $G(25 ; y)$ appartienne à la droite (AB).

Rappel : A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = \frac{1}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y_B - y_A = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = \frac{5}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{12}{2} = 6 \\ y_C - y_A = \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3 \end{pmatrix}$

Par suite, $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 6 = 12 - 12 = 0$

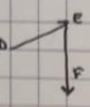
Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B, C sont alignés.

2a) D, E, F sont alignés si et seulement si $\vec{DE}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires.

$\vec{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D = 3 - 1 = 2 \\ y_E - y_D = 4 - 3 = 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E = -3 - 3 = -6 \\ y_F - y_E = 0 - 4 = -4 \end{pmatrix}$

Suite, $\det(\vec{DE}, \vec{EF}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times -4 - 1 \times -6 = -8 + 6 = -2$

$-2 \neq 0$, donc $\vec{DE}$ et $\vec{EF}$ ne sont pas colinéaires :



"Conclus°" : D, E et F ne sont pas alignés.

2b) $G \in (AB)$ signifie que les points A, B et G sont alignés.

A, B et G sont alignés ssi $\vec{AB}$ et $\vec{BG}$ sont colinéaires.

Donc $G(25 ; y) \in (AB)$ ssi $\vec{AB}$ et $\vec{BG}$ sont colinéaires càd : $\det(\vec{AB} ; \vec{BG}) = 0$

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{BG}\begin{pmatrix} 25 - \frac{1}{2} = 24,5 \\ y - \frac{3}{2} = y - 1,5 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\vec{AB} ; \vec{BG}) = \begin{vmatrix} 4 & 24,5 \\ 2 & y - 1,5 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{AB}, \vec{BG}) = 4(y - 1,5) - 2 \times 24,5$

$\det(\vec{AB} ; \vec{BG}) = 4y - 6 - 49 = 4y - 54.$

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés en justifiant :

1) $A(\frac{-7}{2};\frac{-1}{2})$; $B(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et $C(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$

2a) $D(1\ ;\ 3)$; $E(3\ ;\ 4)$; $F(-3\ ;\ 0)$.

2b) Déterminer le réel y pour que $G(25\ ;\ y)$ appartienne à la droite (AB).

Rappel : A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = \frac{1}{2} - (-\frac{7}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y_B - y_A = \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = \frac{5}{2} - (-\frac{7}{2}) = \frac{12}{2} = 6 \\ y_C - y_A = \frac{5}{2} - (-\frac{1}{2}) = \frac{6}{2} = 3 \end{pmatrix}$

Par suite, $\det(\vec{AB};\vec{AC}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\times3 - 2\times6 = 12 - 12 = 0$

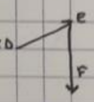
Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B, C sont alignés.

2a) D, E, F sont alignés si et seulement si $\vec{DE}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires.

$\vec{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D = 3 - 1 = 2 \\ y_E - y_D = 4 - 3 = 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E = -3 - 3 = -6 \\ y_F - y_E = 0 - 4 = -4 \end{pmatrix}$

Suite, $\det(\vec{DE};\vec{EF}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\times-4 - 1\times-6 = -8 + 6 = -2$

$-2 \neq 0$, donc $\vec{DE}$ et $\vec{EF}$ ne sont pas colinéaires :



Conclusion : D, E et F ne sont pas alignés.

2b) $G \in (AB)$ signifie que les points A, B et G sont alignés.

A, B et G sont alignés ssi $\vec{AB}$ et $\vec{BG}$ sont colinéaires.

Donc $G(25\ ;\ y) \in (AB)$ ssi $\vec{AB}$ et $\vec{BG}$ sont colinéaires càd : $\det(\vec{AB};\vec{BG}) = 0$

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{BG}\begin{pmatrix} 25 - \frac{1}{2} = 24,5 \\ y - \frac{3}{2} = y - 1,5 \end{pmatrix}$. Donc $\det(\vec{AB};\vec{BG}) = \begin{vmatrix} 4 & 24,5 \\ 2 & y-1,5 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{AB};\vec{BG}) = 4(y-1,5) - 2\times24,5$

$\det(\vec{AB};\vec{BG}) = 4y - 6 - 49 = 4y - 54$.

