Chapitre 4	Probabilités conditionnelles

I-Rappels et notations en probabilité

Exercice 1

Trouver la valeur de x sous forme décimale, afin que le tableau ci-dessous corresponde à une loi de probabilités.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,15	0,18	0,43	x

✂---

Activité : notations et vocabulaire en probabilité

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de Première d'un lycée en fonction du sexe et de la seconde langue étudiée.

	Espagnol	Allemand	Autres	Total
Filles	175	25	12	212
Garçons	149	17	9	175
Total	324	42	21	387

On choisit un élève de Première au hasard et on note les événements E : « l'élève étudie l'espagnol » et F : « l'élève est une fille ».
Les probabilités demandées seront arrondies au centième.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E et F.
2. Décrire par une phrase l'événement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire par une phrase l'événement $E \cup F$ et calculer sa probabilité.
4. Décrire par une phrase l'événement $\overline{E}$ et calculer sa probabilité.

✂---

Activité : vers la notion de probabilité conditionnelle

Le tableau ci-dessous récapitule les ventes de vélos dans une boutique spécialisée en 2022.

	Vélos neufs	Vélos d'occasion	Total
Vélos électriques	363	143	506
Vélos non électriques	286	308	594
Total	649	451	1 100

Le vendeur choisit au hasard la facture d'un vélo vendu en 2022.
On note E l'événement : « la facture est celle d'un vélo électrique » et N : « la facture est celle d'un vélo neuf ».

1 Calculer les probabilités $P(\mathrm{E})$, $P(\mathrm{N})$ et $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{N})$.

2 Le vendeur a sélectionné la facture d'un vélo électrique.

a. Combien y a-t-il de factures de vélos électriques ?

b. Parmi les factures de vélos électriques, combien correspondent à des vélos neufs ?

c. En déduire la probabilité que la facture soit celle d'un vélo neuf sachant qu'il s'agit de la facture d'un vélo électrique. Cette probabilité est une probabilité **conditionnelle**, on la note $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{N})$.

3 Calculer $\dfrac{P(\mathrm{E} \cap \mathrm{N})}{P(\mathrm{E})}$. Que remarque-t-on ?

4 a. Calculer la probabilité conditionnelle, notée $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{E})$, que la facture soit celle d'un vélo électrique sachant qu'il s'agit d'une facture d'un vélo neuf.

b. Quelle égalité peut-on écrire avec $P(\mathrm{N})$, $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{N})$ et $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{E})$?

✂---

Cours :

On considère une expérience aléatoire et on appelle Ω l'univers qu'on lui associe.
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle de Ω.

a Probabilité conditionnelle

Définition

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et est définie par :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

Remarque :

Avec la définition ci-dessus, on a :

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

Ainsi, si on connaît, par exemple $P(\mathrm{A})$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, on peut calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

b Indépendance de deux événements

Définition

Les deux événements A et B sont indépendants lorsque :

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

Remarque

- $P_A(B) = P(B)$ se traduit par : la probabilité de B ne dépend pas de la réalisation de A.

Autrement dit, lorsque deux événements sont indépendants, la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre.

On a aussi le critère suivant pour savoir si deux événements sont indépendants :

♥♥♥A et B sont indépendants revient à dire que : ♥♥♥

Justification :

Exercice 1

15 Le tableau ci-dessous donne la répartition des joueurs de tennis et de padel d'un club.

	Tennis	Padel	Total
Femmes	55	39	94
Hommes	70	36	106
Total	125	75	200

On choisit au hasard un membre du club. On note T et F les événements respectifs : « le membre joue au tennis » et « le membre est une femme ».

1. Calculer la probabilité des événements F, T et $F \cap T$.

2. Calculer les probabilités conditionnelles $P_T(F)$ et $P_{\overline{T}}(\overline{F})$. Interpréter les résultats.

3. Les événements F et T sont-ils indépendants ?

✂---

Exercice 2

38 Une enquête effectuée dans une entreprise concernant le sexe et le salaire S des employés a donné les résultats suivants.

