

**Chapitre 2****Les équations****I- Rappels sur les égalités**

Une égalité est une entité contenant le **signe égal** qui est noté  $=$  !

Une égalité est soit vraie (ou vérifiée) soit fausse !

Par exemple, l'égalité  $a = 2$  n'est vraie que si l'on donne au réel  $a$  la valeur 2.

L'égalité  $x^2 = 2x$  est fausse lorsque  $x = 5$  car : .....

Rappelons des règles sur les égalités, qui seront à la base de la résolution des équations :

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ **Règles fondamentales sur les égalités** ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels quelconques.

i) On peut **ajouter** à **chacun des deux membres** d'une égalité le **même nombre**, on obtient une égalité équivalente, c'est-à-dire de même nature (vraie ou fausse).

$a = b$  équivaut à ....., ce que l'on notera : .....

💡 Le symbole  $\Leftrightarrow$  n'a pas la même signification que le signe  $=$  ! Ne pas confondre les deux.

On pourra mettre le symbole  $\Leftrightarrow$  entre deux égalités de même nature.

ii) On peut **soustraire** à **chacun des deux membres** d'une égalité le **même nombre** :

$a = b$  équivaut à ....., ce que l'on notera :

iii) On peut **multiplier** (respectivement **diviser**) **chacun des deux membres** d'une égalité par **le même nombre NON NUL**, c'est-à-dire différent de 0 !

Pour tout réel  $d$  non nul,  $a = b$  équivaut à ....., ce que l'on notera : .....

Pour tout réel  $d$  non nul,  $a = b$  équivaut à ....., ce que l'on notera.....

Grâce à ces règles, on va facilement réussir à isoler une variable, ce que l'on fait classiquement en résolvant des équations.

**Exercice 1** En utilisant les règles sur les égalités, isoler dans chacune des expressions suivantes la variable demandée :

1) Isoler  $a$  dans l'expression :  $a + 7 = 2,5$

2) Isoler  $b$  dans l'expression :  $3b = 5$ .

3) Isoler  $c$  dans l'expression :  $3c + 5 = c + 11$ .

Pour les exemples suivants, toutes les variables sont différentes de zéro (non nulles).

4)  $d = Vt$  : isoler  $t$     5)  $V = xyz$  : isoler  $y$     6)  $PV = nRT$  : isoler  $R$ .

7)  $S = \pi R^2 H$  : isoler  $R$  sachant que  $S$ ,  $R$  et  $H$  sont positives.    8)  $ax + by = c$  : isoler  $y$ .

✂-----

## II- Les équations du premier degré à une inconnue

Voici quelques équations simples rencontrées au collège :  $3x + 1 = 4$  ou encore :  $2x - 5 = x + 4$ .

### Définitions

Une équation d'inconnue  $x$  est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de  $x$ , et fausse pour d'autres.

**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  une équation d'inconnue  $x$ , c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles l'égalité de l'énoncé est vraie.**

Ces éventuels nombres forment l'ensemble des solutions de l'équation.

Deux **équations** sont **équivalentes** lorsqu'elles ont **même ensemble de solution**.

**Méthode de résolution** : Pour résoudre une équation, on raisonne par équivalence, c'est-à-dire qu'on transforme, à l'aide des règles sur les égalités vues précédemment, l'équation initiale en une équation plus simple qui a le même ensemble de solution que l'équation initiale, dans **le but de se ramener à une équation triviale de la forme :  $x = \dots$**

Lorsqu'on a abouti à cette dernière écriture, on a résolu l'équation initiale, il ne reste plus qu'à conclure, en mentionnant l'ensemble des solutions de l'équation, que l'on notera :  $\mathcal{S} =$

**On retiendra donc que lorsqu'on demande de résoudre une équation, il faut isoler, si cela est possible, l'inconnue.**

### Exercice 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  chacune des équations suivantes :

a)  $2x - 7 = 0$       b)  $3x + 4 = 11$       c)  $2x = 11$       d)  $\frac{x}{3} - 5 = 2$       e)  $4x + 1 = 2x + 7$

f)  $5(2x - 1) = 6 - (2x - 1)$       g)  $2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$       h)  $3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$ .

✂-----

Les équations sont un outil puissant pour résoudre des problèmes en mathématiques !

### Exercice 3

Si on augmente la longueur de chacun des côtés d'un carré de 3 mètres, son aire augmente de  $45,6 \text{ m}^2$ . Quelle est la longueur des côtés du carré initial ? Justifier.

✂-----

### Exercice 4

Un groupe d'amis va déjeuner dans un bistrot. Chacun choisit la formule du jour à 18,90 €.

Au moment de payer, deux personnes ont oublié leur portefeuille : les autres doivent alors payer 2,70€ de plus chacun pour régler la note.

