

I- Quelques propriétés remarquablesA-Fonctions paires, fonctions impairesDéfinition

Une partie D de \mathbb{R} est dite symétrique par rapport à 0 ou encore centré en 0, si pour tout réel x appartenant à D , son opposé $-x$ appartient également à D .

Exemple: L'intervalle $[-4 ; 4]$ est symétrique par rapport à 0.

Par-contre, l'intervalle $[-2 ; 3]$ n'est pas un intervalle symétrique par rapport à 0.

♥♥♥ Définition (fonction paire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que **f est paire** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D , $-x$ appartient à D ,

ET pour tout réel x appartenant à D ,

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$. Montrer que f est paire sur \mathbb{R} .

f est-elle paire sur $[-1 ; 3]$?

2) Soit i la fonction définie sur \mathbb{R} par : $i(x) = x^2 + 2x - 1$. Calculer $i(2)$ puis $i(-2)$. i est-elle paire sur \mathbb{R} ?

✂-----

Propriété

Soit f une fonction paire définie sur un ensemble D .

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est

Réciproquement, si la courbe d'une fonction admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées sur un intervalle D , alors f est une fonction paire.

Justification : Observons d'abord que si $M(x ; y)$, alors le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est le point M' avec $M'(\dots ; \dots)$.

♥♥♥ Définition (fonction impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que f est impaire lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D , $-x$ appartient à D ,
ET pour tout réel x appartenant à D ,

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3$. Montrer que f est impaire sur \mathbb{R} .

f est-elle impaire sur $[-1 ; 3]$?

2) Démontrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 4x$ est impaire sur \mathbb{R} .

✂-----

Propriété

Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble D .

Dans un repère, la courbe représentative de f est

Réciproquement, si la courbe d'une fonction f admet pour centre de symétrie l'origine du repère, alors f est impaire.

Remarques : il est bon de garder à l'esprit qu'en général, une fonction n'est ni paire ni impaire sur un intervalle.

💧💧 Si une fonction n'est pas paire sur un intervalle, cela ne signifie pas pour autant qu'elle est impaire sur cet intervalle ! Regardez la fonction i des exemples précédents !

Le vocabulaire est ici malheureux, les termes paire et impaire pour une fonction ne sont pas contraires l'un de l'autre !

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions définies sur \mathbb{R} qui sont à la fois paires et impaires sur \mathbb{R} .

II- Fonctions de références

A) Les fonctions affines

Définition : On appelle fonction affine, toute fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

On rappelle que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Propriété fondamentale : *sens de variation des fonctions affines.*

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

1) Si $a > 0$, alors f sur \mathbb{R} .

2) Si $a < 0$, alors f sur \mathbb{R} .

3) Si $a = 0$, alors f sur \mathbb{R} .

Illustration et preuve :

✂-----

Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x + 3$.

Etudier son sens de variation, et dresser son tableau de variations.

✂-----

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in [-4; 1] \\ -x + 2 & \text{si } x \in [1; 3] \\ 3x - 10 & \text{si } x \in [3; 5] \end{cases}$

Construire la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

✂-----

B) La fonction carrée

Rappel : la fonction carrée est la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$.

Nous avons déjà vu que dans un repère orthogonal la courbe représentant f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie car f est paire sur \mathbb{R} .

Propriété

♥♥ La fonction carrée est **décroissante** sur et **croissante** sur ♥♥

Preuve : Plaçons-nous sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$: soient a et b deux réels tels que : $a \leq b \leq 0$.

Comparons $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$: or $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et par donnée, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$ et vu que $a \leq 0$ et $b \leq 0$, $a + b \leq 0$ (somme de deux réels négatifs).

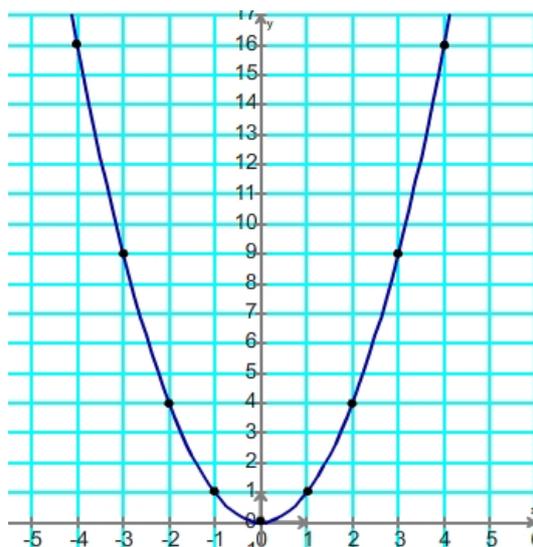
Donc d'après la règle des signes d'un produit, $(a - b)(a + b) \geq 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) \geq 0$, et donc $f(a) \geq f(b)$: ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

Sur $[0 ; +\infty[$: même type de démonstration que vous pouvez faire seul à titre d'exercice !

✂-----

Bien avoir en tête l'allure de la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗
		0	



Remarques : la fonction carrée a pour minimum 0 sur \mathbb{R} , et on retrouve que pour tout réel x , $x^2 \geq 0$.

Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse.

Exercice 3

a , b , c et d désignent quatre nombres réels.

Compléter dans chaque cas par l'information la plus précise possible, en justifiant :

- 1) Si $a \geq 3$, alors a^2
- 2) Si $b \leq -\sqrt{2}$, alors b^2
- 3) Si $-5 \leq c \leq -2,5$ alors c^2
- 4) Si $-3 \leq d \leq 2$, alors d^2

✂-----

Propriété ♥♥♥♥

Soit k un nombre réel.

Considérons l'équation : $x^2 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

♥♥ Si $k < 0$, alors cette équation n'a.....

♥♥ Si $k = 0$, alors cette équation a pour unique solution.....

♥♥ Si $k > 0$, alors cette équation a deux solutions :

♥♥ Enfin, lorsque $k > 0$, l'inéquation : $x^2 < k$ admet pour solutions.....

Remarque : cela doit facilement se retrouver mentalement en visionnant la courbe représentative de la fonction carrée !!

Preuve :

✂-----

Exercice 4

Résoudre mentalement les équations et inéquations suivantes d'inconnue x appartenant à \mathbb{R} :

a) $x^2 = 3$ b) $x^2 = -6$ c) $x^2 = 12$ d) $x^2 < 25$ e) $x^2 \geq 36$.

✂-----

Complément : équations du second degré moins triviales, un pas vers la première !

Lemme : pour tous réels x et a : $x^2 + ax = \dots\dots\dots$

Preuve :

✂-----

Exemple : transformer comme dans le lemme : $x^2 + 4x$; $x^2 - x$

✂-----

Application : utiliser cette technique pour résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$x^2 + 4x + 3 = 0$; $x^2 - x + 1 = 0$.

✂-----

Remarque : avec cette technique, vous pouvez résoudre toutes les équations du second degré de la forme : $x^2 + bx + c = 0$ où b et c sont des réels.

Exemple : résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^2 + 5x + 3 = 0$.

✂-----

C) La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

Elle ne prend que des valeurs positives ou nulles.

Propriété

La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
\sqrt{x}	0	\nearrow

Preuve : Soient a et b deux réels tels que : $0 \leq a \leq b$: on sait que $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$.

Ainsi, $0 \leq a \leq b$ s'écrit encore sous la forme : $(\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$.

Or, \sqrt{a} et \sqrt{b} sont positifs ou nuls, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (par croissance de la fonction carrée sur $[0 ; +\infty[$).

Par suite on a : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ et la fonction racine carrée croît sur $[0 ; +\infty[$.

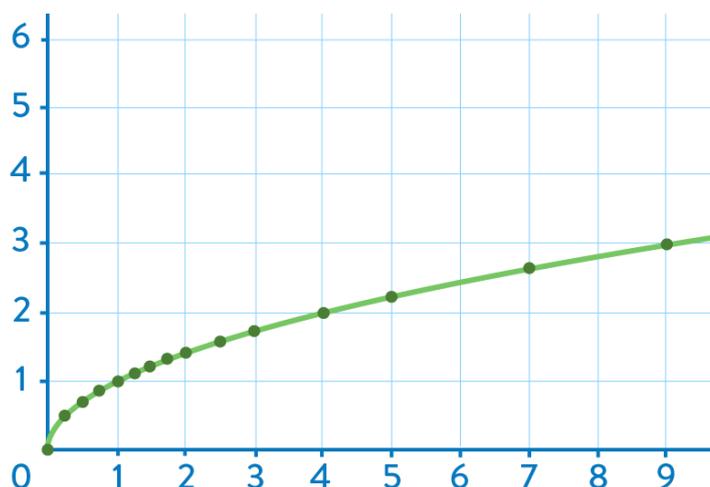
On retiendra donc que : ♥♥ $0 \leq a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

En effet : si $0 \leq a \leq b$, alors par croissance de la fonction racine carrée sur $[0 ; +\infty[$, on a : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Réciproquement, si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors comme les nombres \sqrt{a} et \sqrt{b} sont positifs, et que la fonction carrée croît sur $[0 ; +\infty[$, on a :

$(\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$ c'est-à-dire : $(0 \leq) a \leq b$.

Courbe représentative de la fonction racine carrée :



x	$f(x) = \sqrt{x}$ à 0,1 près.
0	0
0.25	0.5
0.5	0.7
0.75	0.9
1	1
1.25	1.1
1.5	1.2
1.75	1.3
2	1.4
2.5	1.6
3	1.7
4	2
5	2.2
7	2.6
9	3

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} < 2,5$ b) $\sqrt{x} - 4 \geq 0$ c) $\sqrt{x} = -1$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leq 1$ e) $\sqrt{x} \geq -1$.

✂-----

Exercice 6

Sans calculatrice, comparer les réels : $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ et $b = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

✂-----

Exercice 7

Etudier, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

✂-----

D) La fonction cube

On rappelle que le cube d'un réel x est le nombre $x \times x \times x$ que l'on note x^3 .

Par exemple, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Définition : La fonction cube est la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3$.

Conséquence de la définition : la fonction cube est impaire sur \mathbb{R} , donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

En effet, pour tout réel x , $-x$ est réel et $f(-x) = (-x)^3 = (-1x) \times (-1x) \times (-1x) = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$.

Propriété

La fonction cube est croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Preuve :

Soient a et b deux réels tels que : $a \leq b$.

Comparons $f(a) = a^3$ et $f(b) = b^3$ en étudiant le signe de la différence $f(a) - f(b)$:

$$\text{Or, } f(a) - f(b) = a^3 - b^3.$$

Nous allons vérifier que pour tous réels a et b , on a les deux points suivants :

$$1) \text{ la factorisation suivante : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$2) a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Pour le point 1), on développe naïvement :

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 \quad (\text{les termes de même couleurs se simplifient, on rappelle que le produit des réels est commutatif, donc } a^2b = ba^2 \text{ et } ab^2 = b^2a).$$

Pour le point 2), on développe avec la première identité remarquable, puis on réduit le membre de droite :

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2a \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2.$$

Grâce à 1) et 2), on peut donc dire que pour tous réels a et b , on a :

$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a - b)\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

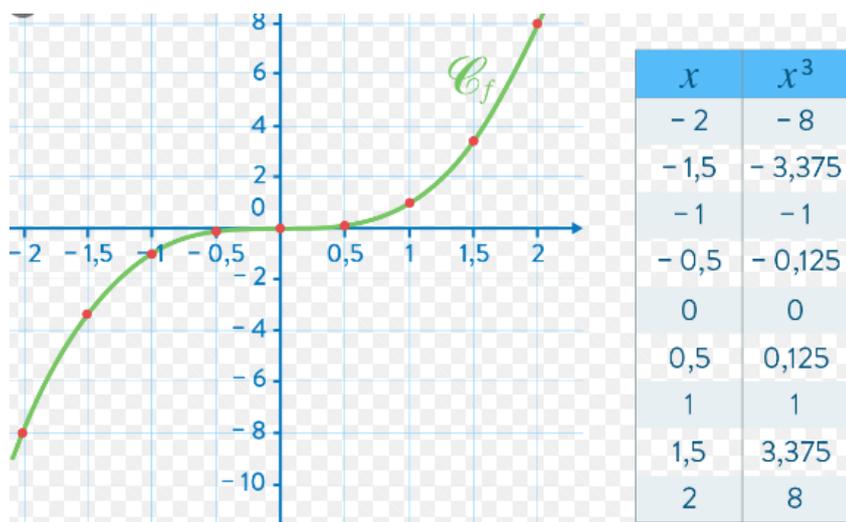
Or, si $a \leq b$, alors $a - b \leq 0$, et $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ en tant que somme de deux termes positifs (le carré d'un réel est toujours positif ou nul et $\frac{3}{4} > 0$).

Par suite d'après la règle des signes d'un produit, $(a - b)\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \leq 0$.

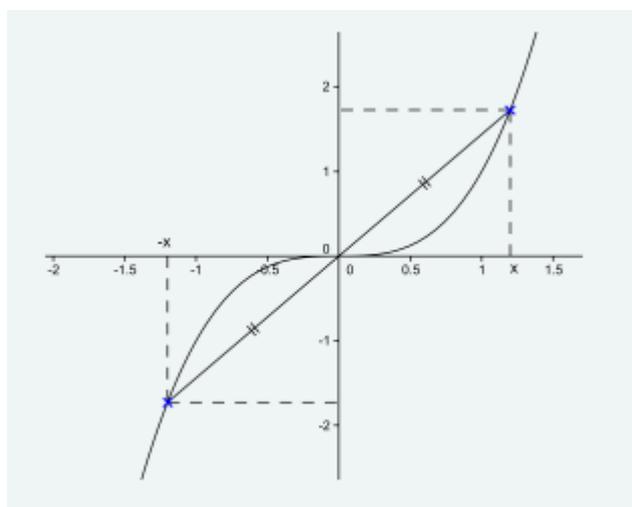
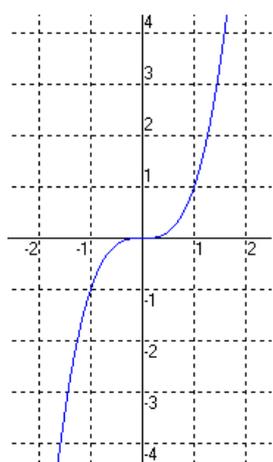
Donc $f(a) - f(b) \leq 0$, donc $f(a) \leq f(b)$. Par suite f est croissante sur \mathbb{R} .

Tracé : grâce à une calculatrice ou un ordinateur on obtient la courbe représentative de la fonction cube :

(Attention, le repère ci-dessous n'est pas orthonormé !)



En repère orthonormé :



Propriété

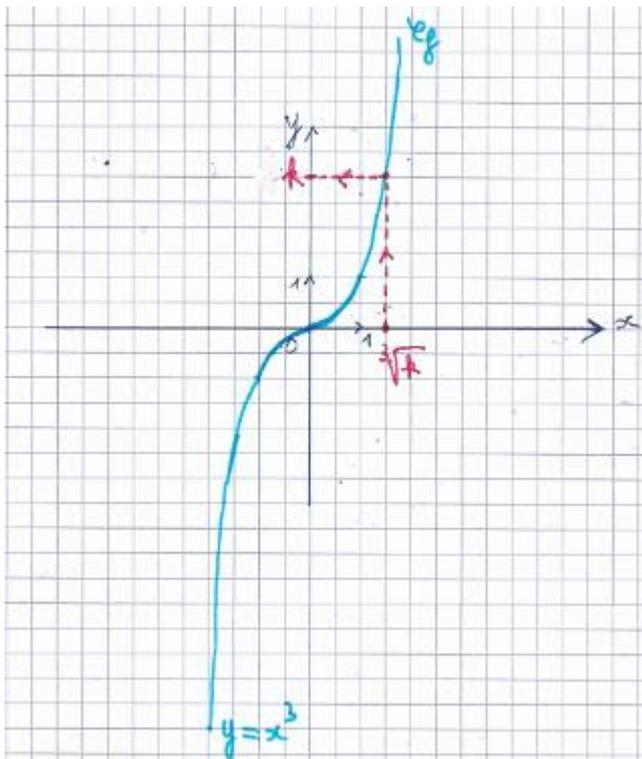
Soit k un nombre réel.

Considérons l'équation : $x^3 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

Cette équation admet une unique solution réelle, appelée la racine cubique de k et notée $\sqrt[3]{k}$

L'inéquation : $x^3 < k$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $] -\infty ; \sqrt[3]{k} [$.

L'inéquation : $x^3 > k$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $] \sqrt[3]{k} ; +\infty [$.



Preuve : admis en classe de seconde.

On retiendra que pour tout réel x , $(\sqrt[3]{x})^3 = x$: l'unique réel qui élevé au cube est égal à x est la racine cubique de x .

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$
 $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$.

$\sqrt[3]{4}$ a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule : $\sqrt[3]{4} \approx 1,587401052$

C'est là que la notation $\sqrt[3]{4}$ a toute sa pertinence !

Calculer mentalement : $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{-64}$

Réponse :

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$x^3 = 21 \quad ; \quad x^3 < 1 \quad ; \quad -125 \leq x^3 < 216$$

✂-----

Exercice 9

Après trois hausses successives de même taux, le prix d'un article a augmenté de 75 %. Déterminer, à 0,1% près, le taux de chacune de ces augmentations.

Propriété (position relative de courbes représentatives de fonctions de référence).

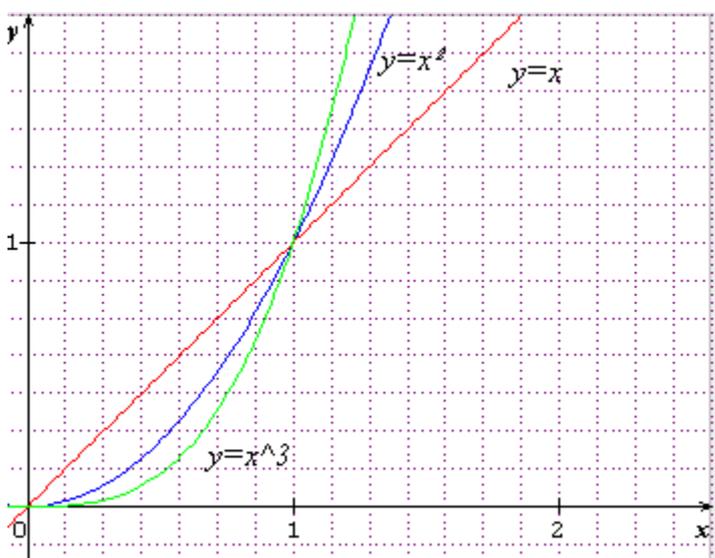
- Pour tout réel x tel que : $0 \leq x \leq 1$, on a : $x^3 \leq x^2 \leq x$

Donc sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la courbe représentative de la fonction cube est située en dessous de celle de la fonction carrée, elle-même située en dessous de celle de la fonction identité (fonction qui à tout réel x associe ce même réel x).

- Pour tout réel x tel que $x \geq 1$, on a : $x^3 \geq x^2 \geq x$

Donc sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la courbe représentative de la fonction cube est située au-dessus de celle de la fonction carrée, elle-même située au-dessus de celle de la fonction identité.

Illustration et preuve :



Preuve :

Si $0 < x \leq 1$, alors en multipliant par x chacun des membres de cette inégalité, il vient : $0 < x^2 \leq x$, et en refaisant la même action, il vient que : $0 < x^3 \leq x^2$.

Par suite, par transitivité de la relation $<$, on a : $x^3 \leq x^2 \leq x$.

Même principe si $x \geq 1$.

Exercice 10

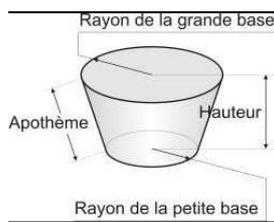
a) En s'aidant d'un tableau de signes, résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $4x^3 < 5x$.

b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = 4x^3$ et $g(x) = 5x$.

✂-----

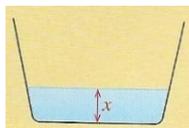
Exercice 11

Un chaudron a la forme d'un cône tronqué (figure ci-dessous) :



Le rayon du disque de la petite base mesure 10 cm et le rayon du disque de la grande base mesure 20 cm . Enfin, la hauteur (= segment dont les extrémités sont les centres de chacun des disques de base) est mesurée 30 cm .

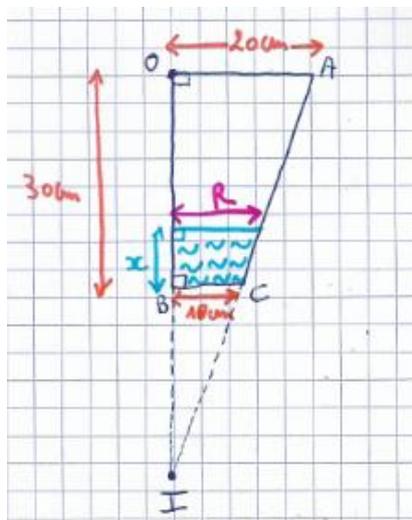
On remplit d'eau ce chaudron qui est vide au départ. On appelle x la hauteur d'eau dans le chaudron (dessin en coupe), et enfin V la fonction qui à x associe le volume d'eau contenu dans le cône tronqué rempli à la hauteur x .



Le but de cet exercice est de donner l'expression de $V(x)$ en fonction de x .

a) A quel intervalle (noté I) le nombre x appartient-il ?

Le dessin ci-dessous est une coupe du demi-cône tronqué précédent :



b) Etablir que $IB = 30\text{ cm}$ puis que $R = \frac{x}{3} + 10$.

c) En déduire que pour tout réel x appartenant à I , $V(x) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{x^3}{9} + 10x^2 + 300x \right)$.

Indication : le volume de l'eau s'obtient en faisant la différence entre les volumes de deux cônes de la figure précédente et en utilisant la question b) !!!!

d) L'eau arrivant à mi-hauteur, le récipient contiendra-t-il plus ou moins de 5 litres d'eau ?

E) La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété

La fonction inverse décroît sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘		↘

La double barre du tableau de variation rappelle que f n'est pas définie lorsque $x = 0$, car la division par 0 n'existe pas.

Preuve :

💡💡 Dire que f décroît sur \mathbb{R}^* est faux, expliquons pourquoi :

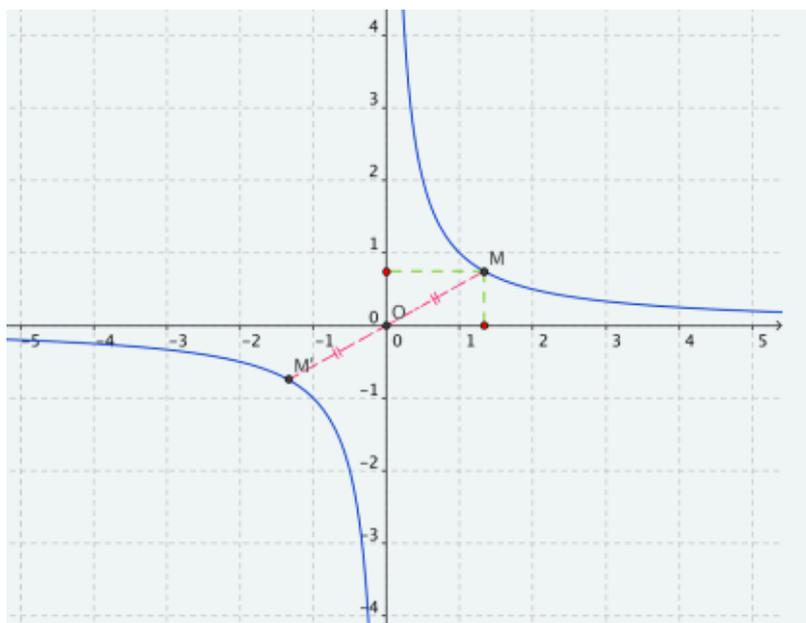
Remarque : la fonction inverse est impaire sur \mathbb{R}^* , donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une hyperbole.

Tableau de valeurs

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	■	4	2	1	0,5	0,25

Courbe représentative de la fonction inverse :



La courbe représentative de la fonction inverse rencontre-t-elle les axes du repère ? Justifier.

Applications :

1) Sans faire aucun calcul, comparer : a) $\frac{1}{0,24}$ et $\frac{1}{0,15}$ b) $\frac{1}{-0,99}$ et $\frac{1}{-1,01}$

2) Sachant que $-3 \leq x < -1$, que peut-on dire de $\frac{1}{x}$? Justifier.

3) Sachant que $2 \leq \frac{1}{x} \leq 5$, donner un encadrement de x en justifiant.

✂-----

Exercice 12

L'aire d'un rectangle vaut 3 m^2 . On sait que sa longueur est comprise entre $2,1 \text{ m}$ et $2,2 \text{ m}$.

Déterminer un encadrement de sa largeur. Les bornes de l'encadrement seront exprimées en *cm*.

✂-----

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{R}^* l'inéquation : $\frac{1}{x} > -2$.

✂-----

Exercice 14

Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x-1}$

✂-----

Exercice 15

Un motard se rend d'un point A à un point B, distants de 10 km, à la vitesse de 60 km/h.

Il effectue le trajet retour de B vers A à la vitesse de x km/h. ($x > 0$).

On note $f(x)$ la vitesse moyenne, en km/h sur l'ensemble du trajet A -> B -> A.

a) Calculer la durée t_1 (en heures) du trajet aller, puis la durée t_2 (en heures) du trajet retour en fonction de x . En déduire que $f(x) = \frac{120x}{x+60}$.

b) En déduire la vitesse moyenne sur le trajet si la vitesse moyenne au retour vaut $x = 40$ km/h.

Le résultat obtenu est-il déroutant ?

c) A quelle vitesse le motard doit-il effectuer le trajet retour pour que sa vitesse moyenne soit égale à 70 km/h ?

d) Est-il possible pour le motard d'avoir une vitesse moyenne de 120 km/h sur l'aller-retour ?

e) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = 120 - \frac{7200}{x+60}$.

f) Ecrire un enchaînement, puis déterminer le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.