

Chapitre 1

Information chiffrée

Introduction : Les notions de pourcentage et de proportion sont omniprésentes dans la vie quotidienne.

Voici quelques exemples : les océans occupent les $\frac{2}{3}$ de la surface terrestre.

60 % des bacheliers ont eu une mention au baccalauréat en 2019.

I - Notion de proportion et de pourcentage

Vocabulaire : Une population est un ensemble dont les éléments sont appelés les individus.
Le nombre total d'individus d'une population donnée est appelé l'effectif de cette population.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser la définition, une population n'est pas nécessairement formée d'entités vivantes !

Exemple : Les élèves de seconde du lycée Benoît forment une population d'effectif 315.

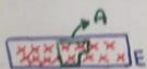
L'élève A.B de seconde 9 est un individu de cette population.

Les 15 stylos de ma trousse forment une population d'effectif égal à 15.

Définition

On appelle sous-population d'une population E toute partie A formée de certains d'individus de E :
 A est incluse dans E !

Illustration ensembliste :



On note : $A \subset E$

$\hookrightarrow$ est incluse dans

Exemple : Notons E la population formée par les élèves de seconde du lycée Benoît à la rentrée 2020, et A les élèves de seconde du lycée qui sont externes : A est une sous-population de E .

Les 4 stylos bleus de ma trousse constituent une sous-population des 15 stylos de ma trousse.

✕ Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne une estimation de la répartition de la population française au 01/01/2019, par sexe et groupe d'âge.

	Femmes	Hommes	Ensemble
Moins de 20 ans	7897148	8260779	16158197
De 20 à 64 ans	19072541	18348624	37421165
65 ans et plus	7628209	5785128	13413337
Population totale	34598168	32394531	66992699

- Combien d'individus la population totale comprend-elle de personnes ?
- Comment se nomme le groupe d'individus formé par les jeunes de moins de 20 ans ? Quel est son effectif ?
- Quelle est la proportion du groupe formé par les jeunes de moins de 20 ans au sein de la population totale ?
- On s'intéresse maintenant au groupe formé par les personnes de 20 à 64 ans. Trouver la proportion de femmes au sein de ce groupe.

- a) L'effectif total de la population française au 01/01/2013 est égal à 66 338 633.
- b) C'est une sous-population de l'ensemble des Français.
Son effectif est égal à 16 158 137.
- c) Soit p la proportion des - de 20 ans au sein de la pop. totale : $p = \frac{16\,158\,137}{66\,338\,633} \left(= \frac{\text{effectif - de 20 ans}}{\text{effectif totale}} \right)$
 $p \approx 0,24.$
- d) Soit q la proportion de femmes parmi les 20-64 ans : $q = \frac{13\,078\,541}{37\,421\,165}$
 $q \approx 0,51.$

Définition 1

Soit E une population de référence (ensemble E) contenant N éléments, et A une sous-population de E d'effectif n .

La proportion (notée p) des éléments de A parmi ceux de E est égale au quotient $\frac{n}{N}$: $\heartsuit p = \frac{n}{N} \heartsuit$

Remarque : une proportion p n'a pas d'unité et pour ce réel p on a toujours l'encadrement suivant : $0 \leq p \leq 1$.

Bien souvent, et afin de rendre l'information chiffrée plus parlante, on exprimera sous forme de **pourcentage** une proportion : cela permet de se faire une meilleure idée de ce que représente cette proportion.

Rappel : Comme son nom l'indique, **pourcent** peut être décomposé en les termes : pour un nombre de 100 ou encore **par tranche de 100**, ou encore : ramené à un effectif de référence égal à 100, dans des proportions égales.

Par exemple : 30 % de mon budget sert à payer mon loyer signifie qu'à chaque tranche de 100€ perçue de mon salaire, je mets 30€ pour mon loyer.

Exercice 2

Dans une revue de 180 pages, il y a 52 pages de publicité.

Quel pourcentage les pages de publicité occupent-elles dans cette revue ?