Combien y avait-il d'amis dans ce groupe lors de ce déjeuner ?

✂-----

**Exercice 5**

Trouver deux entiers consécutifs dont la différence des carrés est égale à 527.

✂-----

**III- D'autres types d'équations****A- Equation avec fractions**

Nous allons faire quelques rappels sur les fractions au préalable :

**Révisions : règles et opérations algébriques sur les fractions**

👉 **Fondamental et d'usage fréquent tout au long de l'année !**

*Pour tout entier  $a$ , et tout entier  $b, c$  et  $k$  non nuls on a les règles suivantes concernant le calcul fractionnaire :*

$$i) \quad \boxed{\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}} \quad ii) \quad \boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}} \quad iii) \quad \boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$$

En français :

*i) Règle d'invariance des fractions :*

*On ne change pas la valeur d'une fraction en ..... son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul.*

*ii) et iii) Pour additionner (respectivement soustraire) deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner (respectivement soustraire les numérateurs entre eux, et de conserver le même dénominateur).*

**1. Addition de fractions**

Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de les réduire à un même dénominateur, appelé dénominateur commun. On utilise ensuite les règles ii) et iii) après s'être ramené à un même dénominateur, vu que les deux fractions ont alors le même dénominateur !

Comme dénominateur commun, on prend fréquemment le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, et on utilise la règle i) rappelée en amont.

Exemple : Exprimer, sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \qquad \frac{15}{8} - \frac{11}{12} =$$

$$\frac{8}{3} + \frac{7}{18} - \frac{4}{9} =$$

$$\frac{1}{209} - \frac{1}{210} =$$

Dans le dernier exemple, et **en dernier recours**, on pourra ***toujours*** choisir comme dénominateur commun le .....

## 2. Multiplication de fractions

Règle : pour multiplier deux fractions, on multiplie respectivement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous entiers  $a, b, c$  et  $d$ , avec  $b$  et  $d$  non nuls,  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$  En particulier :  $a \times \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$

On essaiera, avant de se lancer dans les multiplications, de trouver si on peut simplifier, c'est-à-dire en divisant par un diviseur commun, un numérateur et un dénominateur.

### Exemples

Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{7}{6} \times \frac{4}{9} =$$

$$-\frac{7}{4} \times \frac{5}{-8} \times 6 =$$

## 3. Division de fractions

Rappel : soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls.

L'inverse de la fraction  $\frac{a}{b}$  est la fraction qui multipliée par  $\frac{a}{b}$  donne 1 comme produit :

L'inverse de  $\frac{a}{b}$  est donc égal à .....

Règle : pour tous entiers  $a, b, c$  et  $d$  non nuls :  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \dots\dots\dots$

Ce qui se note encore :  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \dots\dots\dots$

Le trait de la division effectuée (= division principale) est de taille plus grande que celui de chacune des fractions, et doit toujours être situé au même niveau que le signe = !

**Pour diviser une première fraction par une seconde, il suffit donc de multiplier la première fraction par ..... de la seconde fraction.**

Ainsi, la division n'est rien d'autre qu'une multiplication !

### Exemples

Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\frac{17}{25} \div \frac{34}{27} =$$

$$\frac{\frac{13}{3}}{\frac{26}{9}} =$$

#### 4. Règles de priorité entre opérations

Rappelons **qu'en l'absence de parenthèses, la Multiplication est prioritaire sur l'Addition** : on effectue d'abord Les multiplications, et ensuite les additions.

##### Exemples

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} =$$

$$2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} =$$

**En présence de parenthèses, on effectue prioritairement les opérations situées à l'intérieur de ces dernières**, en respectant la précédente règle une fois à l'intérieur de ces dernières !

##### Exemples

Calculer sous forme de fraction irréductible :

$$\left(-\frac{7}{6} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{4} =$$

*Terminons les rappels par une règle fondamentale en mathématiques, la règle des produits en croix, qui dit que **deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux**.*

#### ♥♥♥ Règle des produits en croix ♥♥♥

Pour tous entiers  $a, b, c$  et  $d$ , avec  $b$  et  $d$  non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si et seulement si (= équivaut à dire que) } \dots\dots\dots$$

Remarque : d'où vient ce terme étrange "produits en croix" ?

Preuve de la propriété des produits en croix :

**Exercice 6**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$a) \frac{2x}{3} = \frac{3}{7} \quad b) \frac{x-3}{5} = \frac{1-5x}{3} \quad c) \frac{x}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{5} \quad d) \frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$$

✂-----

**Exercice 7** (introduction au raisonnement par l'absurde).

Les fractions :  $\frac{109}{108}$  et  $\frac{107}{106}$  sont-elles égales ? Justifier.

