Chapitre 11 — **Fonctions de référence.**

I- Quelques propriétés remarquables

A- Fonctions paires, fonctions impaires

Définition

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite symétrique par rapport à 0 ou encore centré en 0, si pour tout réel x appartenant à D, son opposé $-x$ appartient également à D.

Exemple : L'intervalle [-4 ; 4] est symétrique par rapport à 0. car $\frac{-4+4}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Par-contre, l'intervalle [-2 ; 3] n'est pas un intervalle symétrique par rapport à 0. car $\frac{-2+3}{2} = -\frac{1}{2}$ $(\neq 0)$

♥♥♥ **Définition** (fonction paire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que **f est paire** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D,
ET pour tout réel x appartenant à D, $f(-x) = f(x)$

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

f est-elle paire sur [-1 ; 3] ?

2) Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = x^2 + 2x - 1$. Calculer $i(2)$ puis $i(-2)$. i est-elle paire sur $\mathbb{R}$?

1) f définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

a) Pour tout réel x, $-x$ est réel ($\mathbb{R}$ est centré en 0) (*)

(**) $f(-x) = (-x)^2 = -x \times (-x) = x^2 = f(x)$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) $[-1;3]$ n'est pas centré en 0 car $\frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Donc f n'est pas paire sur $[-1;3]$.

2) i est définit sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = x^2 + 2x - 1$

$i(2) = 2^2 + 2\times 2 - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

$i(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$

Ainsi $i(2) \neq i(-2)$ car $7 \neq -1$, donc i n'est pas paire sur $\mathbb{R}$.

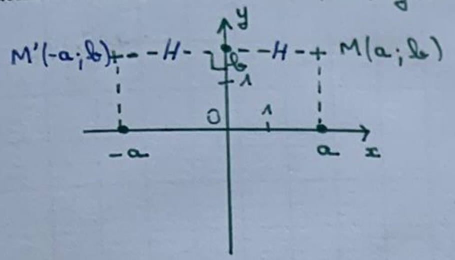
Propriété

Soit f une fonction paire définie sur un ensemble D.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est SYMÉTRIQUE par rapport à l'axe des ordonnées (y).

Réciproquement, si la courbe d'une fonction admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées sur un intervalle D, alors f est une fonction paire.

Justification : Observons d'abord que si $M(x\,;y)$, alors le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est le point M' avec $M'(-x\,;\,y)$.



Si f est paire sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$

Soit $M(x\,;y) \in \mathcal{C}_f$: $y = f(x)$

$M(x\,;f(x)) \in \mathcal{C}_f$

Soit $M'(-x\,;f(x))$ le symétrique de M par rapport à l'axe de y.

Montrons que $M' \in \mathcal{C}_f$: Or $f(-x) = f(x)$ parité de f

Donc $M'(-x\,;f(-x))$

Donc $M' \in \mathcal{C}_f$

♥♥♥ ***Définition*** (fonction impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que ***f est impaire*** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D,
ET pour tout réel x appartenant à D, $f(-x) = -f(x)$ → 2 nombres opposés ont des images opposés

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

f est-elle impaire sur $[-1\ ;\ 3]$?

2) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 4x$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

1) f est définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$

*) Pour tout réel x, $-x$ est un réel

**) $f(-x) = (-x)^3 = -x \times (-x) \times (-x) = -x^3 = -f(x)$

Donc f est IMPAIRE sur $\mathbb{R}$.

$[-1;3]$ n'est pas centré en 0, donc f n'est pas impaire sur $[-1;3]$.

2) g est définit sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 4x$

*) $\mathbb{R}$ est centré en 0

**) Pour tout réel x : $g(-x) = (-x)^3 - 4 \times (-x) = -x^3 + 4x$

$g(-x) = -(\underbrace{x^3 - 4x}_{g(x)}) = -g(x)$

g est IMPAIRE sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble D.

Dans un repère, la courbe représentative de f est SYMÉTRIQUE par rapport à l'origine O du repère.

Réciproquement, si la courbe d'une fonction f admet pour centre de symétrie l'origine du repère, alors f est impaire.

Remarques : il est bon de garder à l'esprit qu'en général, une fonction n'est ni paire ni impaire sur un intervalle.

💣💣 Si une fonction n'est pas paire sur un intervalle, cela ne signifie pas pour autant qu'elle est impaire sur cet intervalle ! Regardez la fonction i des exemples précédents !

Le vocabulaire est ici malheureux, les termes paire et impaire pour une fonction ne sont pas contraires l'un de l'autre !

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$

Donc $f(x) = -f(x)$ donc $\underbrace{f(x) + f(x)}_{2f(x)} = 0$

$2f(x) = 0$

$f(x) = \frac{0}{2} = 0$

Donc la fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire sur $\mathbb{R}$.

II- Fonctions de références

A) Les fonctions affines

Définition : On appelle fonction affine, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

On rappelle que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite. qui a pour équation réduite : $y = ax + b$

Propriété fondamentale : *sens de variation des fonctions affines.*

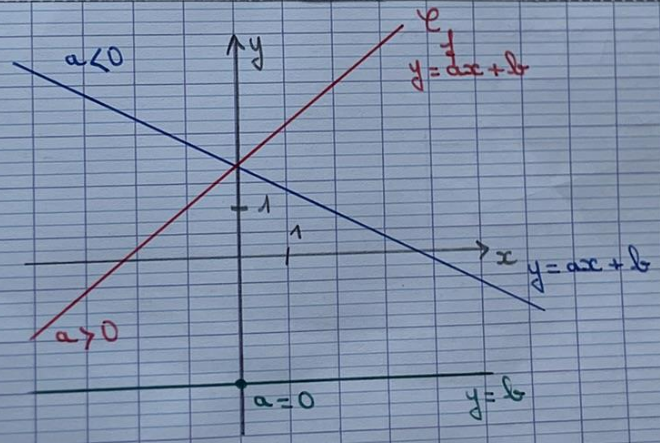
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1) Si $a > 0$, alors f est CROISSANTE sur $\mathbb{R}$.

2) Si $a < 0$, alors f est DÉCROISSANTE sur $\mathbb{R}$.

3) Si $a = 0$, alors f est CONSTANTE sur $\mathbb{R}$.

Illustration et preuve :



① Soient u et v deux réels tel que $u \leq v$

Si $a > 0$, on a : $a \times u \leq a \times v$

Donc : $a \times u + b \leq a \times v + b$

$f(u) \leq f(v)$

Ex : $f(x) = -2x + 3$

f est une fonction affine de la forme :

$f(x) = ax + b$ avec :

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

Etudier son sens de variation, et dresser son tableau de variations.

$-2 < 0$, donc f décroit sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-4\ ;\ 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in [-4;1] \\ -x + 2 \text{ si } x \in [1;3] \\ 3x - 10 \text{ si } x \in [3;5] \end{cases}$

Construire la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

$f(x) \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x \in [-4;1] \\ -x + 2 \text{ si } x \in [1;3] \\ 3x - 10 \text{ si } x \in [3;5] \end{cases}$

Sur $[-4;1]$ f est affine donc sa courbe est un segment d'extrémités $A(-4; f(-4))$ et $B(1; f(1))$

$f(-4) = 2 \times (-4) - 1 = -9$ $A = (-4; -9)$

$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$ $B = (1; 1)$

Sur $[1;3]$, $f(x) = -x+2$: fonction affine

Donc :

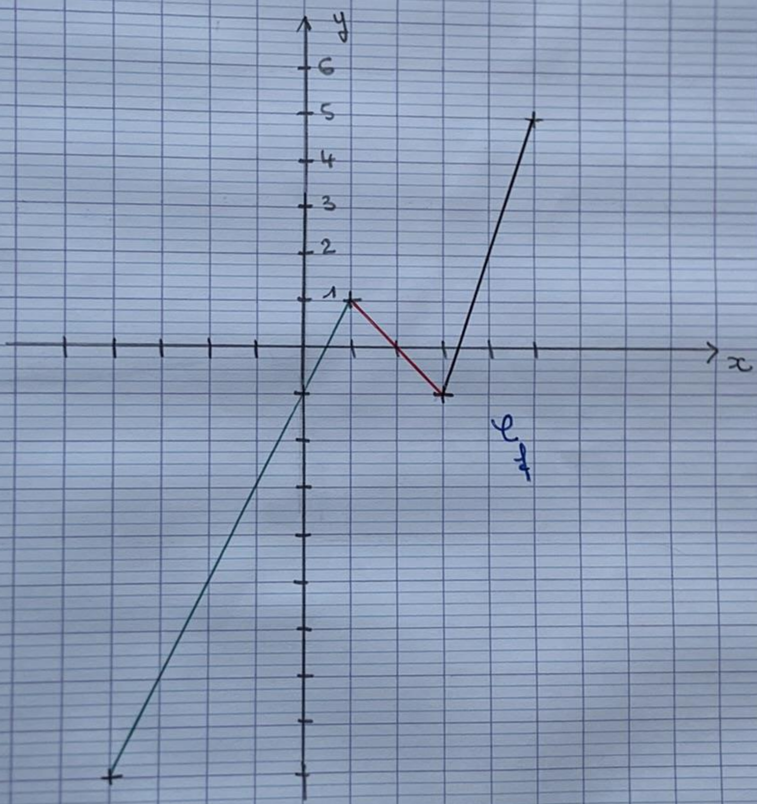
x	1	3
$f(x)$ $-x+2$	1	-1

Donc C_f passe par $B(1;1)$ et par $C(3;-1)$

Sur $[3;5]$, $f(x) = 3x-10$: fonction affine

x	3	5
$f(x)=3x-10$	-1	5

C_f passe par $C(3;-1)$ et $D(5;5)$



B) La fonction carrée

Rappel : la fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Nous avons déjà vu que dans un repère orthogonal la courbe représentant f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie car f est paire sur $\mathbb{R}$.

Propriété

♥♥ *La fonction carrée est* ***décroissante*** *sur* $]-\infty;0]$ …… *et* ***croissante*** *sur* $[0;+\infty[$ ………… ♥♥

Preuve : Plaçons-nous sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$: soient a et b deux réels tels que : $a \leq b \leq 0$.

Comparons $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$: or $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et par donnée, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$ et vu que $a \leq 0$ et $b \leq 0$, $a + b \leq 0$ (somme de deux réels négatifs).

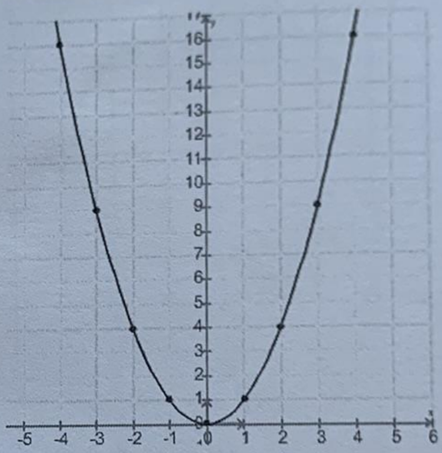
Donc d'après la règle des signes d'un produit, $(a - b)(a + b) \geq 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) \geq 0$, et donc $f(a) \geq f(b)$: ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$: *même type de démonstration que vous pouvez faire seul à titre d'exercice !*

✂---

Bien avoir en tête l'allure de la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗



Remarques : la fonction carrée a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, et on retrouve que pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. (car la fonction carré croît sur $[0;+\infty[$)
Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse. (car la fonction carré décroît sur $]-\infty;0]$

Exercice 3

a, b, c et d désignent quatre nombres réels.

Compléter dans chaque cas par l'information la plus précise possible, en justifiant :

1) Si $a \geq 3$, alors $a^2 \geqslant 3^2$ car la fonction carré croît sur $[0;+\infty[$. $a^2 \geqslant 9$

2) Si $b \leq -\sqrt{2}$, alors $b^2 \geqslant (-\sqrt{2})^2$ c'est à dire : $b^2 \geqslant 2$ car la fonction carré décroît sur $]-\infty;0]$

3) Si $-5 \leq c \leq -2{,}5$ alors $(-5)^2 \geqslant c^2 \geqslant (-2{,}5)^2$ c'est à dire : $25 \geqslant c^2 \geqslant 6{,}25$ car la fonction carré décroît sur $[0;+\infty[$

4) Si $-3 \leq d \leq 2$, alors $0 \leqslant d^2 \leqslant 9$........

✂---

Propriété ♥♥♥♥

Soit k un nombre réel.

Considérons **l'équation :** $x^2 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

♥♥ ***Si*** $k < 0$, alors cette équation n'a pas de solution réelle

♥♥ ***Si*** $k = 0$, alors cette équation a pour unique solution 0

♥♥ ***Si*** $k > 0$, alors cette équation a deux solutions : $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$

♥♥ Enfin, lorsque $k > 0$, l'inéquation : $x^2 < k$ admet pour solutions $]-\sqrt{k} ; \sqrt{k}[$

Remarque : cela doit facilement se retrouver mentalement en visionnant la courbe représentative de la fonction carrée !!

Preuve :

$x^2 \geqslant 0$, donc si $k < 0$, $x^2 = k$ n'a aucune solution réelle

Si $k = 0$: $x^2 = 0$ donc $x \times x = 0$

Par produit nul : $x = 0$ ou $x = 0$ donc $x = 0$

Si $k > 0$: $k = (\sqrt{k})^2$

Donc $x^2 = k$ s'écrit : $x^2 = (\sqrt{k})^2$

$x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$

$(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0$

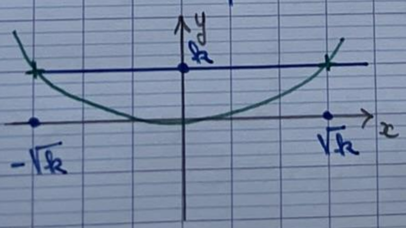
Produit nul : $x + \sqrt{k} = 0$ ou $x - \sqrt{k} = 0$

$x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{k} ; \sqrt{k}\}$

Enfin, $x^2 < k$ lorsque la courbe de la fonction carré est située sous la droite d'équation : $y = k$.

Donc $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$



Exercice 4

Résoudre mentalement les équations et inéquations suivantes d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = 3$ *b)* $x^2 = -6$ *c)* $x^2 = 12$ *d)* $x^2 < 25$ *e)* $x^2 \geq 36$.

a) $x^2 = 3$ a pour solutions : $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$

$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{3} ; \sqrt{3} \right\}$

b) $x^2 = -6$

$\mathcal{S} = \emptyset$

c) $x^2 = 12$

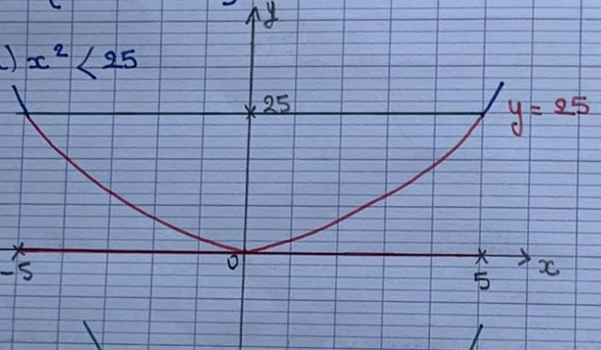
$x = -\sqrt{12} = -\sqrt{4 \times 3} = -\sqrt{4} \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

ou

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

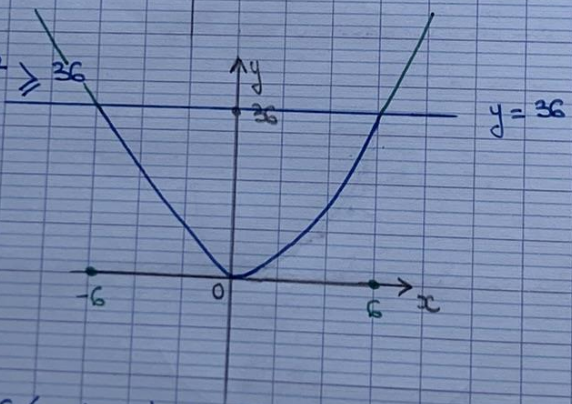
$\mathcal{S} = \left\{ -2\sqrt{3} ; 2\sqrt{3} \right\}$

d) $x^2 < 25$



$\mathcal{S} =]-5 ; 5[$

e) $x^2 \geqslant 36$



$x^2 \geqslant 36$ équivaut à dire que : $x \leqslant -6$ ou $x \geqslant 6$

$\mathcal{S} =]-\infty ; -6] \cup [6 ; +\infty[$

f) $(2x+3)^2 = 13$

Posons $X = 2x + 13$ (changement de variables) :

$(2x+3)^2 = 13$ s'écrit alors $X^2 = 13$

Donc $X = -\sqrt{13}$ ou $X = \sqrt{13}$

Ainsi : $2x + 3 = -\sqrt{13}$ ou $2x + 3 = \sqrt{13}$

$2x = -3 - \sqrt{13}$ ou $2x = -3 + \sqrt{13}$

$x = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} ; \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Complément : équations du second degré moins triviales, un pas vers la première !

Lemme : pour tous réels x et a : $x^2 + ax = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$ Forme canonique de l'expression x^2+ax

Preuve : $x^2 + ax = x^2 + 2 \times \dfrac{a}{2} \times x = x^2 + 2 \times \dfrac{a}{2} \times x + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$

Exemple : transformer comme dans le lemme : $x^2 + 4x$ puis $x^2 - x$.

$x^2 - x = x^2 - 2 \times x \times \dfrac{1}{2}$

$x^2 - 2 \times x \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$

$x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

$x^2 - x = \underbrace{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}}_{\text{forme canonique}}$ (**)

Application : utiliser cette technique pour résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$x^2 + 4x + 3 = 0$; $x^2 - x + 1 = 0$. Grâce à (**) : $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = 0$

$\underbrace{x^2 + 4x}_{(*) \text{ déjà vu}} + 3 = 0$

$(x+2)^2 - 4 + 3 = 0$

$(x+2)^2 - 1 = 0$

$(x+2)^2 = 1$ → Forme : $X^2 = 1$ qui a pour solution -1 et 1

Donc $x + 2 = -1$ ou $x + 2 = 1$

$x = -1 - 2 = -3$ ou $x = 1 - 2 = -1$

$\mathcal{S} = \{-3 ; -1\}$

$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0$

$\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-3}{4}$

$\mathcal{S} = \emptyset$ car $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$!

Remarque : avec cette technique, vous pouvez résoudre toutes les équations du second degré de la forme : $x^2+bx+c = 0$ *où b et c sont des réels.*

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^2 + 5x + 3 = 0$.

C) La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

Elle ne prend que des valeurs positives ou nulles.

Propriété

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

Preuve : Soient a et b deux réels tels que : $0 \leqslant a \leqslant b$: on sait que $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$.

Ainsi, $0 \leqslant a \leqslant b$ s'écrit encore sous la forme : $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$.

Or, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ou nuls, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (par croissance de la fonction carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$).

Par suite on a : $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ et la fonction racine carrée croit sur $[0\ ;\ +\infty[$.

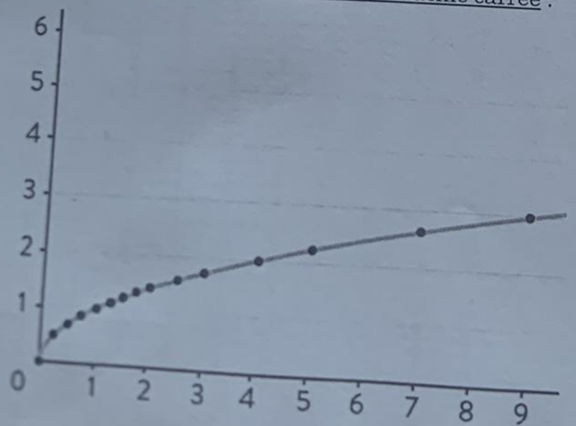
On retiendra donc que : ♥♥ $\boxed{0 \leqslant a \leqslant b \text{ équivaut à } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}}$.

En effet : si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Réciproquement, si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors comme les nombres $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$ sont positifs, et que la fonction carrée croît sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$ c'est-à-dire : $(0 \leqslant)\ a \leqslant b$.

x	$f(x)=\sqrt{x}$ à 0,1 près.
0	0
0.25	0.5
0.5	0.7
0.75	0.9
1	1
1.25	1.1
1.5	1.2
1.75	1.3
2	1.4
2.5	1.6
3	1.7
4	2
5	2.2
7	2.6
9	3

Courbe représentative de la fonction racine carrée :



Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$ b) $\sqrt{x} - 4 \geq 0$ c) $\sqrt{x} = -1$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leq 1$ e) $\sqrt{x} \geq -1$.

a) $\sqrt{x} < 2{,}5$

⚠ $\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geqslant 0$!

$\sqrt{x} < 2{,}5$ équivaut à : $0 \leqslant (\sqrt{x})^2 < 2{,}5^2$

$0 \leqslant x < 6{,}25$

2 nombres $\geqslant 0$ et leurs carrés sont rangés dans le même ordre !

$\mathcal{S} = [0 ; 6{,}25[$

b) $\sqrt{x} - 4 \geqslant 0$

$\sqrt{x} \geqslant 4$

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant 4^2$ car la fonction carré croît sur $[4 ; +\infty[$

$x \geqslant 16$

Donc $\mathcal{S} = [16 ; +\infty[$

c) $\sqrt{x} = -1$: $\mathcal{S} = \emptyset$ car pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$!

d) $3 - 4\sqrt{x} \leqslant 1$

$\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geqslant 0$

$3 - 4\sqrt{x} \leqslant 1$

$3 - 1 \leqslant 4\sqrt{x}$

$2 \leqslant 4\sqrt{x}$

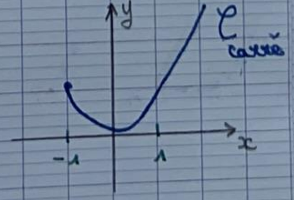
$\frac{2}{4} \leqslant \sqrt{x}$

$\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{2}$

Donc $(\sqrt{x})^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$ par croissance de la fonction carré sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$x \geqslant \frac{1}{4}$

$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$



e) $\sqrt{x} \geqslant -1$

⚠ Sur $[-1 ; +\infty[$, la fonction carré N'EST PAS MONOTONE.

$x \geqslant 0$ pour assurer l'existence de $\sqrt{x}$

Or $\sqrt{x} \geqslant 0 \geqslant -1$ Donc $\mathcal{S} = [0 ; +\infty[$

Exercice 6

Sans calculatrice, comparer les réels : $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ et $b = \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

$a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ $b = \sqrt{\sqrt{3}-1}$

$5 > 3$

Donc $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ car la fonction carré croît sur $[0;+\infty[$

Donc $\sqrt{5}-1 > \sqrt{3}-1$ (>0)

Donc par croissance de la fonction racine carré sur $[0;+\infty[$:

$\sqrt{\sqrt{5}-1} > \sqrt{\sqrt{3}-1}$ $(a > b)$

Exercice 7

Etudier, sur l'intervalle $[0 \; ; \; +\infty[$, la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

$f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$ avec $x \geqslant 0$

Rappel : $\mathcal{C}_f$ est placée au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f(x) > g(x)$ ou encore $f(x) - g(x) > 0$

Ici, $f(x) - g(x) = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ → factorisation

Or $x \geqslant 0$, donc $\sqrt{x} \geqslant 0$

Et $\sqrt{x} - 1 \geqslant 0$

$\sqrt{x} \geqslant 1$

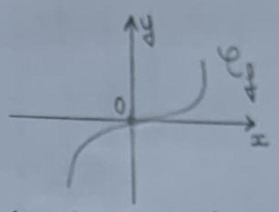
$x \geqslant 1$ (car la croissance de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$)

Ainsi : si $x \geqslant 1$, alors $f(x) - g(x) \geqslant 0$ (produit de 2 positifs)

$f(x) \geqslant g(x)$

Sur $[1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

D) La fonction cube



On rappelle que le cube d'un réel x est le nombre $x \times x \times x$ que l'on note x^3.

Par exemple, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Définition : La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Conséquence de la définition : la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$, donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

En effet, pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = (-x)^3 = (-1x)\times(-1x)\times(-1x) = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$.

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

<u>*Preuve*</u> :

Soient a et b deux réels tels que : $a \leq b$.