Soit p ce pourcentage : $p = \frac{52}{180} \times 100 \approx 28,3$

La publicité occupe environ 28,3 % des pages de la revue.

Définition 2

Avec les mêmes notations que celles de la définition 1, la proportion p d'individus du groupe A parmi ceux de E peut être exprimée en pourcentage noté t .

On a donc : $p = \frac{n}{N} = \frac{t}{100}$, et donc : $t = \frac{n}{N} \times 100$.

Exemples célèbres

La moitié d'une quantité correspond à 50 % de cette quantité.

Le quart, respectivement les trois quarts d'une quantité correspondent respectivement à 25 % de cette quantité (respectivement 75 % de cette quantité).

Rappel : Appliquer un pourcentage : $\rightarrow$ ex 3, voir p. suivante

Exercice 3

Dans un lycée de 1250 élèves, 34 % des élèves sont externes.

Quel est le nombre d'élèves externes de ce lycée ?

Soit N , le nb d'élèves externes de ce lycée : $N = 1250 \times \frac{34}{100} = 1250 \times 0,34 = 425$.

Il y a 425 externes de ce lycée.

3

Règle 1

Pour calculer $x\%$ d'un nombre Q donné, il suffit de faire : $Q \times \frac{x}{100}$

♥♥♥

II - Notion de proportion de proportion et de pourcentage de pourcentage

Exemple d'introduction

14600 véhicules ont franchi un péage autoroutier le 30 Août 2021.

85 % des véhicules étaient des voitures, et 60 % de ces voitures étaient munies d'un badge de télépéage.

- Combien de voitures se sont présentées à ce péage en ce jour ?
- Calculer le nombre de voitures munies d'un badge de télépéage.
- En déduire la proportion, exprimée en pourcentage, de voitures munies d'un badge de télépéage par rapport à l'ensemble des véhicules.
- Calculer $14600 \times \frac{85}{100} \times \frac{60}{100}$. En déduire une autre manière de calculer la proportion demandée à la question c).
- 70 % des véhicules qui ne sont pas des voitures étaient munis d'un badge de télépéage.

Déterminer le pourcentage que représentent ces véhicules (non voitures) munis d'un badge par rapport à la population totale étudiée.

a) On cherche les 85 % de 14600 véhicules : $\frac{85}{100} \times 14600 = 12410$.
Il y a eu 12410 voitures au péage ce jour-là.

b) On doit calculer les 60 % de 12410 : $\frac{60}{100} \times 12410 = 7446$.
Il y a eu 7446 voitures munies du badge au péage.

c) Soit p le pourcentage que représentent les voitures avec badge :

$$p = \frac{7446}{14600} \times 100$$

Donc $p = 51$

Les voitures avec badge représentent 51% de l'ensemble des véhicules.

d) $14600 \times \frac{88}{100} \times \frac{60}{100} = 7446$

Il suffit donc de multiplier l'eff. total par le produit des pourcentages.

e) Il y a 15% de véhicules non voiture au piage.

Et 70% de ces véhicules sont badgés.

Donc on a : $\frac{15}{100} \times \frac{70}{100} \times 100 = 10,5$

Donc les véhicules non voiture munis d'un badge représentent 10,5% du total des véhicules.

Bis : 1) Calcul du nb de véhicules non voiture

$$14600 \times \frac{15}{100}$$

2) Nb de véhicules non voiture badgés : $14600 \times \frac{15}{100} \times \frac{70}{100} (=1533)$

$$p = \frac{14600 \times \frac{15}{100} \times \frac{70}{100}}{14600} \times 100 \quad \left(\frac{1533}{14600} \times 100 \right)$$

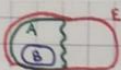
$$p = \frac{15}{100} \times \frac{70}{100} \times 100$$

Propriété

On considère un ensemble E ayant N éléments. Soit A une partie de E , et B une partie de A .

On note p_A la proportion des éléments de A dans E , et p_B la proportion des éléments de B dans A .

Alors, la proportion des éléments de B dans E est égale à $p_A \times p_B$.