✂-----

**B- Equations produit nul****Rappel important : le théorème du produit nul**

$A(x) \times B(x) = 0$  où  $A(x)$  et  $B(x)$  sont des expressions équivalent à :  $A(x) = 0$  ou  $B(x) = 0$ .

En français, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $(2x+5)(-3x+7) = 0$  ;  $(2x+5)+(-3x+7) = 0$ .

$$(3x+1)^2 - 4(3x+1) = 0 \quad ; \quad 4(x-3)(x+2) - (x^2-9) = 0$$

✂-----

**Exercice 8**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(2x-5)^2 = 36$ .

**Méthode :** Lorsqu'on doit résoudre une équation où figurent des  $x^2$  (*non simplifiables*), on procédera, à ce stade de l'année, en deux étapes :

Etape 1.....

Etape 2.....

**C- Equations quotient nul**

Rappelons que la division par 0 n'existe pas !

**Définition**

Soit  $A(x)$  et  $B(x)$  deux expressions algébriques.

Pour que l'écriture fractionnaire  $\frac{A(x)}{B(x)}$  soit calculable il faut que son dénominateur  $B(x)$  soit différent de 0.

Toute valeur  $x$  telle que  $B(x) = 0$  est appelée une ..... pour l'écriture fractionnaire  $\frac{A(x)}{B(x)}$ .

✎ **En mathématiques, dès qu'on est en présence d'un dénominateur, il faudra toujours se poser la question : ce dernier est-il différent de 0 ?**

### Exemple

Déterminer la valeur interdite de l'expression  $\frac{2x-1}{4x+1}$ , puis toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles il est licite de calculer cette expression.

**Propriété (appelée propriété du quotient nul).**

Soit  $A(x)$  et  $B(x)$  des expressions, où  $x$  désigne la variable.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \text{ équivaut à dire que : } [A(x) \text{ .... et } B(x) \text{ .....}].$$

En français, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est ..... et que son dénominateur n'est pas ....., ce qui assure l'existence du quotient.

### **Exercice 9**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\frac{2x-5}{x+1} = 0$

b)  $\frac{3x}{x-1} + 2 = 0$

✂-----

### **Exercice 10**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , à l'aide de la technique des produits en croix l'équation suivante :

$$\frac{4x-3}{x+2} = \frac{3}{2}$$

✂-----

**Moralité** : toujours se ramener à ce que l'on sait faire !

### **Exercice 11**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$

✂-----

**Exercice 12**

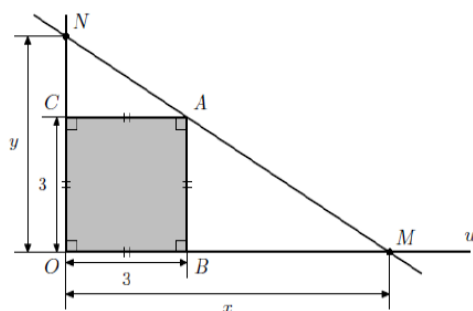
Est-il possible, en ajoutant le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction  $\frac{5}{9}$ , d'obtenir comme résultat la fraction  $\frac{25}{26}$  ? Justifier.

✂

**Exercice 13**

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous,  $OBAC$  est un carré de côté 3,  $M$  un point mobile sur la demi-droite  $[Bu)$  et distinct de  $B$ , et  $N$  le point d'intersection des droites  $(AM)$  et  $(OC)$ .



1. On pose  $OM = x$  et  $ON = y$ . Montrer que  $y = \frac{3x}{x-3}$ .
2. Est-il possible que le triangle  $OMN$  soit isocèle ?  
Si oui, préciser dans quel(s) cas.

✂

**IV- Égalité de deux expressions algébriques**

Nous allons voir, sur deux exemples différents, des méthodes permettant de prouver efficacement l'égalité entre deux expressions algébriques.

**Exemple 1**

Démontrer que  $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{3} - 3$

**Méthode 1****Exemple 2**

Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - 11$ .

Méthode 2**Exercice 14**

Démontrer, que pour tout réel  $x$  différent de  $-1$ , on a :  $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

✂-----

**Exercice 15**

On pose :  $f(x) = x^2 + x - 12$  pour tout nombre réel  $x$ .

1) Démontrer que  $f(x) = (x-3)(x+4)$

2) Utiliser la forme la plus adaptée de  $f(x)$  pour résoudre dans  $\mathbb{R}$  chacune des équations suivantes :

a)  $f(x) = 0$

b)  $f(x) = x^2$

c)  $f(x) = -12$

✂-----

**Exercice 16**

1) Etablir que pour tout réels  $a$  et  $b$ , on a l'identité suivante :  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ .

2) En déduire une factorisation de  $x^3 - 8$ .