Donc $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BG}) = 0$ ssi $4y - 54 = 0$

$$4y = 54$$
$$y = \frac{54}{4} = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

$\mathcal{S} = \{13{,}5\}$ Donc $G(25 ; 13{,}5)$

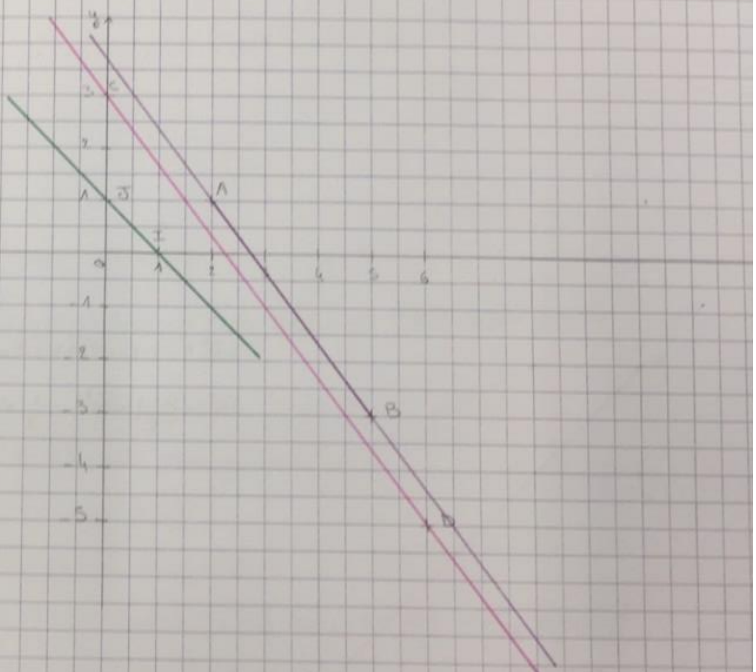
Exercice 16

1) Dans un *R.O.N.* $(O ; I ; J)$, placer les points $A(2 ; 1)$; $B(5 ; -3)$; $C(0 ; 3)$ et $D(6 ; -5)$.

2) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3) Les droites (IJ) et (AB) sont-elles parallèles ? Justifier.

1)



2) $(AB) // (CD)$ ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 5 - 2 = 3 \\ y_B - y_A = -3 - 1 = -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C = 6 - 0 = 6 \\ y_D - y_C = -5 - 3 = -8 \end{pmatrix}$$

M_1 : $\overrightarrow{CD} = 2 \times \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

M_2 : avec le $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 3 \times -8 - (-4) \times 6 = -24 + 24 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

3) Étudions la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$I(1;0)$ et $O(0;1)$, donc $\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} x_O - x_I = 0-1 = -1 \\ y_O - y_I = 1-0 = 1 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ déjà calculé !

Donc $\det(\overrightarrow{IO}; \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \times -4 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1$.

Or $1 \neq 0$, donc $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires et donc (IO) et (AB) ne sont pas parallèles

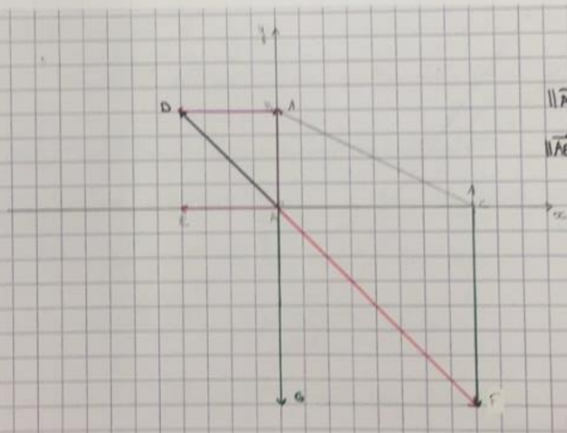
Exercice 17

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 4\ cm$ et $AB = 2\ cm$.

a) Placer les points E, D, G, F définis par :

$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$ et enfin $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$.

En se plaçant dans un repère bien choisi, prouver que D, A et F sont alignés.



$\|\overrightarrow{AG}\| = |-2| \times \|\overrightarrow{AB}\| = 2 \times 2 = 4$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \left|\frac{-1}{2}\right| \times \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

Je me place dans le repère $(A; C; B)$. Δ seulement orthogonal !

Je construis ce repère.

$A(0;0)$, $C(1;0)$, $B(0;1)$, $D(-0{,}5;1)$ et $F(1;-2)$

Montrons que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires :

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A = -0{,}5 - 0 = -0{,}5 \\ y_D - y_A = 1 - 0 = 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 1-0 = 1 \\ -2-0 = -2 \end{pmatrix}$

M_1 : $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, donc A, F et D sont alignés.

