

Chapitre III Repérage dans le plan, géométrie repérée, compléments de géométrie

I - Repérage dans le plan

Définition

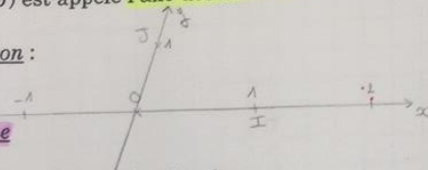
On appelle **repère du plan**, tout ensemble formé par **trois points non alignés**, appelé un triplet.
On notera $(O ; I ; J)$ un tel triplet formé par les trois points O, I et J non alignés.

O est appelée l'**origine du repère**, c'est l'intersection des deux axes du repère.

L'axe (OI) est appelé l'**axe des abscisses** ; en général, la lettre x désigne l'abscisse.

L'axe (OJ) est appelé l'**axe des ordonnées** ; en général, la lettre y désigne l'ordonnée.

Illustration :



Remarque

Soit $(O ; I ; J)$ un repère du plan.

Tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x ; y)$ de nombres.
 x est appelé l'**abscisse** du point M , et y est appelé l'**ordonnée** du point M .

On notera : $M(x ; y)$ pour dire que le point M a pour abscisse x et pour ordonnée y .

Attention, **l'ordre dans les coordonnées est crucial** : d'abord l'abscisse, ensuite l'ordonnée !!

Par exemple $M(2 ; 3)$ n'est pas le même point que $N(3 ; 2)$!!

Dans le repère $(O ; I ; J)$, le point O a pour coordonnées $O(0 ; 0)$, le point I a pour coordonnées $I(1 ; 0)$ et le point J a pour coordonnées $J(0 ; 1)$.

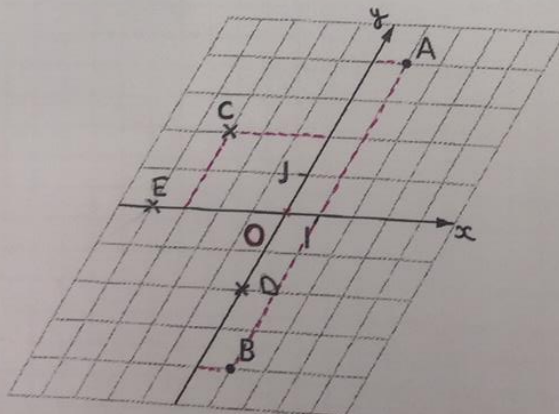
I : point unité de l'axe des abscisses / J : point unité de l'axe des ordonnées

Exemple de repère quelconque $(O ; I ; J)$

Dans le repère ci-dessous $(O ; I ; J)$, lire les coordonnées des points A et B , puis placer les points $C(-3 ; 2)$, $D(0 ; -2)$ et $E(-4 ; 0)$

$A(1 ; 4)$

$B(1 ; -4)$



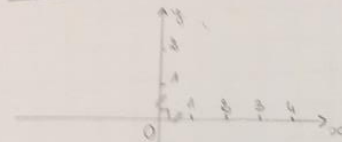
point unité de l'axe des x
point d'unité de l'axe des y
origine
Soit le repère (A, B, C)

Définition Un repère est dit orthogonal lorsque ses axes sont perpendiculaires.

Un repère est dit orthonormé lorsque ses axes sont perpendiculaires **ET** qu'il y a la même unité pour graduer chacun des deux axes.

Au lycée, on est très souvent placé dans des repères orthonormés.

Illustration graphique :

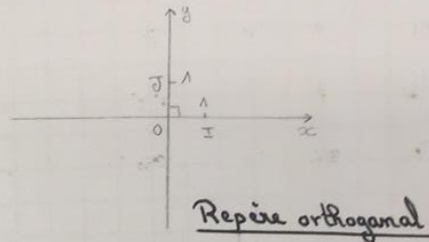


×

Repère orthonormé

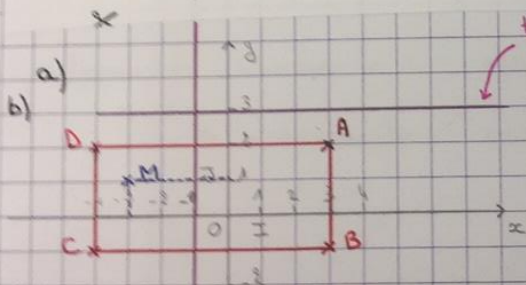
$$(OI) \perp (OJ) \text{ et } OI = OJ = 1$$

Exemple



Repère orthonormal

- Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, construire l'ensemble des points du plan qui ont pour ordonnée le nombre 3.
- Dans ce même repère, construire avec une autre couleur l'ensemble des points du plan qui ont pour abscisse le nombre -1.
- Caractériser par leurs coordonnées, l'ensemble de tous les points du plan situé à l'intérieur du rectangle ABCD, où $A(3 ; 2)$; $B(3 ; -1)$; $C(-4 ; -1)$ et $D(-4 ; 2)$.



→ les points de cette droite ont 3 en ordonnée.
 $y = 3$ sera appelée une équation de cette droite.

→ les points de cette droite ont pr abscisse -1.
 On dit que cette droite a pr équation : $x = -1$.

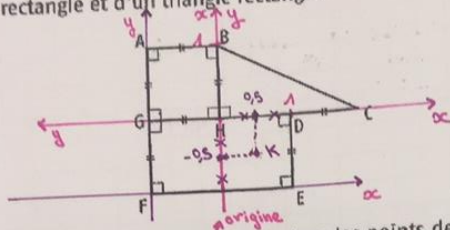
c) Soit $M(x; y)$ situé à l'intérieur du rectangle ABCD:

$$-4 < x < 3$$

$$\text{et } -1 < y < 2$$

Exercice 1

La figure ci-dessous est composée d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle.



- Donner les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère (H, D, B).
- Le point K a pour coordonnées (0,5 ; -0,5) dans ce repère.
Est-il dans le carré, le rectangle ou bien le triangle ?
- Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (F, E, G).
- Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (H, B, G).

1. Dans le repère (H, D, B):

- A (-1; 1)
- B (0; 1)
- C (2; 0)
- D (1; 0)
- E (1; -1)
- F (-1; -1)
- G (-1; 0)
- H (0; 0) $\Rightarrow$ origine du repère

2. K (0,5; -0,5)

On place K : K est du rectangle.

3. Ici, on se place du repère (F, E, G) $\Rightarrow$ repère orthogonal = par la m même unité sur les axes

- A (0; 2)
- B (0,5; 2)
- C (1,5; 1)
- D (1; 1)
- E (1; 0)
- F (0; 0)
- G (0; 1)
- H (0,5; 1)

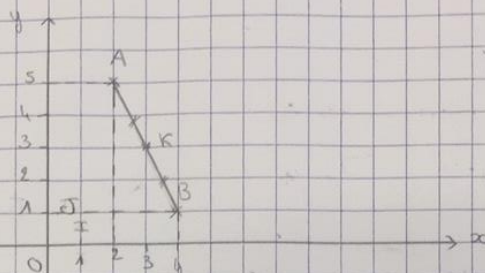
4. Ici, on se place du repère (HB, G) $\Rightarrow$ repère orthonormal

- | | |
|-----------|------------|
| A (1; 1) | E (-1; -1) |
| B (1; 0) | F (-1; 1) |
| C (0; -2) | G (0; 1) |
| D (0; -1) | H (0; 0) |

Remarque : Cet exercice montre que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi.

II - Géométrie analytique

orthonormé
 Activité : soit (O, I, J) un repère du plan, $A(2; 5)$ et $B(4; 1)$ et K le milieu du segment $[AB]$.
 Faire une figure, puis lire graphiquement les coordonnées du milieu de $[AB]$.
 Comment les coordonnées du point K se déduisent-elles de celles des points A et B ?



Il semblerait que $K(3; 3)$

$$\begin{array}{l} x_A = 2 \\ x_B = 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{énoncé} \\ \text{et } x_K = 3 \end{array} \right\} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 = x_K$$

$$\begin{array}{l} y_A = 5 \\ y_B = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{énoncé} \\ \text{et } y_K = 3 \end{array} \right\} \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3 = y_K$$

Clairément, abscisse de K = moyenne des abscisses des points A et B .

et ordonnée de K = moyenne des ordonnées des points A et B .

Propriété 1 : Soit $(O; I; J)$ un repère du plan.

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans ce repère.

Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $K(x_K; y_K)$ avec :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

On justifiera ces relations lors du chapitre sur les vecteurs.

Avant de commencer les exercices suivants, voici quelques rappels sur les quadrilatères.

Ces règles vous donnent des moyens pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un losange, un rectangle, un carré.

Par exemple, pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffira d'expliquer pourquoi ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Pour justifier qu'un quadrilatère est un losange, il suffira de justifier qu'il a ses quatre côtés de même longueur, ou encore de justifier que c'est un parallélogramme et qu'il a deux côtés consécutifs égaux.

Quadrilatères particuliers

Parallélogramme	• Quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.	
	• Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.	
Losange	• Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.	
	• Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. = ont le m. milieu et sont perpendiculaires	
Rectangle	• Parallélogramme qui a un angle droit.	
	• Parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. = se coupent en leur milieu et ont la m. longueur	
Carré	• Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.	
	• Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires.	

3

Losange = quadrilatère ayant ses 4 côtés égaux.

Rectangle = quadrilatère ayant 4 angles droits.

Ce n'est pas la seule manière de procéder pour établir qu'un quadrilatère est un losange : on aurait pu, si on avait des renseignements sur les diagonales de ce quadrilatère, justifier que ce quadrilatère a ses diagonales qui sont perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu.

Ces propriétés qui caractérisent ces quadrilatères fonctionnent dans les deux sens (on parle de double implication en mathématiques) :

Si je sais qu'un quadrilatère est un carré, alors j'ai le droit de dire que ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur.

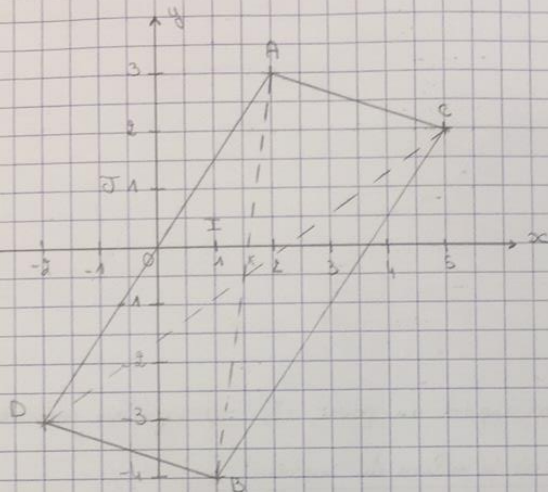
Réciproquement, si je sais qu'un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur, alors il est vrai d'affirmer que ce quadrilatère est un carré.

Exemple

Soit $(O ; I ; J)$ un repère du plan.

- Placer les points $A(2 ; 3)$ et $B(1 ; -4)$.
- Déterminer les coordonnées du point K , K étant le milieu de $[AB]$.
- Soit $C(5 ; 2)$ et $D(-2 ; -3)$. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[CD]$.
- Qu'en déduisez-vous concernant le quadrilatère $ACBD$?

a)



- b) K est le milieu de $[AB]$, donc $K(x_K ; y_K)$

$$\text{avec : } \begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+(-4)}{2} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } K\left(\frac{3}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$$

- c) $C(5 ; 2)$ et $D(-2 ; -3)$

Soit M le milieu du segment $[CD]$

$M(x_M ; y_M)$ avec :

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{5+(-2)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = \frac{-1}{2} \quad \text{Donc } M\left(\frac{3}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$$

Rq: M et K ont les mêmes coordonnées, donc ils sont confondus (situés au m^{ême} endroit).

- d) D'après b) et c) : $K = \text{milieu } [AB]$ et $K = \text{milieu de } [CD]$ d'après la Rq. Ainsi les diagonales du quadrilatère $ACBC$ se coupent en leur milieu K .

Donc $ACBC$ est un parallélogramme (pgm).

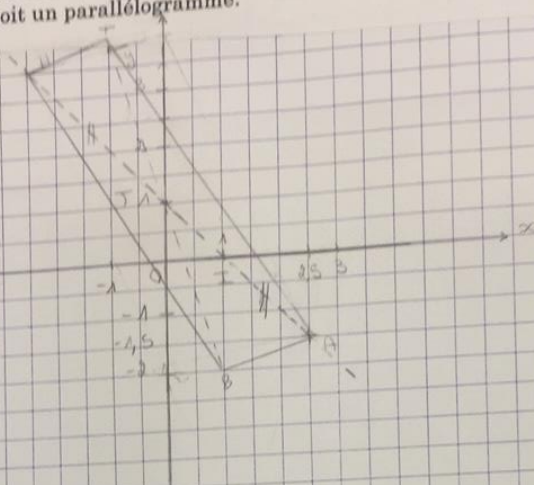
Exercice 2

Soit $(O ; I ; J)$ un repère du plan, et $A(2,5 ; -1,5)$

a) Déterminer les coordonnées du point H , sachant que H est le symétrique du point A par rapport au point J .

b) Soit $T(-1 ; 4)$. Déterminer, en justifiant, les coordonnées du point B de telle sorte que le quadrilatère $ABHT$ soit un parallélogramme.

a)



H est le symétrique du point A par rapport au point J , $\Rightarrow$ symétrie centrale signifie très exactement que : J est le milieu du segment $[AH]$

Soit $H(x_H ; y_H)$; On a vu que $J =$ milieu de $[AH]$:

Rappel : $J(0, 1)$ donc $x_J = 0$

$$y_J = 1$$

Donc :

$$\begin{cases} 0 = \frac{2,5 + x_H}{2} \\ 1 = \frac{-1,5 + y_H}{2} \end{cases}$$

régles des produits en croix

$$0 \times 2 = 2,5 + x_H \text{ donc : } x_H = 0 - 2,5 = -2,5$$

$$\text{et } 1 \times 2 = -1,5 + y_H$$

$$2 = -1,5 + y_H$$

$$y_H = 2 + 1,5 = 3,5$$

$$\text{Donc } H(-2,5 ; 3,5)$$

b) $T(-1; 4)$

On veut que ABHT soit un pgm.

Or un pgm a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Donc ici, $[AH]$ et $[BT]$ qui sont les diagonales ABHT se coupent en leur milieu.

Or J = milieu de $[AH]$, donc J = milieu de $[BT]$

Cad que B est le symétrique du point T par rapport au point J.

J = milieu de $[BT]$ avec $J(0; 1)$

$$\text{Donc: } \begin{cases} x_J = \frac{x_B + x_T}{2} \\ y_J = \frac{y_B + y_T}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} B(x_B; y_B) \\ T(-1; 4) \end{cases}$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} 0 = \frac{x_B + (-1)}{2} \\ 1 = \frac{y_B + 4}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{par produits} \\ \text{en croix} \end{matrix} \quad \begin{cases} x_B - 1 = 0 \times 2 = 0 \\ y_B + 4 = 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

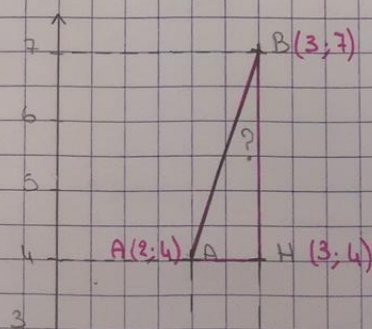
Donc $B(1; -2)$

Activité

Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé, et $A(2; 4)$ et $B(3; 7)$.

Trouver une méthode pour déterminer la longueur AB.

✕



Soit H le point de coordonnées : $H(3; 4)$.

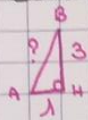
Considérons le triangle AHB :

$y_A = y_H$ donc (AH) est parallèle à l'axe des abscisses (x).

$x_H = x_B$ donc (BH) est parallèle à l'axe des ordonnées (y).

Or les axes du repère sont perpendiculaires (car repère orthonormé).

Donc : AHB est un triangle rectangle en H .



D'après le théorème de Pythagore appliqué à ce dernier :

$$AB^2 = HA^2 + HB^2$$

$$AB^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

Donc comme $AB > 0$, $AB = \sqrt{10}$ unités de longueur.

Propriété 2 (Calcul de la distance entre deux points dans un repère orthonormé)

Soit $(O; I; J)$ un repère **ORTHONORME** du plan.

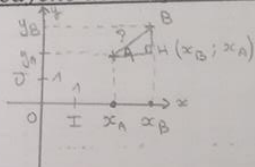
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans ce repère.

La distance entre les points A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\text{carré de la différence des } x + \text{carré de la diff. des } y}$$

→ voir remarque p. suivante

Essayons de comprendre et de justifier cette relation :



$$AH^2 = (x_B - x_A)^2 \text{ et } HB^2 = (y_B - y_A)^2$$

Pythagore appliqué au triangle AHB rectangle en B conduit sans prise à la relat. voulue.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points : $A(2; 3)$ et $B(4; 7)$.

Déterminer la valeur exacte de la longueur AB , puis une valeur approchée au centième près.

Rq: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ car: $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$ car 2 nbs opposés ont le même carré.
et $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$

$x_A - x_B$ et $x_B - x_A$ sont opposés

Exemple:

A(2; 3)

B(4; 7)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (7 - 3)^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ unités de longueur}$$

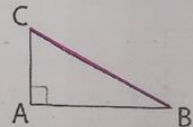
avec la calculatrice : $AB \approx 4,47$ unités de longueur

x

Voici deux rappels importants : le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque :

Théorème de Pythagore

- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Réciproque : Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.



Le théorème de Pythagore sert donc *exclusivement* à calculer une longueur dans un triangle rectangle connaissant la longueur des 2 autres côtés.

La réciproque du théorème de Pythagore sert *exclusivement* à prouver qu'un triangle est rectangle à condit° de connaître la longueur de ses 3 côtés.

Exercice 3

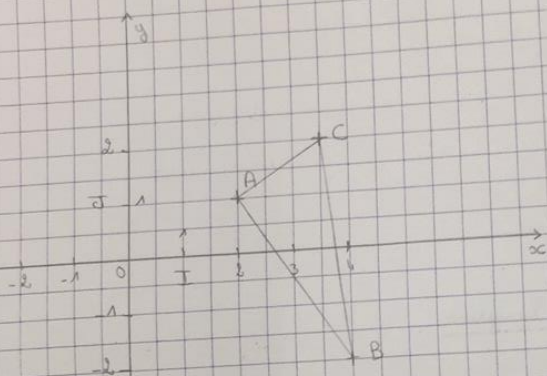
Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère les points : $A(2 ; 1)$; $B(4 ; -2)$ et $C(\frac{7}{2} ; 2)$

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le triangle ABC ?

b) A l'aide d'une démonstration, valider la conjecture effectuée.

Remarque : Dans les exercices, on pourra parfois, si besoin est, calculer le carré des distances pour simplifier les écritures.

a)



Il semblerait que le triangle ABC soit rectangle en A : conjecture.

b) But : montrer que ABC est un triangle rectangle en A .

Calculons chacune des longueurs : AB , AC et BC .

$$\text{Or : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-2 - 1)^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ unité de longueur.}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

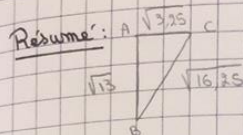
$$AC = \sqrt{(\frac{7}{2} - 2)^2 + (2 - 1)^2}$$

$$AC = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = \sqrt{2,25 + 1} = \sqrt{3,25} \text{ u.l.}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(\frac{7}{2} - 4)^2 + (2 - (-2))^2}$$

$$BC = \sqrt{(-0,5)^2 + 4^2} = \sqrt{0,25 + 16} = \sqrt{16,25} \text{ u.l.}$$



D'une part : $BC^2 = \sqrt{16,25}^2 = 16,25$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{3,25}^2 = 13 + 3,25 = 16,25$

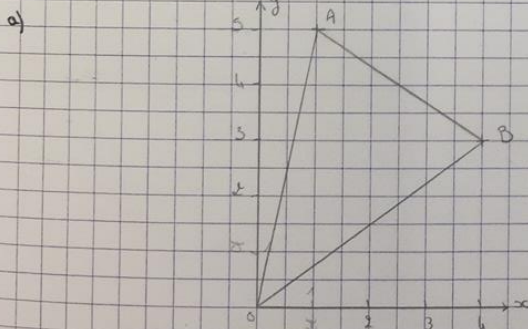
Ainsi : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (car $16,25 = 16,25$)

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère les points : $A(5 ; 1) ; B(3 ; 4)$.

- Faire une figure. Quelle conjecture peut-on légitimement émettre concernant la nature du triangle OAB ?
- Le triangle OAB est-il isocèle ? Justifier.
- Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice ?
- En raisonnant par l'absurde, démontrer que le triangle OAB n'est pas rectangle en B.



Il semblerait que le triangle OAB soit isocèle en O.

- b) Calculons les longueurs OA et OB :

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$$

$$OA = \sqrt{(5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \text{ u.l.}$$

et $OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}$

$$OB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ u.l.}$$

Donc $OA \neq OB$ car $\sqrt{26} \neq 5$.

Donc OAB n'est pas isocèle en O.

- c) $\triangle$ Une conjecture effectuée peut être fautive.
(Nos yeux nous induisent parfois en erreur).
 $\sqrt{26} \approx 5,099 \text{ cm}$

- d) $\triangle OAB$ $\begin{cases} \text{rectangle en B} \\ \text{pas rectangle en B} \end{cases}$

Supposons que le triangle OAB soit rectangle en B : $\Rightarrow$ Hypothèse

Alors d'après le théorème de Pythagore on aurait :

$$OA^2 = OB^2 + BA^2 \quad \text{avec } OA = \sqrt{26}, \text{ donc } OA^2 = 26 \quad \text{q.b.)}$$

$$OB = 5, \text{ donc } OB^2 = 25.$$

Reste à calculer AB^2 : $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$$AB^2 = (3-5)^2 + (-2-1)^2$$

$$AB^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$$

Par suite on aurait : $26 = 25 + 13$

$$26 = 38 \Rightarrow \text{absurdité!}$$

Donc l'hypothèse est fautive.

Donc $\triangle OAB$ n'est pas rectangle en B.

Exercice 5

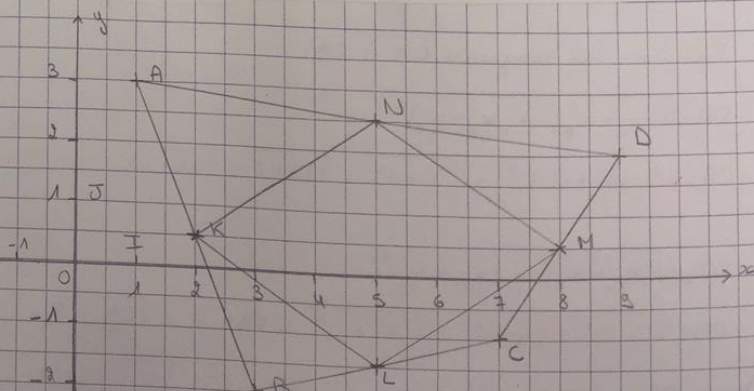
Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, placer les points : $A(1 ; 3)$, $B(3 ; -2)$, $C(7 ; -1)$ et $D(9 ; 2)$.

Soit K le milieu de $[AB]$, L le milieu de $[BC]$, M le milieu de $[CD]$, N le milieu de $[AD]$.

Compléter la figure.

Quel constat faites-vous concernant le quadrilatère $KLMN$?

A l'aide d'une démonstration, déterminer la nature du quadrilatère $KLMN$.



*) Il semblerait que le quadrilatère KLMN soit un losange.

**) Etape 1: On détermine les coordonnées des points K, L, M et N.

Etape 2: On calcule les 4 longueurs KL, LM, MN, NK.

K = milieu de [AB]

$$\text{Donc } K \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$K \left(\frac{1+3}{2}; \frac{3+(-2)}{2} \right)$$

$$K \left(2; 0,5 \right)$$

L = milieu de [BC]

$$\text{Donc } L \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right)$$

$$L \left(\frac{3+7}{2}; \frac{-2+(-1)}{2} \right)$$

$$L \left(5; -1,5 \right)$$

M = milieu de [CD]

$$\text{Donc } M \left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2} \right)$$

$$M \left(\frac{7+9}{2}; \frac{2+(-1)}{2} \right)$$

$$M \left(8; 0,5 \right)$$

N = milieu de [AD]

$$\text{Donc } N \left(\frac{x_A + x_D}{2}; \frac{y_A + y_D}{2} \right)$$

$$N \left(\frac{1+9}{2}; \frac{3+2}{2} \right)$$

$$N \left(5; 2,5 \right)$$

$$KL = \sqrt{(x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2}$$

$$KL = \sqrt{(5-2)^2 + (-1,5-0,5)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \text{ u.l.}$$

$$LM = \sqrt{(x_M - x_L)^2 + (y_M - y_L)^2}$$

$$LM = \sqrt{(8-5)^2 + (0,5-(-1,5))^2}$$

$$LM = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ u.l.}$$

$$MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

$$MN = \sqrt{(5-8)^2 + (2,5-0,5)^2}$$

$$MN = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ u.l.}$$

$$KN = \sqrt{(x_N - x_K)^2 + (y_N - y_K)^2}$$

$$KN = \sqrt{(5-2)^2 + (2,5-0,5)^2}$$

$$KN = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ u.l.}$$

De ces calculs on déduit que : $KL = LM = MN = KN = \sqrt{13} \text{ u.l.}$

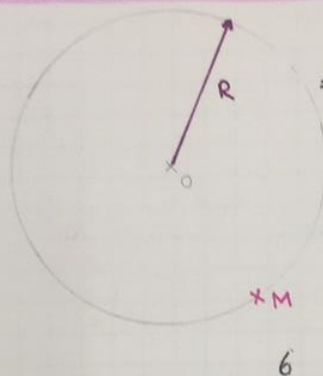
A ce titre, KLMN a ses 4 c. de m. longueur : c'est donc un losange.