	$S < 1\,500$ €	$S \geqslant 1\,500$ €	Total
Femmes	311	410	
Hommes	204	597	
Total			

On choisit au hasard une personne employée dans l'entreprise. On note F l'événement « la personne est une femme » et M l'événement : « la personne gagne moins de 1 500 € ».

On arrondira les probabilités au centième.

1. Recopier et compléter le tableau.

2. Calculer la probabilité $P(F)$.

3. Décrire l'événement $F \cap M$ par une phrase et calculer sa probabilité.

4. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle gagne moins de 1 500 €.

5. Décrire par une phrase la probabilité $P_M(\overline{F})$ et calculer sa valeur.

6. Les événements M et F sont-ils indépendants ?

II- Arbres de probabilités

Activité

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : deux noires et deux rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne, **puis sans la remettre**, on en tire une seconde. On note les événements A : « la première boule tirée est noire » et B : « la seconde boule tirée est noire ».

1 Quelle est la probabilité $P(\mathrm{A})$ d'obtenir une boule noire au premier tirage ?

2 a. Après avoir tiré une boule noire au premier tirage, combien reste-t-il de boules dans l'urne ? Combien de noires ?

b. En déduire la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant qu'on en a tiré une au premier.

c. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$.

3 a. Recopier et compléter l'arbre ci-contre, appelé arbre **pondéré**, dans lequel on indique sur chaque branche les probabilités correspondantes.

b. À quel événement correspond le chemin **complet** A suivi de B ?

c. La probabilité d'un chemin **complet** est égale au **produit** des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.

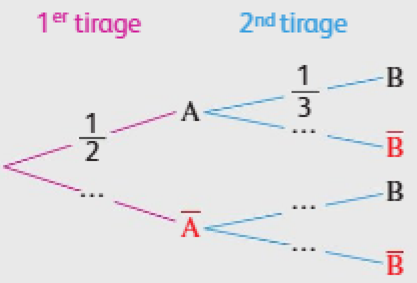
Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ? deux rouges ?

d. Parmi les formules ci-dessous, laquelle est correcte dans ce cas ?

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$ $\quad$ $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ $\quad$ $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

3 Dans l'arbre, sur une branche du second niveau, on écrit la probabilité de l'événement extrémité de la branche sachant que l'événement origine de cette branche est réalisé.



e. Calculer P(B). A et B sont-ils des événements indépendants ?

4. On considère la même urne (deux boules noires et deux boules rouges).

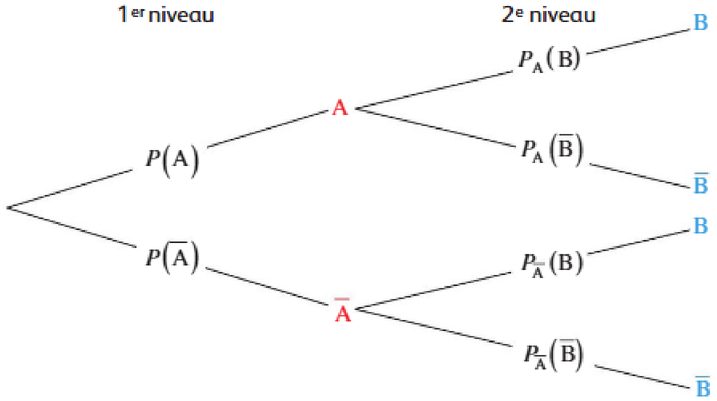
On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne et on tire à nouveau au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur.

On dit qu'on a fait un tirage successif avec remise de deux boules de l'urne.

Construire un arbre pondéré associé à cette expérience aléatoire.

Synthèse de cours sur les arbres pondérés

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire mettant en jeu plusieurs événements, on peut modéliser la situation par des **arbres pondérés** à deux niveaux comme ci-dessous, où A et B sont deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.