Exemple

60 % des élèves d'un lycée sont des filles. Parmi ces filles, 34 % sont externes.

Déterminer quel pourcentage représente le groupe des filles externes dans ce lycée.

Sachant qu'il y a 1500 élèves au lycée, déterminer le nombre de filles externes de ce lycée.

Soit p le pourcentage formé par les filles externes de ce lycée :

$$p = \frac{60}{100} \times \frac{34}{100} \times 100$$

$$p = 20,4\%$$

Les filles externes représentent 20,4 % des élèves de ce lycée.

Donc il y a $1500 \times \frac{20,4}{100} = 306$ filles externes de ce lycée.

Exercice 4

Calculer mentalement : 20 % de 80 % ; 90 % de 12 %.

$$\frac{20}{100} \times \frac{80}{100} \times 100 = 16\%$$

$$\rightarrow \frac{90}{100} \times \frac{12}{100} \times 100 = 10,8\%$$

4

III - Taux d'évolution

Définition

Une évolution fait passer la valeur initiale notée V_i d'une quantité à une valeur finale notée V_f .

La **variation absolue** entre V_i et V_f est égale au nombre : $V_f - V_i$

Cette dernière a donc la **même unité** que la quantité étudiée.

Exemple

Le prix du baril de pétrole au 01/10/2018 était de 73,68 \$.

Au 01/01/2019, le prix du baril était de 46,82 \$.

Déterminer la variation absolue du prix du baril de pétrole entre ces deux dates. Constat ?

Ici : $V_i = 73,68$ \$ et $V_f = 46,82$ \$

Donc la **variatioⁿ absolue**, notée V_a est : $V_a = V_f - V_i = 46,82 - 73,68 = -26,86$ \$

Il y a eu une **diminut^o** du prix de 26,86 \$ entre ces 2 dates.

Propriété

Lorsque la variation absolue d'une quantité est **positive**..., la valeur de la quantité **augmente**....

Lorsque la variation absolue d'une quantité est **négative**..., la valeur de la quantité **diminution**...

Définition du taux d'évolution d'une quantité

Une **évolution** fait passer la valeur initiale notée V_i d'une quantité à une valeur finale notée V_f .

La **variation relative** de V_i à V_f que l'on notera t , est égale au quotient : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$

Le nombre $p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$ est appelé **le pourcentage d'évolution** de V_i à V_f .

Exemple

Quelques jours après la rentrée, le nombre d'élèves d'une classe passe de 32 à 34. Déterminer le pourcentage d'évolution du nombre d'élèves de cette classe.

$$\text{Ici : } V_i = 32 ; V_f = 34 \text{ donc } p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{34 - 32}{32} \times 100 = \frac{2}{32} \times 100 = 6,25$$

Il y a eu une **hausse** de 6,25 % de l'**effectif** de cette classe.

Remarques : Si $t > 0$, une variation de taux t correspond à une augmentation de la valeur.....

Si $t < 0$, une variation de taux t correspond à une diminution de la valeur.....

L'intérêt des taux d'évolutions, contrairement aux variations absolues, est de permettre de comparer des évolutions dans des situations différentes.

X

Exercice 5

Le prix d'un article passe de 168€ au 01/01/2019 à 160€ au 01/06/2019.

Déterminer le pourcentage d'évolution de ce prix entre ces deux dates.

Ici: $V_L = 168€$ et $V_G = 160€$

Soit p le pourcentage d'évolutⁿ de ce prix: $p = \frac{V_G - V_L}{V_L} \times 100$

$$p = \frac{160 - 168}{168} \times 100$$

$$p = \frac{-8}{168} \times 100 \approx -4,8$$

Le prix a diminué de 4,8%, environ.

Exercice 6

Le tableau ci-dessous donne les espérances de vie à la naissance pour des individus nés en France en l'an 2000 et en l'an 2015.

Année de naissance	Hommes	Femmes
2000	75,3	82,8
2015	79	85,1

Comparer les taux d'évolution de l'espérance de vie des hommes et celui des femmes entre ces années.

Soit $\mathcal{E}_h$ le taux d'évolutⁿ de l'espérance de vie des hommes entre 2000 et 2015: $\mathcal{E}_h = \frac{79 - 75,3}{75,3} \times 100$
 $\mathcal{E}_h \approx 4,9$

L'espérance de vie des hommes a augmenté d'environ 4,9% entre ces dates.

Soit $\mathcal{E}_f$ le taux d'évoⁿ de l'espérance de vie des femmes entre ces dates: $\mathcal{E}_f = \frac{85,1 - 82,8}{82,8} \times 100$
 $\mathcal{E}_f \approx 2,8$

L'espérance de vie des femmes a augmenté d'environ 2,8% entre ces dates.

Ainsi, $\mathcal{E}_h > \mathcal{E}_f$ (car $4,9 > 2,8$).

C'est le groupe des hommes qui a le + grand taux d'évolutⁿ.

IV - Coefficient multiplicateur lié à une évolution

Définition

Le nombre par lequel il faut multiplier une valeur initiale V_i pour obtenir sa valeur finale V_f est appelé coefficient multiplicateur et noté CM .

On a donc : $V_i \times CM = V_f$ ou encore : $CM = \frac{V_f}{V_i}$

Schéma fondamental :



Exercice 7

Le prix d'un article passe de 36 € à 37,50 €. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette évolution de prix.

Déterminer le pourcentage p d'évolution de ce prix. Conclusion ?

$$\text{Ici, on a : } 36 \times CM = 37,5$$

$$CM = \frac{37,5}{36}$$

$$CM \approx 1,042$$

$$\text{Soit } p \text{ le pourcentage d'évo de ce prix : } p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$$

$$p = \frac{37,5 - 36}{36} \times 100$$

$$p \approx 4,2$$

Le prix a augmenté d'environ 4,2 %.

$$\text{Rq : } p = \frac{37,5 - 36}{36} \times 100$$

$$p = \left(\frac{37,5}{36} - \frac{36}{36} \right) \times 100$$

$$p = (CM - 1) \times 100$$

Conclusion : p et CM sont liés par la relat° : $p = (CM - 1) \times 100$.

Propriété

Soit t le taux d'évolution d'une valeur V_i à une valeur V_f , et CM le coefficient multiplicateur qui permet de passer de V_i à V_f .

On a la relation suivante : $t = (CM - 1) \times 100$ ou $CM = 1 + \frac{t}{100}$

$$\text{Preuve : } t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \left(\frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} \right) \times 100 = (CM - 1) \times 100.$$

Ainsi les notions de taux d'évolution et coefficients multiplicateur sont étroitement liées !

Exercice 8

Un pantalon a un prix de 45€, et une chemise un prix de 50€.

Le prix du pantalon augmente de 7 %, et celui de la chemise diminue de 6 %.

Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces variations.

Calculer le prix du pantalon et celui de la chemise après ces changements de prix.

$$CM = 1 + \frac{7}{100} = 1,07 \Rightarrow \text{pantalon}$$

par suite : $Vg = Vi \times CM$

$$Vg = 45 \times 1,07$$

$$Vg = 48,15 \text{ €}$$

$$CM = 1 - \frac{6}{100} = 1 - 0,06 = 0,94$$

par suite : $pg = 50 \times CM = 50 \times 0,94 = 47 \text{ €}$

6

Remarque

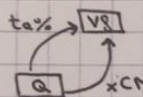
Pour une augmentation, on a : $CM > 1$; Pour une diminution, on a : $CM < 1$

♥♥♥♥ Règle fondamentale ♥♥♥♥

a) Augmenter de a % une grandeur Q , revient à multiplier Q par : $1 + \frac{a}{100}$

b) Diminuer de b % une grandeur Q , revient à multiplier Q par : $1 - \frac{b}{100}$

Preuve 1 :


$$Vg = Q + Q \times \frac{a}{100} = Q \times 1 + Q \times \frac{a}{100} = Q \left(1 + \frac{a}{100} \right)$$

la valeur ↑

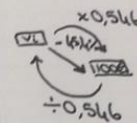
Exemple mentaux :

Augmenter de 10 % un prix revient à le multiplier par : $1,1$ ($1 + \frac{10}{100}$)
 Diminuer de 30 % un prix revient à le multiplier par : $CM = 1 - \frac{30}{100} = 1 - 0,3 = 0,7$
 Multiplier un prix par 1,32 revient à l'augmenter de 32 %
 Multiplier un prix par 0,79 revient à le diminuer de 21 % : $CM = 0,79 = 1 - \frac{21}{100}$
 Multiplier par 2 un prix revient à l'augmenter de 100 % : $CM = 2 = 1 + \frac{100}{100} = 1 + 1$

Exercice 9

Compléter le tableau suivant en écrivant le calcul que vous avez fait à chaque fois.

Prix initial	Prix final	Pourcentage de variation	Coefficient multiplicateur
110 €	90,2 €	-18 %	0,82
≈ 36,06 €	47 €	+28,2 %	1,282
850 €	1627,75 €	+91,5 %	1,915
≈ 183,15 €	100 €	-45,4 %	0,546
20 €	23 €	$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = +15\%$	1,15
120 €	105 €	-12,5 %	0,875



$$\begin{aligned} \rightarrow 120 \times CM &= 105 \\ CM &= \frac{105}{120} \end{aligned}$$

7

Exercice 10

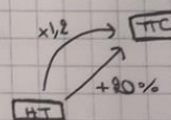
En France, le taux de la TVA (taxe de valeur ajoutée) est un impôt dont le taux est égal à 20 %.

Ce dernier s'applique sur le prix hors taxe (HT) à la majorité des articles achetés, et on obtient le prix final de l'article appelé prix TTC (toutes taxes comprises), c'est-à-dire ce que vous payez lors de l'achat d'un article !

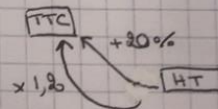
- Le prix hors taxe d'un véhicule est 9500€. Déterminer le prix TTC de ce véhicule.
- Le prix d'un voyage est de 2300€ TTC. Déterminer le prix hors taxe de ce voyage.

a) Prix HT : 9500€

Ici CM vaut 1,2 donc le prix TTC = Prix HT $\times$ CM
 prix TTC = $9500 \times 1,2 = 11400$ €



b) Ici, $CM = 1,2$: Prix HT $\times$ CM = Prix TTC
 Prix HT $\times 1,2 = 2300$
 Prix HT = $\frac{2300}{1,2}$
 Prix HT ≈ 1920€



Le prix HT est d'environ 1920€

V. Evolutions successives

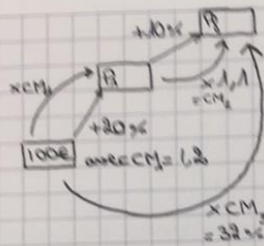
Exemple

Un article coûte 100€ au mois de Septembre. Son prix augmente une première fois de 20 % au mois d'Octobre.

Le mois suivant, le prix de cet article augmente encore de 10 %.

Déterminer le prix de l'article au mois de Novembre, ainsi que le pourcentage d'évolution de ce prix entre Septembre et Novembre. Le résultat vous surprend-il ?

Déterminer une relation entre les nombres CM_1, CM_2, CM_3 qui désignent respectivement le coefficient multiplicateur du prix de Septembre à Octobre, celui d'Octobre à Novembre et enfin celui de Septembre à Novembre.



En novembre l'article coûte 132€.

Donc une hausse de 32 % : $\frac{V_3 - V_1}{V_1} \times 100 = 32$.

① Les taux d'évolutⁿ ne s'ajoutent pas !

Hausses de 20 % puis de 10 % ne revient pas à hausse globalement de 30 % mais de 32 % !!!

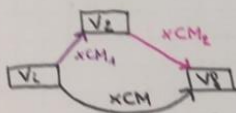
$$\begin{aligned} 100 \times CM_1 &= 120 \\ 120 \times CM_2 &= 132 \\ 100 \times CM_3 &= 132 \\ CM_3 &= \frac{132}{100} = 1,32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CM_1 &= 1,2 \\ CM_2 &= 1,1 \\ CM_3 &= 1,32 \\ CM_3 &= CM_1 \times CM_2 \end{aligned}$$

Propriété

Pour deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs CM_1 et CM_2 , l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur global le nombre CM , avec : $CM = CM_1 \times CM_2$

Illustration et justification :



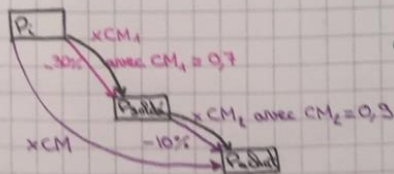
$$\begin{aligned} V_1 \times CM_1 \times CM_2 &= V_3 \\ \text{et } V_1 \times CM &= V_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Donc } V_1 \times CM_1 \times CM_2 = V_1 \times CM \\ V_1 \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \div V_1 \\ CM_1 \times CM_2 = CM \end{array}$$

Exemple

Auguste est ravi : il a bénéficié de deux réductions successives pour l'achat d'un ordinateur : 30 % de solde d'été, et 10 % supplémentaire obtenus en caisse grâce à sa carte de fidélité.

Auguste affirme avoir bénéficié d'une réduction de 40 % : qu'en pensez-vous ?

Les taux d'évolution ~~ne s'ajoutent pas, par contre les CM se multiplient...~~



$$\text{avec } CM = CM_1 \times CM_2 = 0,7 \times 0,9 = 0,63$$

$$\text{Donc globalement une remise de 37 \% car } CM = 1 + \frac{t}{100}$$

$$t = -37$$

Auguste dit faux : globalement, il a obtenu 37 % de réducitⁿ.

Exercice 11

Le prix d'un article augmente de 10 % puis diminue de 10 %.

Son prix final est-il égal à son prix initial ? Justifier.

$$V_i = 100\text{€} \xrightarrow{+10\% \text{ (xCM}_1\text{)}} 110\text{€} \xrightarrow{-10\% \text{ (xCM}_2\text{)}} V_f = 99\text{€}$$

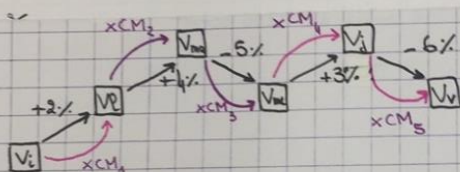
$V_i = 100\text{€}$ et $V_f = 99\text{€}$ donc $V_i \neq V_f$

Exercice 12

La valeur en € d'une action subit les variations suivantes en une semaine :

Lundi : +2% ; Mardi : +4% ; Mercredi : -5% ; JEUDI +3% ; Vendredi : -6%.

Déterminer si au cours de cette semaine l'action s'est appréciée (= a gagné de la valeur) ou si elle s'est dépréciée (= a perdu de sa valeur).



! On ne additionne pas les taux d'évolution !

Avec $CM_1 = 1,02$; $CM_2 = 1,04$; $CM_3 = 0,95$; $CM_4 = 1,03$; $CM_5 = 0,94$

Ici $CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times CM_4 \times CM_5$

$$CM = 1,02 \times 1,04 \times 0,95 \times 1,03 \times 0,94$$

$$CM \approx 0,97$$

Ici $CM < 1$ car $0,97 < 1$ donc globalement, la semaine s'est dépréciée.

Exercice 13

Dans une entreprise A, les salaires ont augmenté de 2 % entre 2017 et 2018 puis de 3 % entre 2018 et 2019.

Dans une entreprise B, les salaires ont augmenté de 4 % entre 2017 et 2018 puis de 1 % entre 2018 et 2019.

Dans quelle entreprise les salariés ont-ils été globalement plus augmentés entre 2017 et 2019 ?

