Chapitre 11 **Fonctions remarquables et fonctions de référence**

I – Quelques fonctions remarquables

A-Fonctions paires, fonctions impaires

Définition

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite symétrique par rapport à 0 ou encore centrée en 0, si pour tout réel x appartenant à D, son opposé $-x$ appartient également à D.

Exemple : L'intervalle [-4 ; 4] est symétrique par rapport à 0.

Par-contre, l'intervalle [-2 ; 3] n'est pas un intervalle symétrique par rapport à 0.

♥♥♥ ***Définition*** (fonction paire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que **f est paire** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D,

et pour tout réel x appartenant à D, ..$f(-x) = f(x)$..

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

f est-elle paire sur [-1 ; 3] ?

2) La fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = x^2 + 2x - 1$ est-elle paire sur $\mathbb{R}$?

1) *) Pr tt réel x, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$.

**) Pr tt réel x : $f(-x) = (-x)^2 = -x \times -x = -1 \times x \times -1 \times x = -1 \times -1 \times x \times x = x^2 = f(x)$.

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

⚠ Sur $[-1 ; 3]$, f n'est pas paire car l'intervalle $[-1 ; 3]$ n'est pas centré en 0 ! $\left(\frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \neq 0\right)$

2) Pr tt réel x, $i(x) = x^2 + 2x - 1$

$i(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

et $i(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$

Par suite, $i(-1) \neq i(1)$ puisque $-2 \neq 2$.

Donc i n'est pas paire sur $\mathbb{R}$.

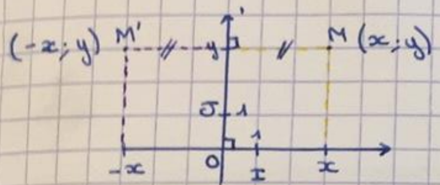
Propriété

Soit f une fonction paire définie sur un ensemble D.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est symétriq par rapport à l'axe des ordonnées.

Réciproquement, si la courbe d'une fonction admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées sur un intervalle D, alors f est une fonction paire.

Justification : Observons d'abord que si $M(x\,;y)$, alors le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est le point M' avec $M'(-x\ ;\ y)$.



Soit f une fonc° paire sur $\mathbb{R}$: Prenons $M(x;y) \in \mathcal{C}_f$ et soit $M'(x';y')$ le symétriq de
par rapport à l'axe des ordonnées.

But : Montrons que $M' \in \mathcal{C}_f$

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f$, donc $y = f(x)$

Donc $M(x; f(x))$

Comme M' est le symétriq de M par rapport à l'axe des y, on a :

$M'(-x; f(x))$

Enfin f est paire sur $\mathbb{R}$, donc $f(-x) = f(x)$

Donc $M'(-x; f(-x))$

Donc $y_{M'} = f(x_{M'})$, donc $M' \in \mathcal{C}_f$

♥♥♥ *Définition* (fonction impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que **f est impaire** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D,
et pour tout réel x appartenant à D, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

f est-elle impaire sur $[-1 ; 3]$?

2) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 4x$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

1) *) Pr tt réel x, $-x \in \mathbb{R}$

**) Pr tt réel x :

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1 \times x)^3 = (-1)^3 \times x^3$$

Donc $f(-x) = -1 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$

Donc f est une fonc° impaire sur $\mathbb{R}$.

Suite : $[-1 ; 3]$ n'est pas centré en 0.

Donc f n'est pas impaire sur $[-1 ; 3]$.

2) *) Pr tt réel x, $-x \in \mathbb{R}$

**) Pr tt réel x :

$$g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$$

Donc g est impaire sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble D.

Dans un repère, la courbe représentative de f est ..symétrique par rapport à l'origine O du repère .

Réciproquement, si la courbe d'une fonction f admet pour centre de symétrie l'origine du repère, alors

f est impaire.

Remarques : il est bon de garder à l'esprit qu'en général, une fonction n'est ni paire ni impaire sur un intervalle.

Si une fonction n'est pas paire sur un intervalle, cela ne signifie pas pour autant qu'elle est impaire sur cet intervalle ! Regardez la fonction i des exemples précédents !

Le vocabulaire est ici malheureux, les termes paire et impaire pour une fonction ne sont pas contraires l'un de l'autre !

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonc° à fois pair et impaire sur $\mathbb{R}$:

Pr tt réel x, $f(-x) = f(x)$ et pr tt réel x, $f(-x) = -f(x)$

Donc $f(x) = -f(x)$

Donc pour tt réel x : $f(x) + f(x) = 0$

$2f(x) = 0$

$f(x) = \frac{0}{2} = 0$

Conclus° : f est donc la fonc° nulle.
La seule fonc° à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$.
C'est la fonc° nulle.

III- Fonctions de références

A) Les fonctions affines

Définition : On appelle fonction affine, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

On rappelle que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite. d'équa° : $y = ax + b$

Propriété fondamentale : **sens de variation des fonctions affines.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
1) Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Illustration et preuve :

1\. $a > 1$ et $f(x) = ax + b$

Montrons que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux réels tels que : $u \leqslant v$. But : Mq $f(u) \leqslant f(v)$

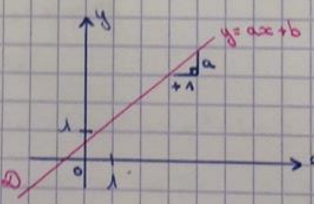
Donc : $a \times u \leqslant a \times v$ (car $a > 0$)

Par suite : $a \times u + b \leqslant a \times v + b$

$f(u) \leqslant f(v)$

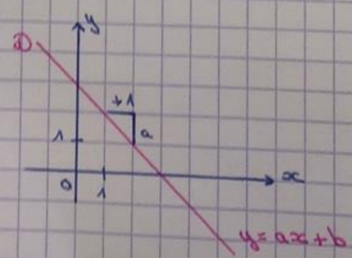
• Par suite f est croissante sur $\mathbb{R}$

Illustra° : $a > 0$

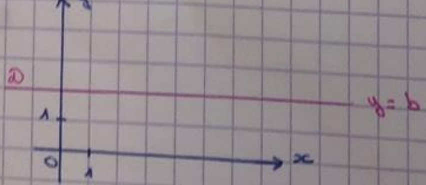


avec $a > 0$.