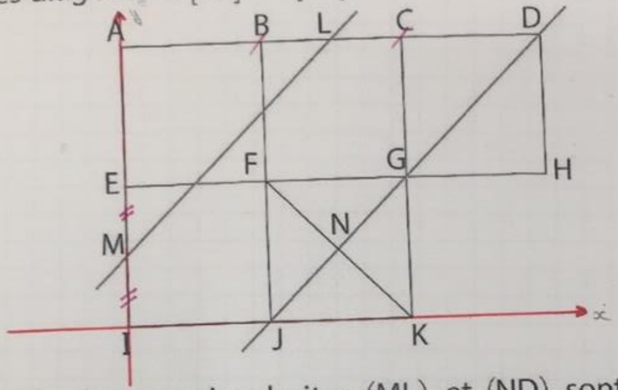
M_2 : $\det(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}) = \begin{vmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -0{,}5 \times (-2) - 1 \times 1 = 1 - 1 = 0$

Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc A, F et D sont alignés.

Exercices supplémentaires sur les vecteurs

Exercice 1

Voici un assemblage de cinq carrés, identiques.
L est le milieu de [AD], M est le milieu de [EI].
Les diagonales [FK] et [JG] se coupent en N.



Démontrer que les droites (ML) et (ND) sont parallèles.

Montrons que $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{ND}$ sont colinéaires.

On se place ds le repère $(I ; J ; E)$

Cherchons les coordonnées de M, L, N et D.

$I(0;0)$, $E(0;1)$ et M est le milieu de [EI] donc $M\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$ $M\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$

L = milieu de [BC] avec $B(1;2)$, $C(2;2)$. Donc $L\left(\frac{1+2}{2} ; \frac{2+2}{2}\right)$, $L\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$.

N = milieu de [JG] car les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

$J(1;0)$; $G(2;1)$ Donc $N\left(\frac{1+2}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

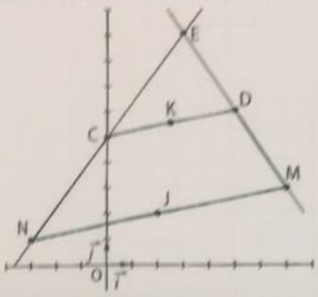
Enfin : $D(3;2)$

Par suite : $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix} x_L - x_M = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2} \\ y_L - y_M = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix} 3 - \frac{3}{2} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5 = \frac{3}{2} \\ 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ND}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{ND}$
donc $(ML) \parallel (ND)$.

Exercice 2

Soit les points M(7 ; 3), N(−3 ; 1), C(0 ; 5), D(5 ; 6) et E(3 ; 9).



1. Montrer que le quadrilatère MNCD est un trapèze.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (NC) et (MD).
3. Soit J et K les milieux respectifs des segments [NM] et [CD]. Calculer les coordonnées des points J et K.
4. Montrer que les points E, J et K sont alignés.

1) Prouvons que (CD) et (NM) sont parallèles :

$\vec{CD}\begin{pmatrix} 5-0=5 \\ 6-5=1 \end{pmatrix}$ et $\vec{NM}\begin{pmatrix} -3-7=-10 \\ 1-3=-2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{NM} = -2\vec{CD}$

Donc $\vec{NM}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires, donc (NM) // (CD).

Donc MNCD est un trapèze.

2) Montrons que $\begin{cases} E, C \text{ et } N \text{ sont alignés} \rightarrow E \in (NC) \\ E, D, M \text{ sont alignés} \rightarrow E \in (DM) \end{cases}$

Montrons que $\vec{EC}$ et $\vec{EN}$ sont colin (colinéaires) :

$\vec{EC}\begin{pmatrix} 0-3=-3 \\ 5-9=-4 \end{pmatrix}$ $\vec{EN}\begin{pmatrix} -3-3=-6 \\ 1-9=-8 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{EN} = 2\vec{EC}$ donc $\vec{EN}$ et $\vec{EC}$ sont colin, donc E, C et N sont alignés.

Idem pr prouver que E, D, M sont alignés.

Par suite, E est l'intersect° des droites (NC) et (MD).

J = milieu de [NM]

donc $J\left(\frac{7+(-3)}{2} ; \frac{3+1}{2}\right)$ $J(2 ; 2)$

$K =$ milieu de $[CD]$, donc $K\left(\frac{0+5}{2} ; \frac{5+6}{2}\right)$ $K\left(\frac{5}{2} ; \frac{11}{2}\right)$.

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires...