Chapitre 2 — Les équations

I- Rappels sur les égalités

Une égalité est une entité contenant le *signe égal* noté = !

Une égalité est soit vraie (ou vérifiée) soit fausse !

Par exemple, l'égalité $a = 2$ n'est vraie que si l'on donne au réel a la valeur 2.

L'égalité $x^2 = 2x$ est fausse lorsque $x = 5$ car : $5^2 = 25$ et $2 \times 5 = 10$ et $25 \neq 10$!

Rappelons des règles sur les égalités, qui seront à la base de la résolution des équations :

Règles fondamentales sur les égalités

Soient a, b et c des réels quelconques.

i) On peut ajouter à chacun des deux membres d'une égalité le même nombre, on obtient une égalité équivalente, c'est-à-dire de même nature (vraie ou fausse).

est équivalent à

$a = b$ équivaut à $a+c = b+c$, ce que l'on notera : $a = b \Leftrightarrow a+c = b+c$

Le symbole $\Leftrightarrow$ n'a pas la même signification que le signe = ! Ne pas confondre les deux.

On pourra mettre le symbole $\Leftrightarrow$ entre deux égalités de même nature.

ii) On peut soustraire à chacun des deux membres d'une égalité le même nombre :

$a = b$ équivaut à $a-c = b-c$, ce que l'on notera : $a = b \Leftrightarrow a-c = b-c$.

iii) On peut multiplier (respectivement diviser) chacun des deux membres d'une égalité par le même nombre NON NUL, c'est-à-dire différent de 0 !

Pour tout réel d non nul, $a = b$ équivaut à $a \times d = b \times d$, ce que l'on notera : $a = b \Leftrightarrow a \times d = b \times d$.

Pour tout réel d non nul, $a = b$ équivaut à $\frac{a}{d} = \frac{b}{d}$, ce que l'on notera $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{d}$.

Grâce à ces règles, on va facilement réussir à isoler une variable, ce que l'on fait classiquement en résolvant des équations.

Exercice 1 En utilisant les règles sur les égalités, isoler dans chacune des expressions suivantes la variable demandée :

1) Isoler a dans l'expression : $a + 7 = 2,5$: $a+7-7 = 2,5-7$ $\boxed{a = -4,5}$

2) Isoler b dans l'expression : $3b = 5$. : $\frac{3b}{3} = \frac{5}{3}$: $\boxed{b = \frac{5}{3}}$

3) Isoler c dans l'expression : $3c + 5 = c + 11$. : $3c+5-c = c+11-c$
$2c+5 = 11 = 2c+5-5 = 11-5 = \frac{2c}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3 = c}$

Pour les exemples suivants, toutes les variables sont différentes de zéro (non nulles).

4) $d = Vt$: isoler t ; 5) $V = xyz$: isoler y.

6) $PV = nRT$: *isoler R* ; 7) $S = \pi R^2 H$: isoler R sachant que S, R et H sont positives.

*8) $ax + by = c$: *isoler y*.

4) $d = vt$

$\frac{d}{v} = \frac{vt}{v}$

$\frac{d}{v} = t$

$t = \frac{d}{v}$

5) $V = xyz$

$\frac{V}{xz} = \frac{xyz}{xz}$

$\frac{V}{xz} = y$

6) $PV = nRT$

$\frac{PV}{nT} = \frac{nRT}{nT}$

$\frac{PV}{nT} = R$

7) $S = \pi R^2 H$

$\frac{S}{\pi H} = \frac{\pi R^2 H}{\pi H}$

$R^2 = \frac{S}{\pi H}$

$R = \sqrt{\frac{S}{\pi H}}$

8) $ax + by = c$

$ax - ax + by = c - ax$

$by = c - ax$

$\frac{by}{b} = \frac{c - ax}{b}$

$y = \frac{c - ax}{b}$

II- Les équations du premier degré à une inconnue

Voici quelques équations simples rencontrées au collège : $3x + 1 = 4$; $2x - 5 = x + 4$.

Définitions

Une équation d'inconnue x est une égalité qui peut-être vraie pour certaines valeurs de x, et fausse pour d'autres.

Résoudre dans ℝ une équation d'inconnue x, c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité de l'énoncé est vraie.

Ces éventuels nombres forment l'ensemble des solutions de l'équation.

Deux ***équations*** sont ***équivalentes*** lorsqu'elles ont ***même ensemble de solution.***

Méthode de résolution : Pour résoudre une équation, on raisonne par équivalence, c'est-à-dire qu'on transforme, ***à l'aide des règles sur les égalités*** vues précédemment, l'équation initiale en une *équation plus simple* qui a le même ensemble de solution que l'équation initiale, dans **le but de se ramener à une équation triviale de la forme: $x = ...$**

Lorsqu'on a abouti à cette dernière écriture, on a résolu l'équation initiale, il ne reste plus qu'à conclure, en mentionnant l'ensemble des solutions de l'équation, que l'on notera : $\mathcal{S} =$

On retiendra donc que lorsqu'on demande de résoudre une équation, il faut isoler, si cela est possible, l'inconnue.

$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{-7} 2x - 7$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$a)$ $2x - 7 = 0$; $b)$ $3x + 4 = 11$; $c)$ $2x = 11$; $d)$ $\frac{x}{3} - 5 = 2$; $e)$ $4x + 1 = 2x + 7$

$f)$ $5(2x - 1) = 6 - (2x - 1)$; $g)$ $2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$; $h)$ $3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$.

Les équations sont un outil puissant pour résoudre des problèmes en mathématiques !

a) $2x - 7 = 0$

$2x - 7 + 7 = 0 + 7$

$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$

Version lente

$x = \frac{7}{2}$

$x = 3{,}5$

l'ensemble de solutions → $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

$2x - 7 = 0$

$2x = 7$

$x = \frac{7}{2}$

$S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Version rapide

b) $3x + 4 = 11$

$3x = 7$

$x = \frac{7}{3}$

$S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$

c) $2x = 11$

$x = \frac{11}{2}$

$x = 5{,}5$

$S = \{5{,}5\}$

d) $\frac{x}{3} - 5 = 2$

$\frac{x}{3} - 5 + 5 = 2 + 5$

$\frac{x}{3} \times 3 = 7 \times 3$

$x = 21$

$S = \{21\}$

e) $4x + 1 = 2x + 7$

$4x + 1 - 2x = 2x + 7 - 2x$

$2x + 1 = 7$

$2x = 6$

$x = 3$

$S = \{3\}$

f) $5(2x - 1) = 6 - (2x - 1)$

$10x - 5 = 6 - 2x + 1$

$10x - 5 = -2x + 7$

$12x - 5 = 7$

$12x = 12$

$x = 1$ car $\frac{12}{12} = 1$.

$S = \{1\}$

g) $2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$

$2x + 8 + 1 - 5x = 3 - 3x + 7$

$-3x + 9 = -3x + 10$

$9 = 10$ ⇒ égalité fausse*

Cette équation n'admet pas de solution

On notera : $S = \varnothing$

h) $3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$

$6x + 12 - 2x = 14 - 2 + 4x$

$4x + 12 = 12 + 4x$

$4x + 12 = 4x + 12$

Cette égalité est vérifiée pour TOUTES valeurs de x !

Tous les nbs réels sont solutions de cette équation :

On notera : $S = \{\mathbb{R}\}$

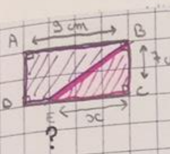
* Il n'existe aucun réel x pour lequel :

$2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$

Exercice 3

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 9\ cm$ et $AD = 7\ cm$. Soit E un point situé sur le segment $[DC]$.

Où faut-il placer E sur le segment $[DC]$, de sorte que le quadrilatère $ADEB$ ait une aire qui soit le double de celle du triangle BEC ?



Choix de l'inconnue : Soit x la longueur CE.

Le triangle BEC a pour aire :

$$A(BEC) = \frac{CE \times CB}{2} = \frac{7x}{2} = 3{,}5x$$

et l'aire du trapèze ADEB est :

$$A(ADEB) = A(ABCD) - A(BEC)$$

$$A(ADEB) = 7 \times 9 - \frac{7x}{2} = 63 - \frac{7x}{2} = \underline{63 - 3{,}5x.}$$

D'après l'énoncé, on veut que : $A(ADEB) = 2 \times A(BEC)$

$$63 - 3{,}5x = 2 \times 3{,}5x$$

$$7x = 63 - 3{,}5x$$

$$7x + 3{,}5x = 63$$

$$10{,}5x = 63$$

$$\frac{10{,}5x}{10{,}5} = \frac{63}{10{,}5}$$

$$x = \frac{63}{10{,}5}$$

$$x = 6$$

$$S = \{6\}$$

On doit donc placer le point E sur [DC] à 6 cm du point C.

Exercice 4

Un groupe d'amis va déjeuner dans un bistrot. Chacun choisit la formule du jour à 11,90 €.

Au moment de payer, deux personnes ont oublié leur portefeuille : les autres doivent alors payer 1,70€ de plus chacun pour régler la note.

Combien y avait-il d'amis dans ce groupe lors de ce déjeuner ?

Choix de l'inconnue : soit x le nb d'amis du groupe allant déjeuner.

La note s'élève donc à : $11{,}9x$. Il reste $x-2$ personnes pour payer cette somme, et chacune de ces personnes là va devoir payer : $11{,}9 + 1{,}7 = 13{,}6$€.

Donc : $11{,}9x = 13{,}6(x-2)$

$$11{,}9x = 13{,}6x - 27{,}2$$

$$11{,}9x - 13{,}6x = -27{,}2$$

$$-1{,}7x = -27{,}2$$

$$x = \frac{-27{,}2}{-1{,}7}$$

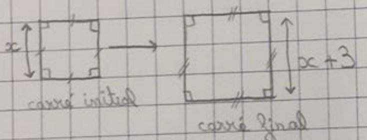
$$x = 16$$

$$S = \{16\}$$

Il y a 16 personnes au déjeuner.

Exercice 5

Si on augmente la longueur de chacun des côtés d'un carré de 3 mètres, son aire augmente de 45,6 m^2.
Quelle est la longueur des côtés du carré initial ? Justifier.



Choix de l'inconnue : soit x la longueur de chacun des ĉ du carré initial.

Le carré initial a donc pour aire : x^2.

Le carré "augmenté" a pour longueur de ĉ : $x+3$, et pour aire : $(x+3)^2$.

$$x^2 + 45{,}6 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 45{,}6 = x^2 + 6x + 9$$

$$45{,}6 = 6x + 9$$

$$36{,}6 = 6x$$

$$\frac{36{,}6}{6} = x$$

$$x = 6{,}1$$

$$S = \{6{,}1\}$$

Initialement, les ĉ du carré mesuraient 6,1 m.

Exercice 6

Je fais les courses, et dépense le quart de mon argent pour un premier achat, puis 10€ pour un second achat.

Je rentre avec deux fois plus d'argent que j'en ai dépensé pour faire ces deux achats.

Avec combien d'argent étais-je parti faire mes courses ?

Choix de l'inconnue : soit x la "somme" d'argent que j'avais au départ :

Dépense pour le 1° achat : $\frac{1}{4} \times x$ soit $\frac{x}{4}$.

Dépense pour le 2° achat : 10€

dépense totale : $\frac{x}{4} + 10$

On revient donc à la maison avec : $x - \underbrace{\left(\frac{x}{4} + 10\right)}_{\text{argent dépensé}}$

$$x - \left(\frac{x}{4} + 10\right) = 2 \times \left(\frac{x}{4} + 10\right)$$

$$x - \frac{x}{4} - 10 = \frac{2x}{4} + 20$$

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{x}{4} = \frac{1}{4} \times x = 0,25x$

$$x - 0,25x - 10 = 2 \times 0,25x + 20$$

$$x - 0,25x - 10 = 0,50x + 20$$

$$0,75x - 10 = 0,5x + 20$$

$$0,75x - 0,5x = 10 + 20$$

$$0,25x = 30$$

$$x = \frac{30}{0,25} = 120$$

$$S = \{120\}$$

J'étais parti avec 120€ en poche.

III- D'autres types d'équations

A-Equation avec fractions

Nous allons faire quelques rappels sur les fractions au préalable :

Révisions : règles et opérations algébriques sur les fractions

Fondamental et d'usage fréquent tout au long de l'année !

Pour tout entier a, et tout entier b, c et k non nuls on a les règles suivantes concernant le calcul fractionnaire :

i) $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}}$; ii) $\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$; iii) $\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$

En français :

i) Règle d'invariance des fractions :

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant..... *son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul.*

ii) et iii) Pour additionner (respectivement soustraire) deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner (respectivement soustraire les numérateurs entre eux, et de conserver le même dénominateur.

1. Addition de fractions

Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de les réduire à un même dénominateur, appelé dénominateur commun. On utilise ensuite les règles *ii)* et *iii)* après s'être ramené à un même dénominateur, vu que les deux fractions ont alors le même dénominateur !

Comme dénominateur commun, on prend fréquemment le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, et on utilise la règle *i)* rappelée en amont.

Exemple : Exprimer, sous forme de fraction irréductible :

$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1\times3}{4\times3} - \frac{1\times2}{6\times2} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$; $\frac{15}{8} - \frac{11}{12} = \frac{15\times3}{24} - \frac{11\times2}{24} = \frac{45}{24} - \frac{22}{24} = \frac{23}{24}$

$\frac{8}{3} + \frac{7}{18} - \frac{4}{9} = \frac{8\times6}{18} + \frac{7}{18} - \frac{4\times2}{18} = \frac{48}{18} + \frac{7}{18} - \frac{8}{18} = \frac{48+7-8}{18} = \frac{47}{18}$

$\frac{1}{209} - \frac{1}{210} = \frac{1\times210}{209\times210} - \frac{1\times209}{210\times209} = \frac{210-209}{209\times210} = \frac{1}{43890}$

Dans le dernier exemple, et <u>*en dernier recours*</u>, on pourra ***toujours*** choisir comme dénominateur commun le ..produit de deux dénominateurs..

2. *Multiplication de fractions*

<u>*Règle*</u> : pour multiplier deux fractions, on multiplie respectivement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous entiers a, b, c et d, avec b et d *non nuls*, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$ *En particulier*, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{d}$ car : $a = \frac{a}{1}$

On essaiera cependant, avant de se lancer dans les multiplications, de trouver si on peut simplifier, c'est-à-dire en divisant par un diviseur commun, un numérateur et un dénominateur.

<u>*Exemples*</u> : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} = \frac{3\times7}{4\times9} = \frac{\cancel{3}\times7}{4\times\cancel{3}\times3} = \frac{7}{12}$

$\frac{3}{8} \times \frac{7}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{3\times7\times4}{8\times6\times9} = \frac{\cancel{3}\times7\times\cancel{2}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times4\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times9} = \frac{7}{36}$

$-\frac{7}{4} \times \frac{5}{-8} \times 6 = \frac{7}{4} \times \frac{5}{8} \times 6 = \frac{7\times5\times6}{4\times8} = \frac{7\times5\times\cancel{2}\times3}{\cancel{2}\times2\times8} = \frac{7\times5\times3}{16} = \frac{105}{16}$

3. *Division de fractions*

<u>*Rappel*</u> : soit a et b deux entiers non nuls.

L' inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction qui multipliée par $\frac{a}{b}$ donne 1 comme produit :

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est donc égal à $\frac{b}{a}$.

<u>*Règle*</u> : pour tous entiers a, b, c et d non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

ce qui se note encore : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$............

Le trait de la division effectuée (= division principale) est de taille plus grande que celui de chacune des fractions, et doit toujours être situé au même niveau que le signe = !

Pour diviser une première fraction par une seconde, il suffit donc de multiplier la première fraction par ...l'inverse.............. de la seconde fraction.

Ainsi, la division n'est rien d'autre qu'une multiplication !

Exemples : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{17}{25} \div \frac{34}{27} = \frac{17}{25} \times \frac{27}{34} = \frac{\cancel{17} \times 27}{25 \times \cancel{17} \times 2} = \frac{27}{50}.$$

$$\frac{\frac{13}{3}}{\frac{26}{9}} = \frac{13}{3} \times \frac{9}{26} = \frac{\cancel{13} \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{13} \times 2} = \frac{3}{2}.$$

4. *Règles de priorité entre opérations*

Rappelons ***qu'en l'absence de parenthèses***, la ***Multiplication*** **est prioritaire sur l'*Addition*** : on effectue d'abord Les multiplications, et ensuite les additions.

Exemples :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{\cancel{2} \times 5}{3 \times \cancel{2} \times 3} = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} = \frac{2}{1} - \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3} \times 4} = \frac{2}{1} - \frac{1}{16} = \frac{32}{16} - \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

En présence de parenthèses, on effectue ***prioritairement les opérations situées à l'intérieur de ces dernières***, en respectant la précédente règle une fois à l'intérieur de ces dernières !

Exemples : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\left(-\frac{7}{6} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \left(\frac{-35}{30} + \frac{18}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{-17}{30} \times \frac{1}{4} = \frac{-17}{120}.$$

Terminons les rappels par une règle fondamentale en mathématiques, *la règle des produits en croix*, qui dit que ***deux fractions sont égales* si et seulement si *les produits en croix sont égaux***

Règle des produits en croix ♥♥♥

Pour tous entiers a, b, c et d, avec b et d non nuls,

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **si et seulement si** (= équivaut à dire que) .$a \times d = b \times c$.........

Remarque : d'où vient ce terme étrange *"produits en croix"* ?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Preuve de la propriété des produits en croix :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\underbrace{\frac{a}{b} \times b} = \frac{c}{d} \times b$

Donc $a = \frac{c \times b}{d}$

$a \times d = \frac{c \times b}{d} \times d$

$a \times d = c \times b$

Donc : $a \times d = b \times c$

<u>Réciproque</u> : Si $a \times d = b \times c$

$$\frac{a \times d}{b} = \frac{b \times c}{b}$$

$$\frac{a \times d}{b} = c$$

$$\frac{a}{b} \times d = c$$

$$\frac{\frac{a}{b} \times d}{d} = \frac{c}{d}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Soit on peut diviser par 0.
Soit on ne peut pas diviser par 0. ⊗

Si on pouvait diviser par 0 : alors on pourrait diviser par 0 le nb 1 :] hypothèse

$\frac{1}{0} = x$ (x : résultat de l'opération $\frac{1}{0}$).

Donc $\frac{1}{0} = \frac{x}{1}$

Donc : $\underbrace{1 \times 1} = 0 \times x$

$1 = 0$: absurdité !

Donc l'hypothèse faite est fausse, son contraire est donc vrai : On ne peut pas diviser par 0.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2x}{3} = \frac{3}{7}$; b) $\frac{x-3}{5} = \frac{1-5x}{3}$; c) $\frac{x}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{5}$; d) $\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$

a) $\frac{2x}{3} = \frac{3}{7}$ règle des p.c.

$2x \times 7 = 3 \times 3$

$14x = 9$

$x = \frac{9}{14}$

$S = \left\{\frac{9}{14}\right\}$

b) $\frac{x-3}{5} = \frac{1-5x}{3}$

$(x-3) \times 3 = (1-5x) \times 5$

$3(x-3) = 5(1-5x)$

$3x - 9 = 5 - 25x$

$3x - 9 + 25x = 5$

$28x - 9 = 5$

$28x = 14$

$x = \frac{14}{28}$

$x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{x}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{5}$

$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{1}{4}$

$\frac{5x}{15} + \frac{3x}{15} = \frac{1}{4}$

$\frac{8x}{15} = \frac{1}{4}$

$8x \times 4 = 15 \times 1$

$32x = 15$

$x = \frac{15}{32}$

$S = \left\{\frac{15}{32}\right\}$

d) $\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$

Si $\frac{a}{12} = \frac{b}{12}$ alors $a = b$

donc

$\frac{4(x+2)}{12} - \frac{3 \times 3(x-2)}{12} = \frac{-7x+2}{12} + \frac{24}{12}$

$4(x+2) - 9(x-2) = -7x + 2 + 24$

$4x + 8 - 9x + 18 = -7x + 26$

$-5x + 26 = -7x + 26$

$-5x + 26 = 26 - 7x$

$-5x + 26 = 26 - 7x$

$-5x = -7x$

$2x = 0$

$x = \frac{0}{2} = 0$

$S = \{0\}$

Exercice 8 (introduction au raisonnement par l'absurde).

Les fractions : $\frac{108}{109}$ et $\frac{106}{107}$ sont-elles égales ? Justifier.

Soit $\boxed{\frac{108}{109} = \frac{106}{107}}$

Soit $\frac{108}{109} \neq \frac{106}{107}$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{108}{109} = \frac{106}{107}$

Alors d'après la règle des PC, on aurait que : $108 \times 107 = 109 \times 106$:

donc $11556 = 11554$: absurdité !

Donc l'hypothèse $\frac{108}{109} = \frac{106}{107}$ est fausse donc son contraire est vrai : $\boxed{\frac{108}{109} \neq \frac{106}{107}}$.

B Equations produit nul

Rappel important : le théorème du produit nul

$A(x)\times B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des expressions équivaut à : $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

En français, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $(2x+5)(-3x+7) = 0$; $(2x+5)+(-3x+7) = 0$.

$(3x+1)^2 - 4(3x+1) = 0$; $4(x-3)(x+2) - (x^2-9) = 0$

$(2x+5)(-3x+7) = 0$

équivaut à : $2x+5 = 0$ ou $-3x+7 = 0$

$2x = -5$ | $-3x = -7$

$x = \frac{-5}{2}$ | $\frac{-3x}{-3} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$

$x = -2{,}5$ | $x = \frac{7}{3}$

$S = \left\{-2{,}5 ; \frac{7}{3}\right\}$

⚠ pas produit

$(2x+5)+(-3x+7) = 0$

$2x+5-3x+7 = 0$

$-x+12 = 0$

$12 = x$

$S = \{12\}$

$(3x+1)^2 - 4(3x+1) = 0$

factorisation

$(3x+1)(3x+1-4) = 0$

$(3x+1)(3x-3) = 0$

équivaut à : $3x+1 = 0$ ou $3x-3 = 0$

$3x = -1$ | $3x = 3$

$x = \frac{-1}{3}$ | $x = \frac{3}{3} = 1$

$S = \left\{\frac{-1}{3} ; 1\right\}$

$4(x-3)(x+2) - (x^2-9) = 0$

$4(x-3)(x+2) - (x-3)(x+3) = 0$

$(x-3)\left(4(x+2)-(x+3)\right) = 0$

$(x-3)(4x+8-x-3) = 0$

$(x-3)(3x+5) = 0$

Ce qui équivaut à : $x-3 = 0$ ou $3x+5 = 0$

$x = 3$ | $3x = -5$

$x = \frac{-5}{3}$

$S = \left\{\frac{-5}{3} ; 3\right\}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x-5)^2 = 36$.

Méthode : Lorsqu'on doit résoudre une équation où figurent des x^2 (*non simplifiables*), on procédera, à ce stade de l'année, en deux étapes :

Etape 1...On se ramène à un membre de droite nul : $(2x-5)^2 - 36 = 0$.................

Etape 2....On factorise dans le but de se ramener à un produit nul..........................

$(2x-5)^2 = 36$

E_1 : $(2x-5)^2 - 6^2 = 0$ Motif A^2-B^2

E_2 : $(2x-5-6)(2x-5+6) = 0$ $(a-b)(a+b)$

$(2x-11)(2x+1) = 0$ équation produit nul

ce qui équivaut à : $2x - 11 = 0$ ou $2x + 1 = 0$

$2x = 11$ | $2x = -1$

$x = \frac{11}{2} = 5{,}5$ | $x = \frac{-1}{2} = 0{,}5$

$S = \{0{,}5 ; 5{,}5\}$

C-Equations quotient nul

Rappelons que la division par 0 n'existe pas !

Définition

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Pour que l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$ soit calculable il faut que son dénominateur $B(x)$ soit différent de 0.

Toute valeur x telle que $B(x) = 0$ est appelée une ...Valeur interdite.................. pour l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$.

☞ *En mathématiques, dès qu'on est en présence d'un dénominateur, il faudra toujours se poser la question : ce dernier est-il différent de 0 ?*

Exemple

Déterminer la valeur interdite de l'expression $\frac{2x-1}{4x+1}$, puis toutes les valeurs de x pour lesquelles il est licite de calculer cette expression.

x est une valeur interdite pour $\frac{2x-1}{4x+1}$ lorsque : $4x+1=0$

$4x=-1$

$x=\frac{-1}{4}$

$\mathcal{S}=\left\{\frac{-1}{4}\right\}$

• Le nb $\frac{-1}{4}$ est la valeur interdite pour ce quotient !

• Le calcul de l'expression $\frac{2x-1}{4x+1}$ est licite pour the valeur de $x \neq \frac{-1}{4}$.

***Propriété* (appelée propriété du quotient nul).**

Soit $A(x)$ et $B(x)$ des expressions où x désigne la variable.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \text{ équivaut à dire que : } [\ A(x) = 0 \ \ \underline{\text{et}}\ \ B(x) \neq 0\ ].$$

En français, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et que son dénominateur n'est pas nul, ce qui assure l'existence du quotient.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2x-5}{x+1} = 0$; *b)* $\frac{3x}{x-1} + 2 = 0$; *c)* $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$

a) $\frac{2x-5}{x+1}=0$ > quotient nul

équivaut à : $2x-5=0$ et $x+1\neq 0$

$2x=5$ | $x\neq -1$

$x=\frac{5}{2}=2{,}5$

(-1 est valeur interdite pr le quotient)

Or $2{,}5\neq -1$ donc $\mathcal{S}=\{2{,}5\}$

c) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$

Ce qui équivaut à : $x^2-1=0$ et $x+1\neq 0$

$(x+1)(x-1)=0$ et $x\neq -1$

Ce qui équivaut à : $x+1=0$ ou $x-1=0$ et $x\neq -1$

$x=-1$ $x=1$ et $x\neq -1$

Ici on exclut la valeur $x=-1$ car c'est la valeur interdite !

$\mathcal{S}=\{1\}$

b) $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{1}=0$

$\frac{3x}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}=0$

$\frac{3x+2(x-1)}{x-1}=0$

$\frac{3x+2x-2}{x-1}=0$

$\frac{5x-2}{x-1}=0$ équation quotient nul !

Ce qui équivaut à : $5x-2=0$ et $x-1\neq 0$

$5x=2$ | $\underbrace{x\neq 1}$

$x=\frac{2}{5}=0{,}4$

1 est la v

Or $0{,}4\neq 1$, donc $\mathcal{S}=\{0{,}4\}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$, de deux façons différents, l' équation suivante :

$$\frac{4x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$ → voir sous remarque

Moralité : toujours se ramener à ce que l'on sait faire !

Remarque **: La technique des** produits en croix**…… reste valable, mais il faut au préalable chercher les valeurs interdites pour les quotients, et exclure éventuellement toute solution de l'équation qui serait une valeur interdite.**

M_1 : On va se ramener à une équation de type quotient nul :

$$\frac{4x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{4x-3}{4x+1} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{2(4x-3)}{2(x+1)} - \frac{3(x+1)}{2(x+1)} = 0$$

$$\frac{2(4x-3)-3(x+1)}{2(x+1)} = 0$$

$$\frac{8x-6-3x-3}{2(x+1)} = 0$$

$$\frac{5x-9}{2(x+1)} = 0$$ ceci est une équation produit nul.

ce qui équivaut à : $2(x+1) \neq 0$ et $5x-9=0$

$x+1 \neq 0$ $\quad$ $5x = 9$

$x \neq -1$ $\quad$ $x = \frac{9}{5}$

Or, $\frac{9}{5} \neq -1$, donc $S = \left\{\frac{9}{5}\right\}$

M_2 : Méthode des produits en croix :

$$\frac{4x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

équivaut à : $2(4x-3) = 3(x+1)$ et $x+1 \neq 0$

$8x-6 = 3x+3$ et $x \neq -1$

$5x-6 = 3$ et $x \neq -1$

$5x = 9$ et $x \neq -1$

$x = \frac{9}{5}$ et $x \neq -1$

Or $\frac{9}{5} \neq -1$.

Donc : $S = \left\{\frac{9}{5}\right\}$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$$

Ce qui équivaut à : $(x+1)^2 = (x-1)(x+2)$ et $x-1 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$

$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{2x} - x - 2$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$1 = -x - 2$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$x = -2 - 1$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$x = -3$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

Exercice 13

⚠ le m̃ mb ⚠

Est-il possible, en ajoutant au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{9}$, d'obtenir comme résultat la fraction $\frac{25}{26}$? Justifier.

Choix de l'inconnue : soit x le mb qu'on ajoute au numérateur et dénominateur.

mise en équation : $\frac{5+x}{9+x} = \frac{25}{26}$

ce qui équivaut à : $26(5+x) = 25(9+x)$ et $9+x \neq 0$

$130 + 26x = 225 + 25x$ et $x \neq -9$

$130 + x = 225$ et $x \neq -9$

$x = 225 - 130$ et $x \neq -9$

$x = 95$

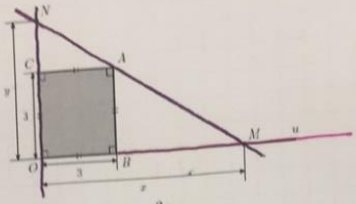
Or, $95 \neq -9$ donc $S = \{95\}$

Il faut donc ajouter 95 au numérateur et au dénominateur pr transformer $\frac{5}{9}$ en $\frac{25}{26}$.

Exercice 14

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, $OBAC$ est un carré de côté 3, M un point mobile sur la demi-droite $[Bu)$ et distinct de B, et N le point d'intersection des droites (AM) et (OC).

distinct = différent



1. On pose $OM = x$ et $ON = y$. Montrer que $y = \dfrac{3x}{x-3}$.
2. Est-il possible que le triangle OMN soit isocèle ?
   Si oui, préciser dans quel(s) cas.

M_2 : $A(\text{gros}) = \dfrac{xy}{2} = 9 + \dfrac{(x-3)\times 3}{2} + \dfrac{3(y-3)}{2}$

1. Comme OBAC est un carré, on a :

$(AB) \parallel (OC)$.

Or $N \in (OC)$, donc $(AB) \parallel (ON)$

On se place dans les triangles : MBA et MON :

d'après le th. de Thalès on a :

$\dfrac{MA}{MN} = \dfrac{MB}{MO} = \dfrac{AB}{ON}$ avec : $MB = x-3$
$MO = x$
$AB = 3$
$ON = y$

Donc : $\dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3}{y}$

Par la technique des produits en croix :

$(x-3)\times y = 3x$

Donc : $y = \dfrac{3x}{x-3}$ car $x \neq 3$.

2. OMN est rectangle en O.
Donc OMN est isocèle si et seulement si : $OM = ON$

c.à.d : $x = \dfrac{3x}{x-3}$ (q.1)

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{3x}{x-3}$

$x(x-3) = 3x$ (car $x \neq 3$)

$x^2 - 3x = 3x$

$x^2 - 3x - 3x = 0$

$x^2 - 6x = 0$

suite : $x^2 - 6x = 0$
$x(x-6) = 0$

qui équivaut à : $x = 0$ ou $x - 6 = 0$
$x = 6$

$\mathcal{S} = \{0 ; 6\}$ Or $x \neq 0$ car $OM \neq 0$ car M et O sont distincts

Le triangle OMN est isocèle si et seulement si OM = 6 cm.

IV- Egalité de deux expressions algébriques

Nous allons voir, sur deux exemples différents, des méthodes permettant de prouver efficacement l'égalité entre deux expressions algébriques.

Si A = C
Si B = C
alors : A = B

Exemple 1

Démontrer que $\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}_{G} = \underbrace{4\times\frac{2}{3}-3}_{D}$

Calculons $G = \frac{1}{6}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}-\frac{3}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

et $D = 4\times\frac{2}{3}-3 = \frac{8}{3}-\frac{3}{1} = \frac{8}{3}-\frac{9}{3} = \frac{-1}{3}$

Ainsi on a : $G = D = \frac{-1}{3}$

Donc $\frac{1}{6}-\frac{1}{2} = 4\times\frac{2}{3}-3$

Méthode 1 On calcule separément la valeur du membre de gauche et celle du membre de droite, et on obtient la m̂ valeur

En maths : Si A = C, B = C, alors A = B (2 nbs égaux à un m̂ 3°, sont égaux).

Exemple 2

Démontrer que pour tout réel x, $x^2+8x+5 = (x+4)^2-11$.

Ici développons : $(x+4)^2-11$

$= x^2+8x+16-11$ id. r. 1

Donc : $= x^2+8x+5$ cqfd.

Pour tt réel x : $x^2+8x+5 = (x+4)^2-11$.

Méthode 2 On transforme 1 des 2 membres (ici celui de droite) jusqu'à obtenir le membre de gauche.

* On développe // on factorise // on réduit à 1 m̂ dénominateur.

Exercice 15

Démontrer, que pour tout réel x différent de -1, on a : $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

On a : $2 + \frac{1}{x+1} \overset{\text{réduct° à 1 m dénominateur}}{=} \frac{2}{1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$

Donc pour tt réel $x \neq -1$, $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

Exercice 16

F. développée

On pose : $f(x) = x^2+x-12$ pour tout nombre réel x.

1) Démontrer que $f(x) = (x-3)(x+4)$ → f. factorisée

2) Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = -12$

1) Pour tt réel x, $f(x) = x^2 + x - 12$

ici uniquement

Développons pour tt réel x : $(x-3)(x+4) = x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2 + x - 12 = f(x)$

Donc pour tt réel : $f(x) = (x-3)(x+4)$

2) a) $f(x) = 0$

Ici, on utilise la forme factorisée de $f(x)$

$f(x) = 0$ s'écrit : $(x-3)(x+4) = 0$

ce qui équivaut à : $x-3=0$ ou $x+4=0$

$x = 3$ ou $x = -4$

$$\mathcal{S} = \{-4 ; 3\}$$

b) $f(x) = x^2$

Ici, on utilise la forme développée de $f(x)$

$f(x) = x^2$ s'écrit : $x^2 + x - 12 = x^2$

$x - 12 = 0$

$x = 12$

$$\mathcal{S} = \{12\}$$

c) $f(x) = -12$

$$x^2 + x - 12 = -12$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x+1) = 0$$

ce qui équivaut à : $x = 0$ ou $x + 1 = 0$
$x = 0$ ou $x = -1$

$$S = \{0 ; -1\}$$

Exercice 17

1) Etablir que pour tout réels a et b, on a l'identité suivante : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

2) En déduire une factorisation de $x^3 - 8$.

1) Développons : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

Ainsi pr tt réel a et b : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) $8 = 2^3$

Donc : $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 2^2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$