De m̂ si $a < 0$



Si $a = 0$



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

Etudier son sens de variation, et dresser son tableau de variations.

$f(x) = -2x + 3$

$f(x) = ax + b$ avec $a = -2$
$b = 3$

Or $-2 < 0$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \in [-4 ; 1] \\ -x+2 \text{ si } x \in [1 ; 3] \\ 3x-10 \text{ si } x \in [3 ; 5] \end{cases}$

Construire la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

x	-4	1
$f(x)$	9	1

• $f(x) = 2x - 1$
$f(-4) = 2 \times (-4) - 1 = -9$

$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par les points A$(-4 ; 9)$ et B$(1 ; 1)$

• $f(x) = -x + 2$

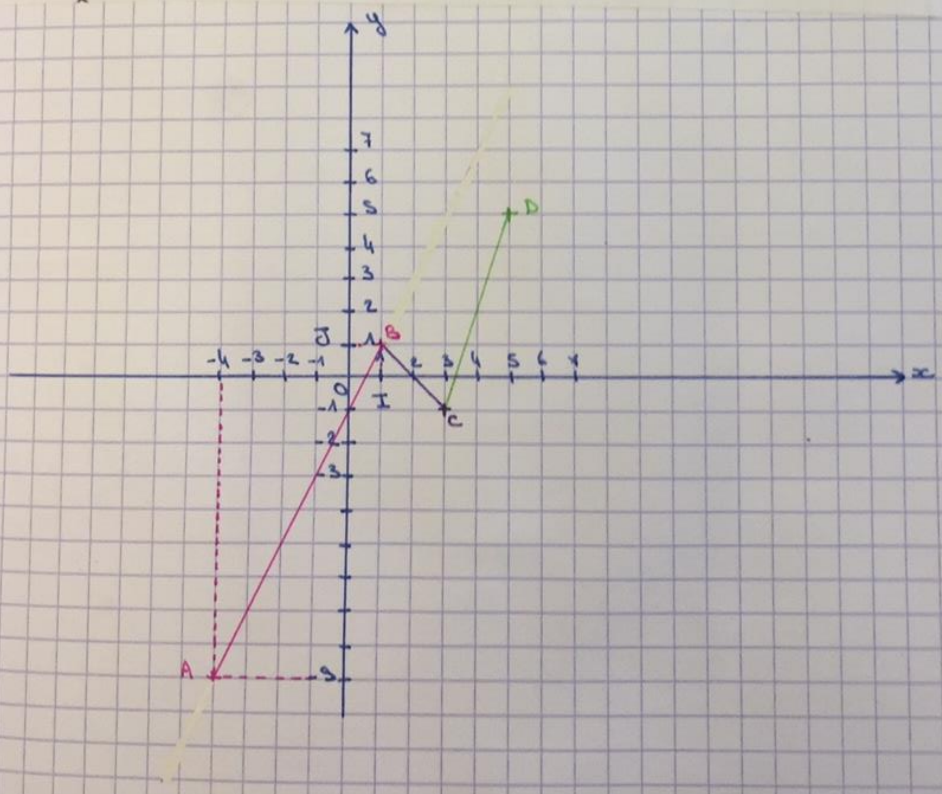
x	1	3
$f(x)$	1	

$f(1) = -1 + 2 = 1$
$f(3) = -3 + 2 = -1$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par B$(1 ; 1)$ et C(

• $f(x) = 3x - 10$ avec $3 \leq x \leq 5$

x	3	5
$f(x)$	-1	5



B) La fonction carrée

Rappel : la fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Nous avons déjà vu que dans un repère orthogonal la courbe représentant f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie car f est paire sur $\mathbb{R}$.

Propriété

♥♥ *La fonction carrée est* **décroissante sur**…$]-\infty\,;0]$…..*et* **croissante sur**…$[0\,;+\infty[$…………♥♥

Preuve : Plaçons-nous sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$: soient a et b deux réels tels que : $a \leq b \leq 0$.

IR3

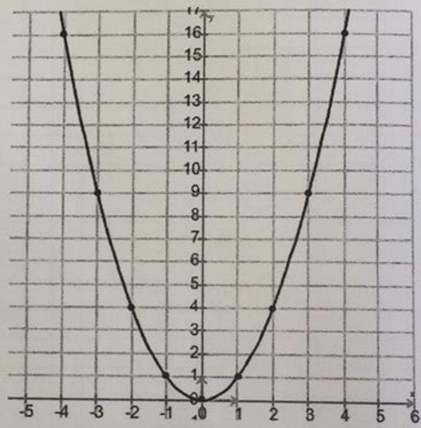
Comparons $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$: or $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, et par donnée, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$ et vu que $a \leq 0$ et $b \leq 0$, $a + b \leq 0$ (somme de deux réels négatifs).

Donc d'après la règle des signes d'un produit, $(a-b)(a+b) \geq 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) \geq 0$, et donc $f(a) \geq f(b)$: ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$: même type de démonstration que vous pouvez faire seul à titre d'exercice !

Bien avoir en tête l'allure de la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗



Remarques : la fonction carrée a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, et on retrouve que pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

1. ***Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.***
2. ***Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse.***

Exercice 3

a, b, c *et* d désignent quatre nombres réels.

Compléter dans chaque cas par l'information la plus précise possible, en justifiant :

1) Si $a \geq 3$, alors a^2..$\geqslant$.3^2…càd $a^2 \geqslant 9$ car $a \geqslant 3$ donc a et 3 positifs, dc a^2 et 3^2 rangés ds le m̂ ordre que a et 3
↳ car $a \geqslant 3$ dc $a^2 \geqslant 3^2$ car la fonc° carrée croît sur $[0;+\infty[$.

2) Si $b \leq -\sqrt{2}$, alors b^2..$\geqslant$.$(-\sqrt{2})^2$ càd $b^2 \geqslant 2$ (d'après 2.)

3) Si $-5 \leq c \leq -2{,}5$ alors $(-5)^2 \geqslant c^2 \geqslant (-2{,}5)^2$… càd $25 \geqslant c^2 \geqslant 6{,}25$ ou $6{,}25 \leqslant c^2 \leqslant 25$.

4) Si $-3 \leq d \leq 2$, alors ..0… $\leqslant$.d^2..$\leqslant$.9…… ⚠ la fonc° carrée n'est pas monotone sur $[-3;2]$!

Dire que $-3 \leqslant d \leqslant 2$ signifie que : $-3 \leqslant d \leqslant 0$ ou $0 < d \leqslant 2$
et donc : $(-3)^2 \geqslant d^2 \geqslant 0^2$ | $0^2 < d^2 \leqslant 2^2$
$9 \geqslant d^2 \geqslant 0$
$0 \leqslant d^2 \leqslant 9$ ou $0 < d^2 \leqslant 4$ Donc $0 \leqslant d^2 \leqslant 9$.

Propriété

> Soit k un nombre réel.
>
> Considérons l'équation : $x^2 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.
>
> *Si* $k < 0$, alors cette équation n'a pas de solu° ; $\mathcal{S} = \emptyset$
>
> *Si* $k = 0$, alors cette équation a pour unique solution le nb 0 ; $\mathcal{S} = \{0\}$
>
> *Si* $k > 0$, alors cette équation a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$; $\mathcal{S} = \{-\sqrt{k} ; \sqrt{k}\}$
>
> Enfin, lorsque $k > 0$, l'inéquation : $x^2 < k$ admet pour solutions $]-\sqrt{k} ; \sqrt{k}[$; $\mathcal{S} =]-\sqrt{k} ; \sqrt{k}[$

Remarque : cela doit facilement se retrouver mentalement en visionnant la courbe représentative de la fonction carrée !!

Exercice 4

Résoudre mentalement les équations et inéquations suivantes d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = 3$ *b)* $x^2 = -6$ *c)* $x^2 = 12$ *d)* $x^2 < 25$ *e)* $x^2 \geq 36$ *f)* $2x^2+3=165$

a) $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

b) $\mathcal{S} = \emptyset$

c) $x = -\sqrt{12}$ ou $x = \sqrt{12}$

$x = -2\sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$

$\mathcal{S} = \{-2\sqrt{3} ; 2\sqrt{3}\}$

d) $x \in]-\sqrt{25} ; \sqrt{25}[$

$x \in]-5 ; 5[$

$\mathcal{S} =]-5 ; 5[$

e) $x^2 \geq 36$ lorsque : $x \leq -6$ ou $x \geq 6$

$\mathcal{S} =]-\infty ; -6] \cup [6 ; +\infty[$.

f)

Complément : équations du second degré moins triviales

Lemme ***: pour tous réels x et a :*** $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ ***et*** $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$

1. 2.

Preuve :

1. Développons naïvement : $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = x^2 + 2x \times \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = x^2 + ax$

IR1

Donc $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$.

Exemple ***: transformer comme dans le lemme :*** $x^2 + 4x$; $x^2 - x$

$x^2 + 4x = x^2 + ax$ avec $a =$

Avec le lemme : $x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \frac{4^2}{4}$

$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$

Méthode 2 : $x^2 + 4x = \underbrace{x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2}_{IR1} - 2^2$

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$$

$x^2 - x = \underbrace{x^2 - 2\times x\times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{IR1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x^2 - x = (x + 0,5)^2 - \frac{1}{4}$

Application : *utiliser cette technique pour résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $5x^2 + 3x - 4 = x^2 - x + 2$.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = 0$

$(x+2)^2 - 4 + 3 = 0$

$(x+2)^2 - 1 = 0$

$(x+2)^2 - 1^2 = 0$

$(x+2+1)(x+2-1) = 0$ IR3

$(x+3)(x+1) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$

$x = -3$ ou $x = -1$

$S = \{-3 ; -1\}$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

$x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Or $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

Donc pas de solu° !

$S = \varnothing$

c) $5x^2 + 3x - 4 = x^2 - x + 2$

$5x^2 + 3x - 4 - x^2 + x - 2 = 0$

$4x^2 + 4x - 6 = 0$ voir remarque suivante

$4\left(x^2 + x - \frac{6}{4}\right) = 0$ on factorise alors par 4 (coeff multiplicateur des x^2)

$x^2 + x - \frac{6}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$x^2 + x - 1,5 = 0$

$x^2 + 2\times x\times 0,5 - 1,5 = 0$

$x^2 + 2\times x\times 0,5 + 0,5^2 - 0,5^2 - 1,5 = 0$

$(x+0,5)^2 - 0,5^2 - 1,5 = 0$

$(x+0,5)^2 - 0,25 - 1,5 = 0$

$(x+0,5)^2 - 1,75 = 0$

$(x+0,5)^2 - \sqrt{1,75}^2 = 0$

$(x + 0,5 + \sqrt{1,75})(x + 0,5 - \sqrt{1,75})$ IR3

$x + 0,5 + \sqrt{1,75} = 0$ ou $x + 0,5 - \sqrt{1,75} = 0$

$x = -0,5 - \sqrt{1,75}$ ou $x = -0,5 + \sqrt{1,75}$

$S = \{-0,5 - \sqrt{1,75} ; -0,5 + \sqrt{1,75}\}$

Remarque : *avec cette technique, vous pouvez résoudre toutes les équations du second degré de la forme :* $x^2 + bx + c = 0$ *où b et c sont des réels.*