Entreprise A: Soit C_A le coefficient multiplicateur entre 2017 et 2013.

$$C_A = 1,02 \times 1,03 = 1,0506$$

Donc globalement les salaires de l'entreprise A ont augmenté de 5,06 %.

Entreprise B: $C_B = 1,04 \times 1,01 = 1,0504$

Donc globalement les salaires ont augmenté de 5,04 %.

Comparons C_A et C_B : ici $1,0506 > 1,0504$

Donc c'est l'entreprise A et les salaires ont le + augmenté en 2017.

Exercice 14

Un livret Jeune a un taux d'intérêt de 2,5 %. Cela signifie que chaque année, la banque verse sur votre compte une somme d'argent, appelée intérêt, à hauteur de 2,5 % du solde que présente votre compte.

Vous décidez de placer 600€ sur un livret Jeune et de ne plus y toucher.

Quel sera votre capital au bout de : 1 an ? 3 ans ? 5 ans ? 10 ans ?

Trouver une relation qui donne le capital dont vous disposerez au bout de n années.

A l'aide d'une calculatrice, évaluer le nombre d'années nécessaires à une augmentation de 50 % du capital initial.

Soit C_i le capital au bout de i années après le placement initial de 600€.

$$C_1 = 600 \times 1,025 = 600 \times 1,025 = 615 \text{ €}$$

$$C_2 = C_1 \times 1,025 = 600 \times 1,025 \times 1,025 = 600 \times 1,025^2 = 630,375 \text{ €}$$

À la fin de la 2^e année, on aura un capital de 630,375 €.

$$C_3 = C_2 \times 1,025 = 600 \times 1,025^3 \approx 646,13 \text{ €}$$

$$C_5 = 600 \times 1,025^5 \approx 678,84 \text{ €}$$

$$C_{10} = 600 \times 1,025^{10} \approx 768,05 \text{ €}$$

2) n entier : $C_n = 600 \times 1,025^n$

3) On cherche à dépenser ici les 900€ car augmenter de 50% un prix revient à le multiplier par 1,5 et $600 \times 1,5 = 900$.

Avec la machine :

$$C_{15} \approx 868 \text{ €}$$

$$C_{16} \approx 890,07 \text{ €}$$

$$C_{17} \approx 912,37 \text{ €}$$

Il faut donc attendre 17 ans pour 50 % de hausse du capital.

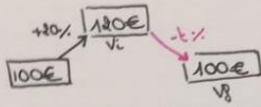
VI - Taux d'évolution réciproque

Exemple

Le prix d'une paire de chaussures passe de 100€ à 120€.

Déterminer le taux de remise à effectuer pour ramener la paire de chaussure à son prix initial.

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{120 - 100}{100} \times 100$$
$$t = \frac{20}{100} \times 100 = \frac{20}{1} = 20$$
$$t \approx 16,7$$



Il faut baisser le prix d'environ 16,7% pour revenir au prix de départ.

9

Définition

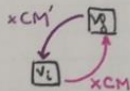
Soit une évolution de coefficient multiplicateur CM qui fait passer une valeur de V_i à V_f .

L'évolution réciproque est celle qui fait passer de la valeur V_f à la valeur V_i . On note CM' le coefficient multiplicateur de cette évolution réciproque.

$$\text{On a : } CM' = \left(\frac{V_i}{V_f} \right) = \frac{1}{CM}$$

Le taux t' d'évolution réciproque s'exprime en fonction de CM' : $t' = 100 (CM' - 1)$

Illustration



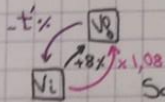
Exercice 15

En arrondissant au dixième près, donner :

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 8 %, puis le taux d'évolution réciproque associé à cette hausse.

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 15 %.

①



$$CM = 1,08$$

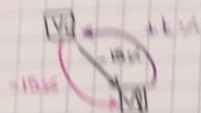
Soit CM' le coefficient multiplicateur qui permet de passer de V_f à V_i :

$$CM' = \frac{1}{CM} = \frac{1}{1,08}$$

$$CM' \approx 0,93$$

Donc $t' \approx 7$: Il faut baisser d'environ 7% le prix obtenu pour revenir à celui de départ

②



$$EM = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

Donc EM' (coefficient multi. qui fait passer de V_f à V_i)

$$EM' = \frac{1}{EM} = \frac{1}{0,85}$$

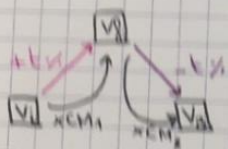
$$EM' \approx 1,18$$

$$\text{Donc } EM' = 1 + \frac{t}{100} \approx 1,18$$

Donc $t \approx 18$: Hausse d'environ 18% pour compenser cette baisse.

Exercice 16

Une hausse et une baisse de même taux sont-elles réciproques l'une de l'autre ? Justifier.



$$\text{A-t-on : } V_3 = V_1 ?$$

Non car :

$$V_1 \times CM_1 \times CM_2 = V_3$$

$$V_1 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = V_3$$

$$\text{Si } V_3 = V_1 (\neq 0) \quad \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{V_3}{V_1} = 1$$

$$\text{Donc } \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 \Rightarrow \text{Equation}$$

$$1^2 - \left(\frac{t}{100}\right)^2 = 1$$

$$1 - \left(\frac{t}{100}\right)^2 - 1 = 0$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{t}{100}\right)^2 = 0 \quad \text{donc } \frac{t}{100} = 0 \quad \text{donc } t = 0$$

Si le taux n'est pas nul, une hausse de $t\%$ n'est jamais compensée par une baisse de $t\%$.

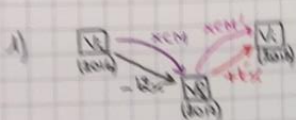
Exercice 17

Chaque année, un webmestre fait le bilan concernant l'attractivité de son site web.

Entre 2016 et 2017, le nombre de connexions au site a diminué de 12 %.

1) Déterminer, à 0,1 % près, le pourcentage d'augmentation nécessaire entre 2017 et 2018 pour revenir au nombre de connexions initial.

2) Entre 2018 et 2019, le nombre de connexions a augmenté de 4,5 %, pour s'établir à 1463 connexions par jour. Combien y avait-il de connexions par jour à ce site début 2018 ?

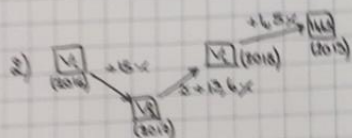


$$CM = 1 + \left(\frac{-12}{100} \right) = 0,88$$

$$CM' = \frac{1}{CM} = \frac{1}{0,88}$$

$$\text{Donc } CM' \approx 1,136$$

Donc il y a 1,136 c'est-à-dire qu'il faut une hausse de 13,6 %.



Soit V_1 le nb de connexion journalière en 2016 :

$$CM = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$$

$$V_1 \times CM = 1463$$

$$V_1 \times 1,045 = 1463$$

$$V_1 = \frac{1463}{1,045} = 1400$$

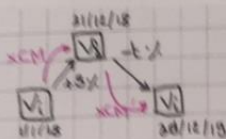
Il y a 1400 connexions par jour en 2016.

Exercice 18

Du 01/01/2018 au 31/12/2018, la population d'une ville a augmenté de 5 %.

Au 31/12/2019, cette population a retrouvé son effectif du 01/01/2018.

Déterminer le taux d'évolution de cette population entre le 01/01/2019 et le 31/12/2019.



$$CM = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$$

$$\text{et } CM' = \frac{1}{CM} = \frac{1}{1,05}$$

$$CM' \approx 0,952$$

$$CM' = 1 + \frac{b}{100}$$

$$0,952 = 1 + \frac{b}{100}$$

$$-0,048 = \frac{t}{100}$$

$$\text{Donc } t \approx -4,8$$

Il y a une baisse d'environ 4,8 % de l'effectif de la pop. entre 1/1/13 et 31/12/13.