III- Compléments de géométrie

Définition

Soit O un point du plan et R un réel positif. Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan situé à la même distance R du point O .

Illustration :



$\Rightarrow$ le cercle de centre O et de rayon R

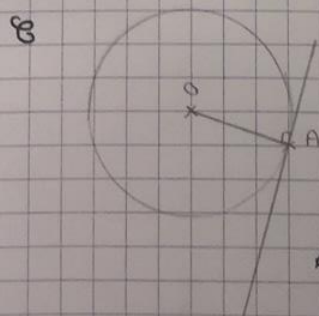
Conséquence : pour prouver qu'un point M appartient au cercle de centre O et de rayon R il suffira d'établir que $OM = R$.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon donné, et A un point appartenant à ce cercle.

On appelle **TANGENTE au cercle $\mathcal{C}$ en le point A** , s'est la droite qui passe par le point A et qui est perpendiculaire au rayon $[OA]$

Illustration :



T = la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

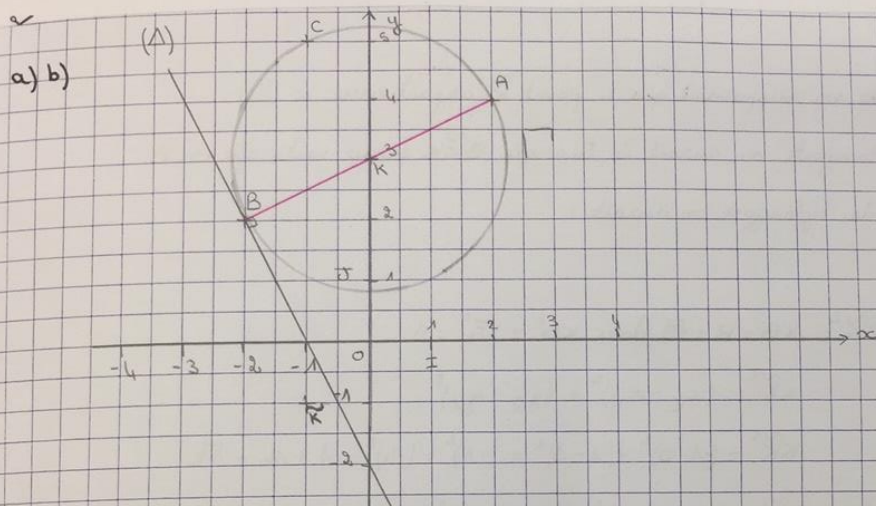
Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère les points : $A(2 ; 4)$; $B(-2 ; 2)$ et $C(-1 ; 5)$.

a) Le point C appartient-il au cercle de diamètre AB ? Justifier.

b) Construire la droite (Δ) , où (Δ) est la tangente au cercle de diamètre AB en le point B .

c) Le point $\tilde{K}(-1 ; -1)$ appartient-il à la droite (Δ) ? Justifier.



Rappel : Le centre d'un cercle est le milieu de chacun de ses diamètres.

Soit K le milieu de $[AB]$: on place K puis on construit le cercle de diamètre $[AB]$: il est centré en K et passe par A !

Nommons Γ (gamma majuscule) le cercle de diamètre AB .

Conjecture : Il semblerait que le point C appartienne au cercle Γ .

Étape : 1. On détermine le rayon R du cercle Γ .
2. On calcule KC et on compare KC et R .

$$1. R = \frac{AB}{2} \text{ et } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 - 4)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Donc } R = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ u.l.}$$

$$2. K(x_K ; y_K) \text{ est le milieu de } [AB], \text{ donc } \begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } K(0 ; 3)$$

Enfin, calculons KC : $KC = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2}$

$$KC = \sqrt{(-1-0)^2 + (5-3)^2}$$

$$KC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$$

$$KC = \sqrt{1+4}$$

$$KC = \sqrt{5}$$

Par suite on a : $KC = \sqrt{5} = R$, donc C appartient au cercle de diamètre AB .

c) Conjecture : Manifestement le point $\tilde{K}$ n'appartient pas à (Δ) .

Raisonnons par l'absurde en supposant que le point $\tilde{K}$ appartienne à (Δ) .

Alors par définit° de (Δ) (tangente) on aurait le triangle $B\tilde{K}K$ serait rectangle en B .

Et d'après le théorème de Pythagore on aurait :

$$K\tilde{K}^2 = KB^2 + B\tilde{K}^2 \quad (\#)$$

Calculons $K\tilde{K}^2$, KB^2 et $B\tilde{K}^2$: $KB = R = \sqrt{5}$ donc $KB^2 = \sqrt{5}^2 = 5$.

$$K\tilde{K}^2 = (x_{\tilde{K}} - x_K)^2 + (y_{\tilde{K}} - y_K)^2$$

$$K\tilde{K}^2 = (-1-0)^2 + (-1-3)^2 = (-1)^2 + (-4)^2 = 1 + 16 = 17.$$

$$\text{Enfin, } B\tilde{K}^2 = (x_{\tilde{K}} - x_B)^2 + (y_{\tilde{K}} - y_B)^2$$

$$B\tilde{K}^2 = (-4 - (-2))^2 + (-1-2)^2 = (-1+2)^2 + (-3)^2$$

$$B\tilde{K}^2 = 1^2 + 9 = 10$$

Par suite $(\#)$ conduirait à : $17 = 5 + 10$

$17 = 15$: Absurde !

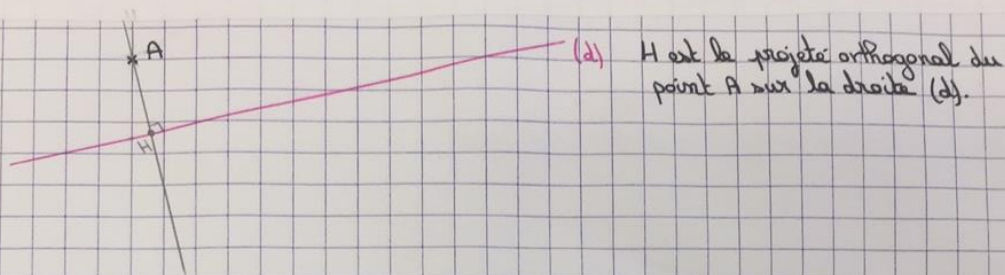
Par suite $\tilde{K}$ n'appartient pas à (Δ) .

Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit (d) une droite, et A un point du plan.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A .

Illustration :



Remarque :

Si A appartient à (d) , alors le projeté orthogonal de A sur (d) est le point A !



Si A n'appartient pas à (d) on a la caractérisation suivante :

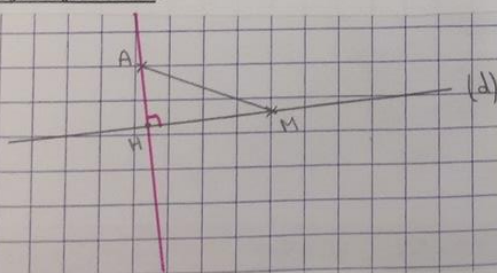
H est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si : H appartient à (d) et (AH) et (d) sont perpendiculaires.

Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche de A , c'est-à-dire :

Pour tout point M appartenant à (d) et distinct de H , on a : $AM > AH$.

Illustration et justification :



Dans le triangle AHM rectangle en H , l'hypoténuse AM est le plus grand des côtés.

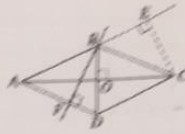
Donc $AM > AH$.

Définition : On appelle distance d'un point A à une droite (d) la longueur AH , où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) .

Exercice 7

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O . En utilisant le codage de la figure, compléter les phrases suivantes :

- Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) est F .
- Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est E .
- Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est D .
- La distance du point C à la droite (BD) est la longueur CO .
- La distance du point B à la droite (AD) est la longueur BF .



Définition

Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC) .

Le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC est le point H projeté orthogonal de A sur (BC) .

Illustration :



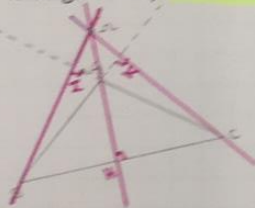
AH est la hauteur issue de A du triangle ABC .

Propriété (admise sera démontrée en DM)

Quel que soit le triangle ABC , ses trois hauteurs se coupent en un même point appelé orthocentre du triangle.

H est l'orthocentre du triangle ABC .

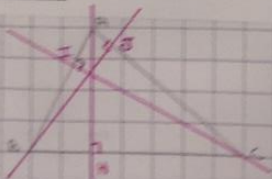
Illustration :



Remarque : Quand on exprime l'aire d'un triangle ABC en disant : $Aire = \frac{Base \times hauteur}{2}$, pour base, on a trois choix possibles : AB , AC ou BC .

Pour chacun de ces choix, la hauteur est alors la distance du dernier sommet restant à la droite portant la base choisie.

Illustration :



$$A(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{AC \times BV}{2}$$

Exercice 8

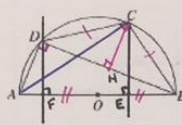
Sur la figure ci-contre, les points C et D sont des points du demi-cercle de diamètre $[AB]$ tels que le triangle BCD est isocèle en C .

Le centre du demi-cercle est noté O .

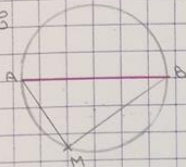
1. Déterminer en justifiant la réponse :

- le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) ,
- le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) ,
- le projeté orthogonal du point C sur la droite (BD) .

2. Placer les points E et F respectivement projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) .



1. a) $\mathcal{G}$



$[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{G}$.

Pour $\forall$ point M appartenant à $\mathcal{G}$, le triangle AMB est rectangle en M .

Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un des $\hat{c}$ du triangle est un diamètre de ce cercle alors ce triangle est rectangle.

$\mathcal{G}$ est donc le point D car le triangle ADB est rectangle en D , par propriété rappelée.

b) De m , le projeté orthogonal de A sur (BC) est le point C .

c) Soit H le projeté orthogonal de C sur (BD) .

Remarque : H est le milieu de $[BD]$ car BCD est isocèle en C .

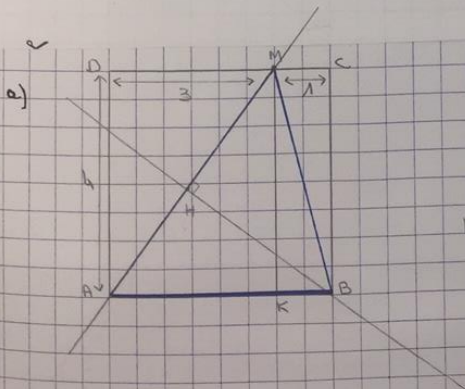
Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré de côté 4 cm et M le point du segment $[CD]$ tel que $MC = 1\text{ cm}$.

Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AM) .

a) Faire une figure en vraie grandeur.

b) En calculant l'aire du triangle AMB de deux façons, déterminer la distance du point B à la droite (AM) .



$$b) \mathcal{A}(AMB) = \frac{AM \times BH}{2} \quad \text{avec } BH = \text{distance du point } B \text{ à la droite } (AM).$$

Calculons ! $AM = 5\text{ cm}$ (théorème de Pythagore)

$$\text{Donc } \mathcal{A}(AMB) = \frac{5 \times BH}{2} = 2,5 BH \text{ cm}^2$$

$$\text{De } m : \mathcal{A}(AMB) = \frac{AB \times MK}{2} \quad \text{où } K = \text{projeté orthogonal de } M \text{ sur } (AB)$$

$$\mathcal{A}(AMB) = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$MK = 4\text{ cm}$ car $KBCM$ est un rectangle donc ses $\hat{c}$ opposés de m sont égaux.

Par suite on a : $K(AMB) = 2,5BH = 8$

Donc : $2,5BH = 8$

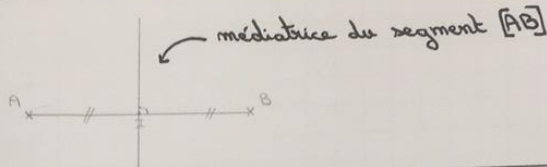
Donc : $BH = \frac{8}{2,5} = \frac{8 \times 4}{2,5 \times 4} = \frac{32}{10} = 3,2$

$BH = 3,2 \text{ cm}$

Définition

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

Illustration :



Propriété fondamentale (qui caractérise la médiatrice)

Un point M appartient à la médiatrice d'un segment $[AB]$ si et seulement si $MA=MB$, c'est-à-dire si et seulement si M est équidistant de A et B .

Illustration :



Remarque : cette propriété dit deux choses :

D'une part, si un point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, alors on peut dire que : $MA=MB$... (c'est M. est équidistant des points A et B).....

D'autre part, si un point M est équidistant des points A et B , c'est-à-dire si $MA = MB$, alors le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 11

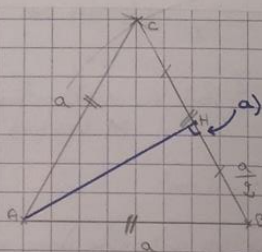
Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur a , où a est un réel strictement positif quelconque.

Soit H le milieu de $[BC]$.

a) Montrer que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

b) Exprimer la longueur AH en fonction de a .

c) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de a .



a) H est le milieu de $[BC]$, donc $HB = HC$, donc H est équidistant des points B et C, donc H appartient à la médiatrice de $[BC]$.

De plus, ABC est équilatéral, donc $AB = AC$, donc A est équidistant de B et C, donc A appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Donc (AH) est la médiatrice de $[BC]$. Par déf. de la médiatrice, on a : $(AH) \perp (BC)$ et $H \in (BC)$.

Donc H est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

b) On a : $AB = a$

$$HB = \frac{a}{2} \text{ car H = milieu de } [BC]$$

Dans le triangle AHB rectangle en H, le théorème de Pythagore dit :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$a^2 = AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Comme } AH > 0, \text{ on a : } AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a.$$

$$c) \mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a}{2} = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Exercice 12

Soit ABC un triangle non aplati.

Soit (d) la médiatrice du segment $[AB]$ et (Δ) la médiatrice du segment $[AC]$.

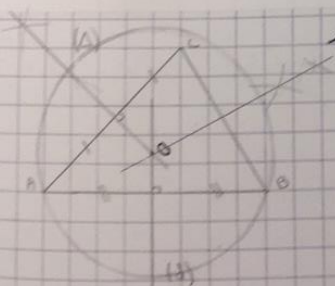
1) Expliquer pourquoi les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

2) On note O le point d'intersection de (d) et (Δ). Démontrer que $OA = OB$ et $OA = OC$.

3) En déduire que O appartient également à la médiatrice du segment $[BC]$.

4) Quelle propriété fondamentale concernant les trois médiatrices d'un triangle vous a-t-on ici fait démontrer ?

10



1) (d) et (Δ) sont $\rightarrow$ sécantes ou $\rightarrow$ parallèles

Raisonnons par l'absurde en supposant que (d) et (Δ) soient parallèles.

Or (d) est la médiatrice de $[AB]$, donc $(d) \perp (AB)$.

De m, (Δ) est la médiatrice de $[AC]$ donc $(\Delta) \perp (AC)$.

Donc on a : $(d) \perp (AB)$ ①

$(\Delta) \perp (AC)$ ②

$(d) \parallel (\Delta)$ ③

$\rightarrow$ Or si 2 droites sont parallèles, la perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Donc on aurait : $(d) \perp (AC)$

De plus ① : $(d) \perp (AB)$

Donc on aurait : $(AC) \parallel (AB) \rightarrow$ Donc A, B, C seraient alignés : absurde car ABC est un triangle (2 droites perpendiculaires à une 3^e non aplati sont parallèles).

Conclu^e : (d) et (Δ) sont sécantes en un point nommé O.

2) Soit O le point d'intersect^o de (d) et (Δ) .

$O \in (d)$ et $(d) =$ Médiatrice de $[AB]$

Donc par propriété du cours : $OA = OB$

De m^e : $O \in (\Delta)$ et $(\Delta) =$ Médiatrice de $[AC]$

Donc $OA = OC$ ($\Rightarrow$ m^e propriété)

3) D'après 2) : $OA = OB$ et $OA = OC$
Donc $OB = OC$!

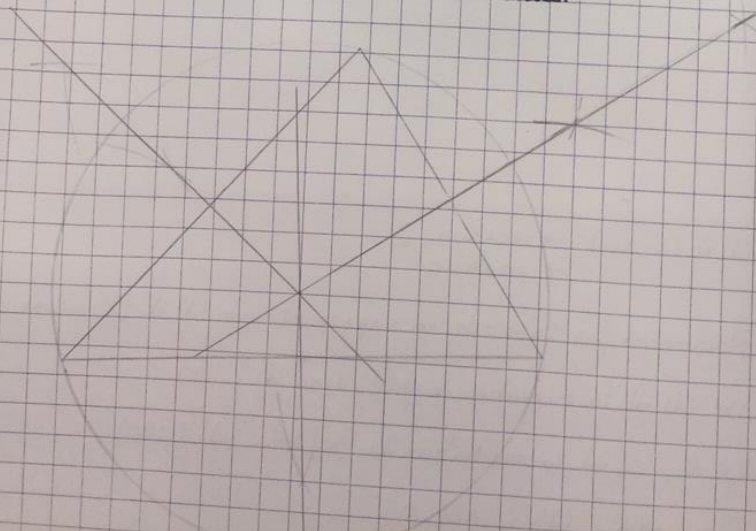
Donc le point O est équidistant des points B et C.

Donc par propriété du cours, le point O appartient à la médiatrice de $[BC]$.

4) On vient de démontrer que les 3 médiatrices des c^t d'un triangle se coupent en un m^e point O avec : $OA = OB = OC$; le point O est le centre du cercle CIRCONSCRIT au triangle ABC.

Origine

Soit C un cercle donné. Construire son centre.



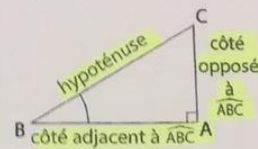
IV- Trigonométrie et triangle rectangle

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définitions (rappels)

Dans un triangle ABC rectangle en A,

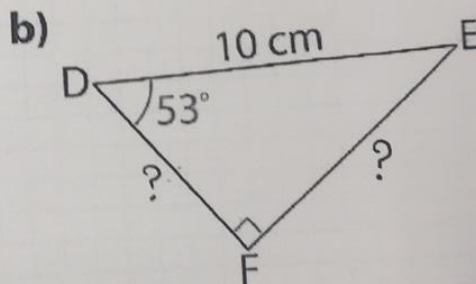
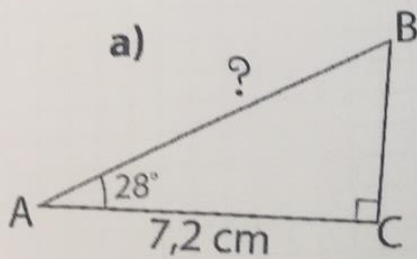
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{adj.}}{\text{hyp.}} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{opp.}}{\text{hyp.}} \quad \tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{opp.}}{\text{adj.}}$$



×

Exercice 13

Calculer la longueur AB dans la figure a), puis DF et EF dans la figure b). Arrondir au millimètre près.