En se ramenant à un coefficient des x^2 *égal à 1 au préalable, vous pouvez même résoudre toutes les équations du second degré de la forme :* $ax^2 + bx + c = 0$*, en commençant par factoriser par a !*

Exemple *: résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 5x + 3 = 0$.*

$x^2 + 5x + 3 = 0$

$x^2 + 2 \times 2{,}5 \times x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 + 3 = 0$

$(x + 2{,}5)^2 - 2{,}5^2 + 3 = 0$

$(x + 2{,}5)^2 - 6{,}25 + 3 = 0$

$(x + 2{,}5)^2 - 3{,}25 = 0$

$(x + 2{,}5)^2 - \sqrt{3{,}25}^2 = 0$

$(x + 2{,}5 + \sqrt{3{,}25})(x + 2{,}5 - \sqrt{3{,}25})$

$x + 2{,}5 + \sqrt{3{,}25} = 0$ ou $x + 2{,}5 - \sqrt{3{,}25} = 0$

$x = -2{,}5 - \sqrt{3{,}25}$ ou $x = -2{,}5 + \sqrt{3{,}25}$

$\mathcal{S} = \{-2{,}5 - \sqrt{3{,}25} ; -2{,}5 + \sqrt{3{,}25}\}$

C) La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

Elle ne prend que des valeurs positives ou nulles.

Propriété

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

Preuve : Soient a et b deux réels tels que : $0 \leqslant a \leqslant b$: on sait que $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$.

Ainsi, $0 \leqslant a \leqslant b$ *s'écrit encore sous la forme :* $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$.

Or, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ou nuls, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (par croissance de la fonction carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$).

Par suite on a : $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ et la fonction racine carrée croit sur $[0\ ;\ +\infty[$.

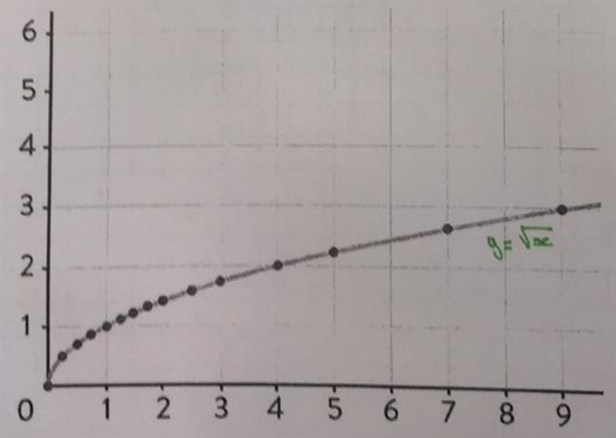
On retiendra donc que : ♥♥ $\boxed{0 \leqslant a \leqslant b \text{ équivaut à } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}}$

En effet : si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Réciproquement, si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors comme les nombres $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$ sont positifs, et que la fonction carrée croît sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$ c'est-à-dire: $(0 \leqslant)\ a \leqslant b$.

x	$f(x)=\sqrt{x}$ à 0,1 près.
0	0
0.25	0.5
0.5	0.7
0.75	0.9
1	1
1.25	1.1
1.5	1.2
1.75	1.3
2	1.4
2.5	1.6
3	1.7
4	2
5	2.2
7	2.6
9	3

Courbe représentative de la fonction racine carrée :



$\mathcal{C}_g$ où $g(x) = \sqrt{x}$

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$; b) $\sqrt{x} - 4 \geq 0$; c) $\sqrt{x} = -1$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leq 1$; e) $\sqrt{x} \geq -1$; f) $\dfrac{7}{\sqrt{x}} = 5$.

a) $\sqrt{x} = 5{,}1$ avec $x \geqslant 0$

Donc $(\sqrt{x})^2 = (5{,}1)^2$

$x = 26{,}01$

$\mathcal{S} = \{26{,}01\}$

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$

b) $\sqrt{x} - 4 \geqslant 0$

$\sqrt{x} \geqslant 4 \quad (>0)$

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant 4^2$ car la fonc° carrée croît sur $[0 ; +\infty[$.

Donc : $x \geqslant 16$

$\mathcal{S} = [16 ; +\infty[$.

c) $\sqrt{x} = -1$

! $-1 < 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$

Donc pas de solu°

$\mathcal{S} = \emptyset$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leqslant 1$

$-4\sqrt{x} \leqslant 1 - 3$

$-4\sqrt{x} \leqslant -2$

$\sqrt{x} \geqslant \dfrac{-2}{-4}$ (car $-4 < 0$)

$\sqrt{x} \geqslant 0{,}5 \quad (>0)$

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ (car 2 nb + st rangés ds le m̂ ordre que leurs carrés)

$x \geqslant \dfrac{1}{4}$

$\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$.

e) $\sqrt{x} \geqslant -1$

Pr ∀ réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $0 \geqslant -1$, donc $\sqrt{x} \geqslant -1$.

Donc $\mathcal{S} = [0 ; +\infty[$

f) $\dfrac{7}{\sqrt{x}} = 5$

Donc $\dfrac{7}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x} = 5 \times \sqrt{x}$ et $x > 0$

$7 = 5 \times \sqrt{x}$

Donc $\sqrt{x} = \dfrac{7}{5}$

Donc $(\sqrt{x})^2 = \left(\dfrac{7}{5}\right)^2$

$x = \dfrac{49}{25}$

$\mathcal{S} = \{49$

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$; b) $\sqrt{x} - 4 \geq 0$; c) $\sqrt{x} = -1$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leq 1$; e) $\sqrt{x} \geq -1$; f) $\dfrac{7}{\sqrt{x}} = 5$.

a) $\sqrt{x} = 5{,}1$ avec $x \geqslant 0$

Donc $(\sqrt{x})^2 = (5{,}1)^2$

$x = 26{,}01$

$S = \{26{,}01\}$

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$

b) $\sqrt{x} - 4 \geqslant 0$

$\sqrt{x} \geqslant 4$ (>0)

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant 4^2$ car la fonc° carrée croît sur $[0; +\infty]$.

Donc : $x \geqslant 16$

$S = [16; +\infty[$.

c) $\sqrt{x} = -1$

(!) $-1 < 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$

Donc pas de solu°

$S = \emptyset$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leqslant 1$

$-4\sqrt{x} \leqslant 1 - 3$

$-4\sqrt{x} \leqslant -2$

$\sqrt{x} \geqslant \dfrac{-2}{-4}$ (car $-4 < 0$)

$\sqrt{x} \geqslant 0{,}5$ (>0)

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ (car 2 nb + st rangés ds le m̂ ordre que leurs carrées)

$x \geqslant \dfrac{1}{4}$

$S = \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$.

e) $\sqrt{x} \geqslant -1$

Pr tt réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $0 \geqslant -1$, donc $\sqrt{x} \geqslant -1$.

Donc $S = [0; +\infty[$

f) $\dfrac{7}{\sqrt{x}} = 5$

Donc $\dfrac{7}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x} = 5 \times \sqrt{x}$ et $x > 0$

$7 = 5 \times \sqrt{x}$

Donc $\sqrt{x} = \dfrac{7}{5}$

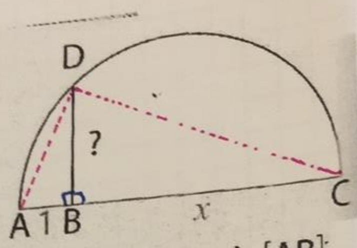
Donc $(\sqrt{x})^2 = \left(\dfrac{7}{5}\right)^2$

$x = \dfrac{49}{25}$

$S = \left\{\dfrac{49}{25}\right\}$

Exercice 6

A, B et C sont trois points alignés tels que $AB = 1$ et $BC = x$.
Le point D appartient à un demi-cercle de diamètre [AC] et le segment [BD] est perpendiculaire à [AB].
Exprimer la longueur BD en fonction de x.



• On applique le théorème de Pythagore au triangle ABD rectangle en B :

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

$AD^2 = 1 + BD^2$ ①

• De m̂, ds le triangle BDC rectangle en B :

$DC^2 = BD^2 + BC^2$

$DC^2 = x^2 + BD^2$ ②

• Enfin, ADC est inscrit ds le cercle de diamètre AC, donc ADC est un triang[le] rectangle en D.

D'après le th. de Pythagore, on a donc :

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$(x+1)^2 = AD^2 + DC^2$ ③

$\downarrow 1. \qquad \downarrow 2.$

$(x+1)^2 = 1 + BD^2 + x^2 + BD^2$

Donc $\cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} = \cancel{1} + \cancel{x^2} + 2BD^2$

$2x = 2BD^2$

$BD^2 = x$

Donc c̄ $BD \geqslant 0$, on a : $BD = \sqrt{x}$

Exercice 7

Sans calculatrice, comparer les réels : $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ et $b = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

$5 > 3$ $(\geqslant 0)$

Donc $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ car la fonc° racine carrée croît sur $[0;+\infty[$.

Donc $\sqrt{5}-1 > \sqrt{3}-1$. (>0)

Donc $\sqrt{\sqrt{5}-1} > \sqrt{\sqrt{3}-1}$ par croissance de la fonc° $\sqrt{3}$ sur $[0;+\infty[$

$a > b$

Exercice 8

Etudier, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $\underbrace{f(x) = x}_{\text{identité}}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Conjecture à l'aide de Géogébra :

Sur $[0;1[$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$, càd si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$.

Sur $]1;+\infty[$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessous de $\mathcal{C}_f$, càd si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.

Pour $x = 0$ et pour $x = 1$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent.

Démonstra° algébriq : Ici $x \geqslant 0$ car g est définie sur $[0;+\infty[$.

Résolvons l'équa° : $f(x) > g(x)$

$x > \sqrt{x}$ $(\geqslant 0)$

Donc on a $x^2 > (\sqrt{x})^2$ car la fonc° carrée croît sur $[0;+\infty[$.

Donc : $x^2 > x$

Donc : $x^2 - x > 0$

Donc : $x(x-1) > 0$ Or $x \geqslant 0$, donc d'après la règle des signes d'un produit :

$x-1 > 0$ donc $x > 1$

Donc sur $]1;+\infty[$, $f(x) > g(x)$, càd $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]1;+\infty[$.

Par suite : si $0 < x < 1$, $f(x) < g(x)$
$x < \sqrt{x}$

Sur $]0;1[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Enfin, si $x = 0$: $0 = \sqrt{0}$
si $x = 1$: $1 = \sqrt{1}$ donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

se coupent en $O(0;0)$ et $A(1;1)$.

D) La fonction cube

On rappelle que le cube d'un réel x est le nombre $x \times x \times x$ que l'on note x^3.

Par exemple, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Définition : La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Conséquence de la définition : la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$, donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

En effet, pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = (-x)^3 = (-1x) \times (-1x) \times (-1x) = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$.

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

Preuve :

Soient a et b deux réels tels que : $a \leq b$. But : arriver à : $a^3 \leq b^3$ ou encore mq : $a^3 - b^3 \leq 0$

Comparons $f(a) = a^3$ et $f(b) = b^3$ en étudiant le signe de la différence $f(a) - f(b)$:

Or, $f(a) - f(b) = a^3 - b^3$.

Nous allons vérifier que pour tous réels a et b, on a les deux points suivants :

1) la factorisation suivante : $a^3 - b^3 = \underbrace{(a - b)}_{\leq 0}(a^2 + ab + b^2)$

2) $a^2 + ab + b^2 = \underbrace{(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2}_{\geq 0}$.

Pour le point 1), on développe naïvement :

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ (les termes de même couleurs se simplifient, on rappelle que le produit des réels est commutatif, donc $a^2b = ba^2$ et $ab^2 = b^2a$).

Pour le point 2), on développe avec la première identité remarquable, puis on réduit le membre de droite :

$$(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2a \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2$$

Grâce à 1) et 2), on peut donc dire que pour tous réels a et b, on a :

$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a - b)\left((a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2\right).$$

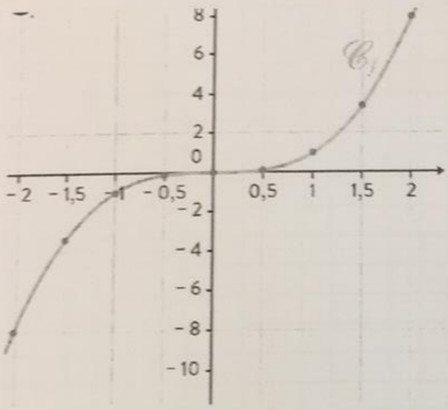
Or, si $a \leq b$, alors $a - b \leq 0$, et $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ en tant que somme de deux termes positifs (le carré d'un réel est toujours positif ou nul et $\frac{3}{4} > 0$).

Par suite d'après la règle des signes d'un produit, $(a-b)((a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2) \leq 0$.

Donc $f(a)-f(b) \leq 0$, donc $f(a) \leq f(b)$. Par suite $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

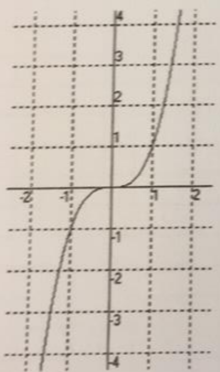
Tracé : grâce à une calculatrice ou un ordinateur on obtient la courbe représentative de la fonction cube :

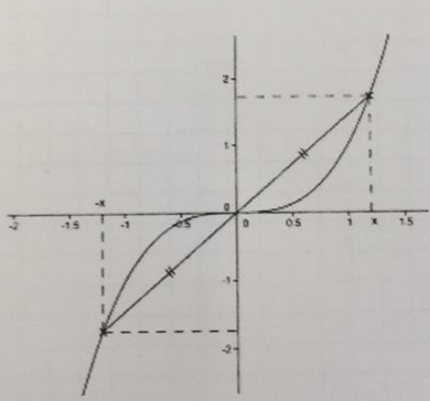
(Attention, le repère ci-dessous n'est pas orthonormé !)



x	x^3
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
-0,5	-0,125
0	0
0,5	0,125
1	1
1,5	3,375
2	8

En repère orthonormé :





Propriété

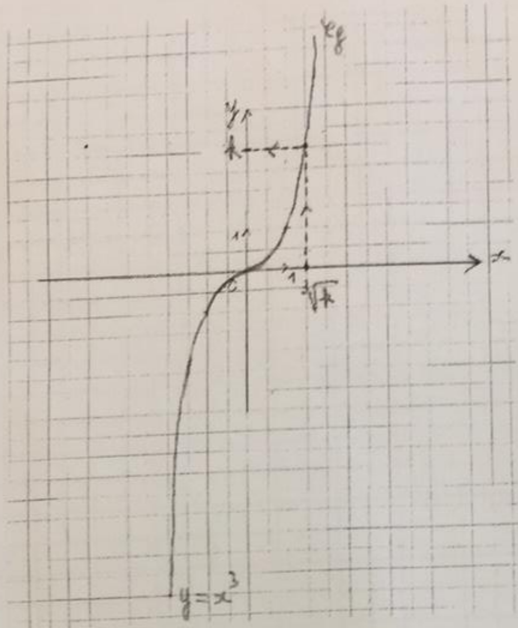
Soit k un nombre réel.

Considérons l'équation : $x^3 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

Cette équation admet une unique solution réelle, appelée la racine cubique de k et notée $\sqrt[3]{k}$

L'inéquation : $x^3 < k$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]-\infty\ ;\ \sqrt[3]{k}\ [$.

L'inéquation : $x^3 > k$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]\sqrt[3]{k}\ ;\ +\infty[$.



__Preuve__ : admis en classe de seconde.

On retiendra que pour tout réel x, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$: l'unique réel qui élevé au cube est égal à x est la racine cubique de x.

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$
$\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[3]{4}$ a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule : $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587401052$

C'est là que la notation $\sqrt[3]{4}$ a toute sa pertinence !

Calculer mentalement : $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{-64}$

__Réponse__ : $\sqrt[3]{1000} = 10$ car $10^3 = 1000$ || $\sqrt[3]{-64} = -4$ car $(-4)^3 = -64$

__Exercice 9__

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$x^3 = 21$; $x^3 < 1$; $-125 \leq x^3 < 0{,}216$

$x^3 = 21$

Donc $x = \sqrt[3]{21}$

$S = \{\sqrt[3]{21}\}$

$x^2 < 1$

$x < \sqrt[3]{1}$

$S =]-\infty ; 1[$

$-125 \leq x^2 < 0{,}216$

$\sqrt[3]{-125} \leq x^2 < \sqrt[3]{0{,}216}$

$-5 \leq x^2 < 0{,}6$

$S = [-5 ; 0{,}6[$.

***Propriété** (position relative de courbes représentatives de fonctions de référence).*

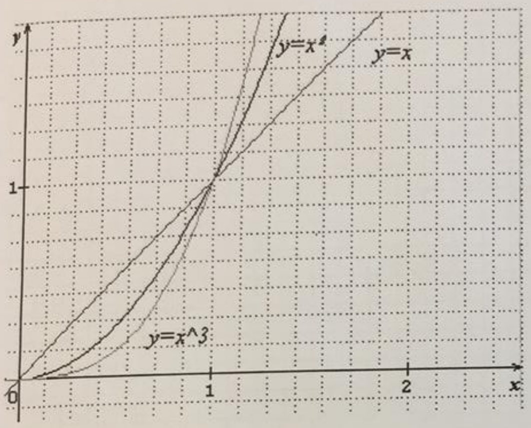
- Pour tout réel x tel que : $0 \leq x \leq 1$, on a : $x^3 \leq x^2 \leq x$

Donc sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la courbe représentative de la fonction cube est située en dessous de celle de la fonction carrée, elle-même située en dessous de celle de la fonction identité (fonction qui à tout réel x associe ce même réel x).

- ***Pour tout réel x tel que $x \geq 1$, on a : $x^3 \geq x^2 \geq x$***

Donc sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la courbe représentative de la fonction cube est située au- dessus de celle de la fonction carrée, elle-même située au-dessus de celle de la fonction identité.

***Illustration et preuve** :*



***Preuve** :*

Si $0 < x \leq 1$, alors en multipliant par x chacun des membres de cette inégalité, il vient : $\mathbf{0 < x^2 \leq x}$, et en refaisant la même action, il vient que : $\mathbf{0 < x^3 \leq x^2}$.

Par suite, par transitivité de la relation $<$, on a : $\mathbf{x^3 \leq x^2 \leq x}$.

Même principe si $x \geq 1$.

Exercice 10

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4x^3 < 5x$.

b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3$ et $g(x) = 5x$.

a) $4x^3 < 5x$

$4x^3 - 5x < 0$

$x(4x^2 - 5) < 0$ factorisa°

$x((2x)^2 - (\sqrt{5})^2) < 0$

Donc $x(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}) < 0$

$x \geqslant 0$ | $2x + \sqrt{5} \geqslant 0$, $x \geqslant \frac{-\sqrt{5}}{2}$ | $2x - \sqrt{5} \geqslant 0$, $x \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $2x-\sqrt{5}$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $x(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Rappel : Etudier la posi° relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à résoudre l'inéqua° : $f(x) \geqslant g(x)$

↳ $\mathcal{C}_g$ au-dessous de $\mathcal{C}_f$
→ $f(x) - g(x) \geqslant 0$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de $4x^3 - 5x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Grâce au tableau de signes : Si $x < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ alors $f(x) - g(x) < 0$, donc $f(x) < g(x)$.

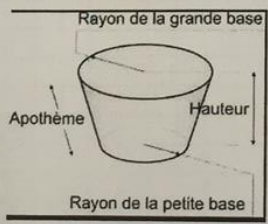
Donc sur $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

De m̂ sur $\left]0 ; \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Sur $\left]-\frac{\sqrt{5}}{2} ; 0\right[$ et sur $\left]\frac{\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

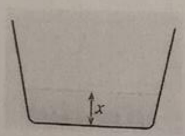
Exercice 11

Un chaudron a la forme d'un cône tronqué (figure ci-dessous) :



Le rayon du disque de la petite base mesure 10 *cm* et le rayon du disque de la grande base mesure 20 *cm*. Enfin, la hauteur (= segment dont les extrémités sont les centres de chacun des disques de base) est mesure 30 *cm*.

On remplit d'eau ce chaudron qui est vide au départ. On appelle x la hauteur d'eau dans le chaudron (dessin en coupe), et enfin V la fonction qui à x associe le volume d'eau contenu dans le cône tronqué rempli à la hauteur x.

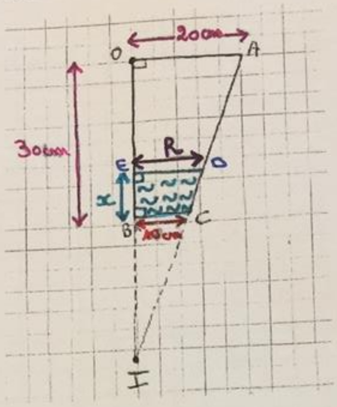


Le but de cet exercice est de donner l'expression de $V(x)$ en fonction de x.

a) A quel intervalle (noté I) le nombre x appartient-il ?

$0 \leqslant x \leqslant 30$, donc $x \in I$, où $I = [0 ; 30]$.

Le dessin ci-dessous est une coupe du demi-cône tronqué précédent :



b) Etablir que $IB = 30\ cm$ puis que $R = \frac{x}{3} + 10$.

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à I, $V(x) = \frac{\pi}{3}(\frac{x^3}{9} + 10x^2 + 300x)$.

b) (BC) // (OA)

Donc on va appliquer le théorème de Thalès, aux triangles IBC et IOA :

On a : $\frac{IB}{IO} = \frac{BC}{OA} = \frac{IC}{IA}$

$$\frac{IB}{IB+30} = \frac{10}{20}$$

$$\frac{IB}{IB+30} = \frac{1}{2}$$

produits en croix

$$IB \times 2 = IB + 30$$

$$2IB - IB = 30$$

Donc $IB = 30$ cm

De m, Thalès appliqué aux triangles IDE et IBC :

$$\frac{IB}{IE} = \frac{BC}{ED}$$

$$\frac{30}{x+30} = \frac{10}{R}$$

$$30R = 10(x+30)$$

$$R = \frac{10(x+30)}{30} = \frac{x+30}{3} = \frac{x}{3} + \frac{30}{3}$$

Donc $R = \frac{x}{3} + \frac{30}{3}$

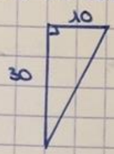
c) $V_{\text{cône}} = \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$

$V_{\text{cône tronqué}} = V_{\text{gros cône}} - V_{\text{cône ôté}}$

Pour le gros cône :

$h = x + 30$ et $R = \dfrac{x}{3} + 10$

Pour le cône ôté :



Donc $V(x) = \dfrac{\pi \times \left(\frac{x}{3}+10\right)^2 \times (x+30)}{3} - \dfrac{\pi \times 10^2 \times 30}{3}$

$V(x) = \dfrac{\pi}{3} \times \left[\left(\dfrac{x}{3}+10\right)^2 (x+30) - 3000\right]$

IR

$V(x) = \dfrac{\pi}{3} \times \left[\left(\dfrac{x^2}{9} + 2 \times \dfrac{x}{3} \times 10 + 100\right)(x+30) - 3000\right]$

$V(x) = \dfrac{\pi}{3} \left[\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{20x}{3} + 100\right)(x+30) - 3000\right]$

$V(x) = \dfrac{\pi}{3} \left[\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{30x^2}{9} + \dfrac{20x^2}{3} + 200x + 100x + 3000 - 3000\right.$

$V(x) = \dfrac{\pi}{3} \left[\dfrac{x^3}{9} + 10x^2 + 300x\right].$

Indication : le volume de l'eau s'obtient en faisant la différence entre les volumes de deux cônes de la figure précédente et en utilisant la question *b)* !!!!

d) L'eau arrivant à mi-hauteur, le récipient contiendra-t-il plus ou moins de 5 litres d'eau ?