- Sur les branches de premier niveau, on indique la probabilité de l'événement A et celle de $\overline{A}$, sur celles de second niveau on indique les probabilités de l'événement de l'extrémité (à droite) sachant que l'événement à son origine (à gauche) est réalisé.

Par exemple, la probabilité correspondant à la branche qui relie A à B est $P_A(B)$.

- Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.
- La somme des probabilités sur toutes les branches de même origine est égale à 1.

Propriété

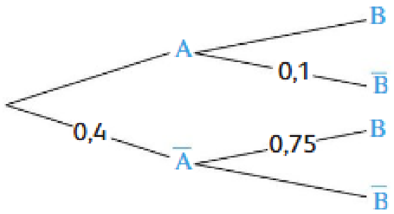
La probabilité d'un chemin complet est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin.

Remarque

Cette propriété repose sur l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple

16 Compéter l'arbre de probabilité suivant.



17 À l'aide de l'arbre ci-dessous, donner les valeurs des probabilités suivantes.

1. $P(A)$

2. $P_{\overline{A}}(B)$

3. $P_A(\overline{B})$

Exercice

Énoncé Parmi les élèves d'un lycée, 80 % regardent principalement des séries, les autres regardent principalement des films. De plus, 40 % des élèves regardant des films préfèrent les regarder en version originale, contre 30 % pour les élèves regardant des séries. On interroge un élève au hasard et on considère les événements S : « l'élève interrogé regarde principalement des séries » et O : « l'élève interrogé regarde son programme en version originale ».

1. Donner les probabilités $P(S)$, $P_S(O)$ et $P_{\overline{S}}(O)$.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

3. Calculer $P(S \cap O)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé. On admet que $P(O) = 0{,}32$.

4. En déduire $P_O(S)$. Les événements O et S sont-ils indépendants ?

31 On donne le tableau croisé d'effectifs suivant dans lequel A, B, C, D et E représentent des événements.

	A	B	C	Total
D	82		79	
E		246		646
Total	450			1 200

1. Reproduire et compléter le tableau.
2. Calculer les probabilités suivantes, en arrondissant au millième si besoin.

a. $P(A \cap D)$ b. $P(C \cap E)$ c. $P_D(B)$
d. $P_B(D)$ e. $P_E(C)$ f. $P_B(E)$

Succession d'épreuves indépendantes

Définition

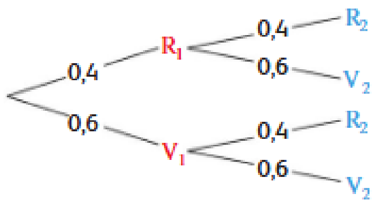
Lorsqu'on effectue plusieurs expériences aléatoires successives dont les résultats ne s'influencent pas entre eux, on dit qu'il y a **succession d'épreuves indépendantes**.

Remarques

- Lors de la répétition de deux épreuves indépendantes identiques, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler la répétition de deux épreuves indépendantes identiques à deux tirages successifs avec remise. En effet, lors de deux tirages successifs avec remise, les résultats du premier tirage n'influencent pas ceux obtenus au second tirage.
- Pour représenter une répétition de deux épreuves indépendantes identiques, on peut utiliser un arbre pondéré à deux niveaux. Les événements et leurs probabilités restent les mêmes entre le premier niveau et le second niveau de l'arbre.

Exemple

Une urne contient 2 jetons rouges et 3 verts. On tire au hasard successivement **avec remise** deux jetons de l'urne. En raison de l'hypothèse « avec remise », le résultat du premier tirage n'influence pas celui du second. C'est une répétition de deux épreuves indépendantes identiques qu'on peut modéliser à l'aide d'un arbre pondéré.



<u>Exemple</u>

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie non truquée.

0. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
1. On répète trois fois de façon indépendante cette expérience aléatoire. On note à chaque lancer le résultat obtenu (Pile ou Face). Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Quelle est la probabilité de ne jamais obtenir de pile au cours des trois lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois pile lors de ces trois lancers ?

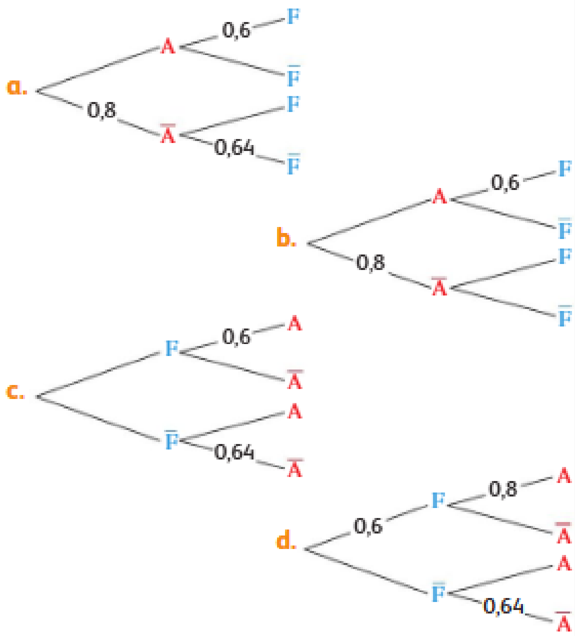
✂---

Exercices supplémentaires sur le chapitre

Exercice 1 (QCM)

Une ville dispose d'un cinéma « Art et essai » et d'un cinéma multiplexe.
Une enquête montre que 80 % des personnes allant régulièrement au cinéma préfèrent le cinéma multiplexe. De plus, 60 % de ceux qui fréquentent le cinéma « Art et essai » voient de préférence des films français. Enfin, 64 % de tous les spectateurs préfèrent le cinéma multiplexe et y voir des films étrangers.
On choisit un spectateur au hasard. On note les évènements A : « le spectateur préfère le cinéma « Art et essai » » et F : « le spectateur préfère les films français ».
Pour chaque question, donner la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. L'arbre pondéré traduisant les hypothèses est :



2. La probabilité qu'un spectateur préfère le cinéma « Art et essai » et les films français est égale à :
a. 0,06 **b.** 0,12 **c.** 0,48 **d.** 0,6

3. La probabilité qu'un spectateur préfère le cinéma multiplexe et les films étrangers est égale à :
a. 0,512 **b.** 0,64
c. $P_{\bar{F}}(\bar{A})$ **d.** $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{F})$

4. La probabilité qu'un spectateur préfère les films français sachant qu'il préfère le cinéma multiplexe est égale à :
a. 0,2 **b.** 0,36 **c.** $P_{\bar{A}}(F)$ **d.** $P(F \cap \bar{A})$

✂---

Exercice 2

Une étude statistique donne les valeurs: 20% des voitures sont rouges, 1% des voitures rouges se font voler. Pour les autres voitures, toutes c
confondues, le double se font voler, soit 2%.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Quelle est la probabilité qu'une voiture se fasse voler ?

c) Un ami m'annonce qu'il vient de se faire voler sa voiture. Quelle est la probabilité que sa voiture (ou plutôt son ancienne voiture, main
ne soit pas rouge ?

✂---

Exercice 3

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie:

- sa ***sensibilité***: la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
- sa ***spécificité***: la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
- sa ***valeur prédictive positive*** (ou valeur diagnostique): la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
- sa ***valeur prédictive négative***: la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes:

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,98 (sensiblité du test);
- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99 (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M: " l'individu est malade " et T: " le test est positif ".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'événement T.
   c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.

Exercices du livre (à trier) :

QCM p.38 à adapter pour automatismes.

29 p.40.

30 p.40

34 p.41

37 ? p.42

42 p.43 (important)