×

a) Dans le triangle ABC rectangle en C:

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(28) = \frac{7,2}{AB}$$

$$\text{Donc : } AB \times \cos(28) = 7,2$$

$$AB = \frac{7,2}{\cos(28)} \text{ cm}$$

$$AB \approx 8,2 \text{ cm}$$

b) Dans le triangle DEF rectangle en F:

$$\cos(\widehat{EDF}) = \frac{DF}{DE}$$

$$\cos(53) = \frac{DF}{10}$$

$$\text{Donc : } DF = 10 \cos(53)$$

$$DF \approx 6 \text{ cm}$$

$$\text{De m\^e : } \sin(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{DE}$$

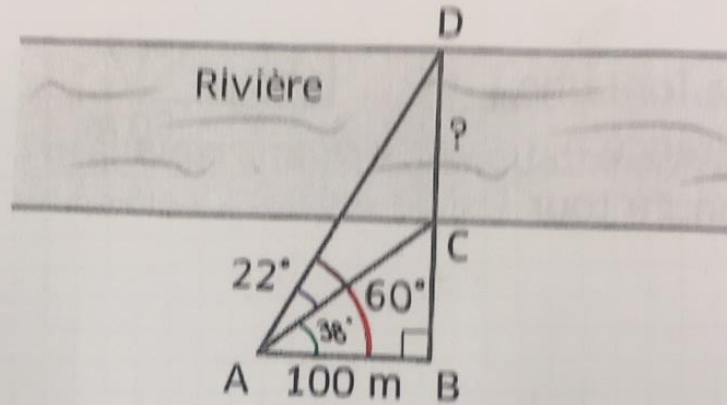
$$\sin(53) = \frac{EF}{10}$$

$$\text{Donc : } EF = 10 \sin(53)$$

$$EF \approx 8 \text{ cm}$$

Exercice 14

En utilisant les informations données sur la figure, calculer la largeur DC de la rivière, arrondie au m.



11

Calculons BD et BC :

Dans le triangle ABD rectangle en B :

$$\tan(\widehat{BAD}) = \frac{BD}{AB}$$

$$\tan(60) = \frac{BD}{100}$$

$$BD = 100 \times \tan(60)$$

De même, dans le triangle ABC rectangle en B :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan(38) = \frac{BC}{100}$$

$$\text{Donc : } BC = 100 \tan(38)$$

Par suite, comme $CD = BD - BC$

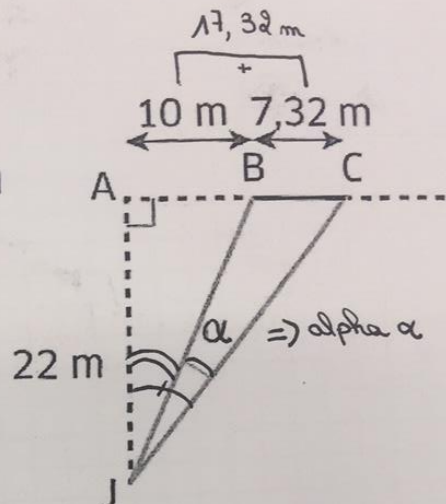
$$CD = 100 \tan(60) - 100 \tan(38)$$

$$CD = 100 (\tan(60) - \tan(38))$$

avec la calculatrice : $CD \approx 95 \text{ m}$

Exercice 15

On a représenté ci-contre une partie d'un terrain de football : la largeur des buts [BC] est égale à 7,32 m ; le joueur placé en J est à 22 mètres du point A au fond du terrain et [AB] mesure 10 m. Déterminer une valeur arrondie au degré de l'angle de tir α .



Déterminons les mesures des angles $\widehat{A\hat{J}C}$ et $\widehat{A\hat{J}B}$:

Dans le triangle $A\hat{J}C$ rectangle en A :

$$\tan(\widehat{A\hat{J}C}) = \frac{AC}{AJ} = \frac{17,32}{22}$$

$$\arctan\left(\frac{17,32}{22}\right) \approx 38^\circ$$

$$\text{Donc } \widehat{A\hat{J}C} \approx 38^\circ$$

De m : Dans le triangle $A\hat{J}B$ rectangle en A :

$$\tan(\widehat{A\hat{J}B}) = \frac{AB}{AJ} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$$

$$\arctan\left(\frac{5}{11}\right) \approx 24^\circ$$

$$\text{Donc la mesure de } \widehat{A\hat{J}B} \approx 24^\circ$$

$$\text{Par suite : } \alpha = \widehat{A\hat{J}C} - \widehat{A\hat{J}B}$$

$$\alpha \approx 38 - 24$$

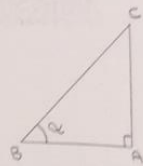
$$\alpha \approx 14^\circ$$

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

① $0 < \cos(\alpha) < 1$ ② $0 < \sin(\alpha) < 1$ ③ $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

④ $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$



Preuve: ① $\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$ et $BC > AB > 0$ donc $0 < \frac{AB}{BC} < 1$

Donc: $0 < \cos(\alpha) < 1$

$\Rightarrow$ Idem pour ②

③ $\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$ donc $\cos^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AB^2}{BC^2}$

$\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC}$, donc $\sin^2(\alpha) = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2}{BC^2}$

Donc $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.

d'après théorème de Pythagore: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Rq: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ est appelé relat° de Pythagore trigonométrique.

④ $\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{AC}{AB}$ *

et $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC \times BC}{BC \times AB} = \frac{AC}{AB}$ **

De (*) et (**) on déduit que: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Exercice 16

α est la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

Sachant que $\cos(\alpha) = 0,7$, déterminer la valeur exacte de: $\sin(\alpha)$ puis $\tan(\alpha)$.

On sait que $\cos(\alpha) = 0,7$.

Or d'après le cours: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$0,7^2 + \sin^2(\alpha) = 1$

$0,49 + \sin^2(\alpha) = 1$

$\sin^2(\alpha) = 1 - 0,49 = 0,51$

Or $\sin(\alpha) > 0$ car α est un angle aigu

Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{0,51}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{0,51}}{0,7} = \frac{\sqrt{0,51}}{\frac{7}{10}} = \frac{10\sqrt{0,51}}{7} = \frac{\sqrt{100 \times 0,51}}{7}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{51}}{7}$