On calcule $V(15) = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{15^3}{9} + 10 \times 15^2 + 300 \times 15\right)$

À la machine : $V(15) \approx 2375\pi$

$V(15) \approx 7461 \text{ cm}^2$

Or $1L = 1000 \text{ cm}^3$

Donc il y a $\approx 7{,}46$ L d'eau donc + de 5 litres !

E) La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété

La fonction inverse décroit sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	‖	↘

La double barre du tableau de variation rappelle que f n'est pas définie lorsque $x = 0$, car la division par 0 n'existe pas.

Preuve : → voir verso.

Dire que f décroit sur $\mathbb{R}^*$ est faux, expliquons pourquoi : → voir verso, raisonnement par l'absurde.

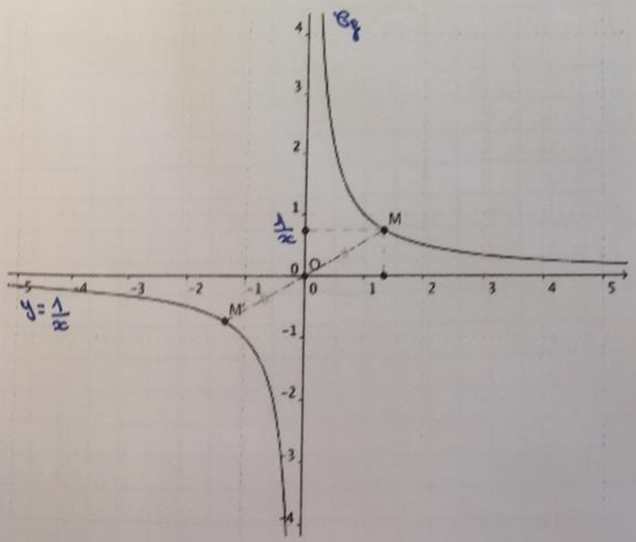
Remarque : la fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$, donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse. $f(-x) = \frac{1}{-x} = \frac{-1}{x} = -f(x)$: Pr tt réel x non nul : f est dc impaire sur $\mathbb{R}^*$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une hyperbole.

Tableau de valeurs

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	0	0,25	0,5	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	■	4	2	1	0,5	0,25

Courbe représentative de la fonction inverse :



La courbe représentative de la fonction inverse rencontre-t-elle les axes du repère ? Justifier.

→ voir verso.

Preuve : Montrons que la fonc° inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

Soient a et b deux réels tels que : $0 \leq a \leq b$

But : Montrer que $f(a) \geqslant f(b)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$.

Or, $f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1b}{ab} - \frac{1a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$

or $a \leq b$, donc $b-a \leq 0$

et $a > 0$ et $b > 0$ donc $ab > 0$.

Donc $\frac{b-a}{ab} \geqslant 0$, donc $f(a) - f(b) \geqslant 0$

Donc $f(a) \geqslant f(b)$

Conclusion : La fonc° inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

Idem preuve sur $]-\infty;0[$.

- En effet, si tel était le cas :

$-1 < 5$ et donc $f(-1) > f(5)$

donc $\frac{1}{-1} > \frac{1}{5}$

$-1 > \frac{1}{5}$: absurde !

→ C_f ne rencontre pas l'axe des ordonnées (y) car f n'est pas définie en 0 !

C_f ne rencontre pas l'axe des abscisses (x) car :

$f(x)=0$ n'a pas de solu°. $\frac{1}{x} = 0$: pas de solu° !

__Applications__ :

1) Sans faire aucun calcul, comparer : *a)* $\frac{1}{0{,}24}$ et $\frac{1}{015}$; *b)* $\frac{1}{-0{,}99}$ et $\frac{1}{-1{,}01}$

2) Sachant que $-3 \leqslant x < -1$, que peut-on dire de $\frac{1}{x}$? Justifier.

3) Sachant que $2 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 5$, donner un encadrement de x en justifiant.

1) a) $\frac{1}{0{,}24}$ et $\frac{1}{0{,}15}$

$0{,}24 > 0{,}15 > 0$

Donc $\frac{1}{0{,}24} < \frac{1}{0{,}15}$ car la fonc° inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

b) $\frac{1}{-0,99}$ et $\frac{1}{-1,01}$

De m̂ $-0,99 > -1,01$

Donc $\frac{1}{-0,99} < \frac{1}{-1,01}$ car la fonc° inverse décroît sur $]-\infty ; 0[$.

2) $-3 \leq x < -1$

Donc $\frac{1}{-3} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{-1}$ car la fonc° inverse décroît sur $]-\infty ; 0[$.

Donc $-1 < \frac{1}{x} \leq \frac{-1}{3}$

3) On sait que : $2 \leq \frac{1}{x} < 5$

Donc $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{x}} > \frac{1}{5}$ car la fonc° inverse décroît sur $]0 ; +\infty[$.

Donc $\frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{2}$

x

Exercice 12

L'aire d'un rectangle vaut 3 m^2. On sait que sa longueur est comprise entre 2,1 m et 2,2 m.

Déterminer un encadrement de sa largeur. Les bornes de l'encadrement seront exprimées en cm.