Comparons $f(a) = a^3$ et $f(b) = b^3$ en étudiant le signe de la différence $f(a) - f(b)$:

Or. $f(a) - f(b) = a^3 - b^3$.

Nous allons vérifier que pour tous réels a et b, on a les deux points suivants :

1) la factorisation suivante : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2) $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$.

Pour le point 1), on développe naïvement :

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ *(les termes de même couleurs se simplifient, on rappelle que le produit des réels est commutatif, donc $a^2b = ba^2$ et $ab^2 = b^2a$).*

Pour le point 2), on développe avec la première identité remarquable, puis on réduit le membre de droite :

$$(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2a \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2.$$

Grâce à 1) et 2), on peut donc dire que pour tous réels a et b, on a :

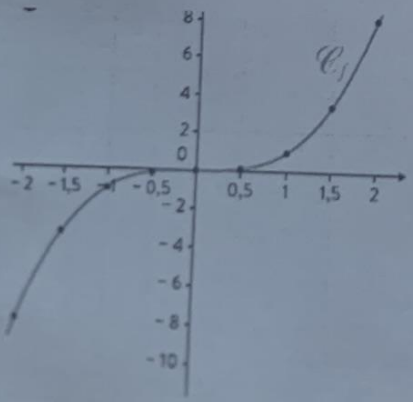
$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a-b)\left((a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \right).$$

Or, si $a \leq b$, alors $a - b \leq 0$, et $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ en tant que somme de deux termes positifs (le carré d'un réel est toujours positif ou nul et $\frac{3}{4} > 0$).

Par suite d'après la règle des signes d'un produit, $(a-b)\left((a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \right) \leq 0$.

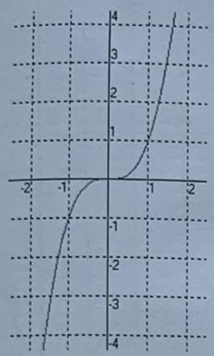
Donc $f(a) - f(b) \leq 0$, donc $f(a) \leq f(b)$. Par suite $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

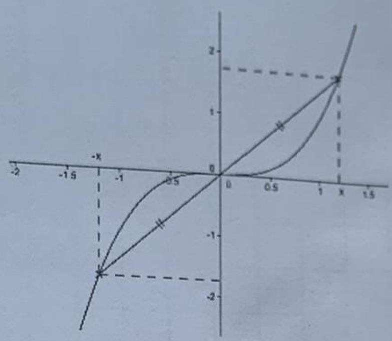
Tracé : grâce à une calculatrice ou un ordinateur on obtient la courbe représentative de la fonction cube : (Attention, le repère ci-dessous n'est pas orthonormé !)



x	x^3
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
-0,5	-0,125
0	0
0,5	0,125
1	1
1,5	3,375
2	8

En repère orthonormé :





Propriété

Soit k un nombre réel.

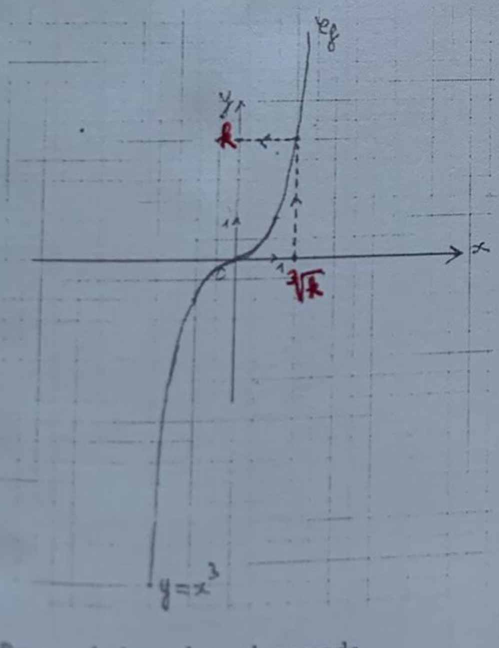
Considérons l'**équation :** $\boldsymbol{x^3 = k}$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

Cette équation admet une unique solution réelle, appelée la racine cubique de k et notée $\sqrt[3]{k}$

L'inéquation : $\boldsymbol{x^3 < k}$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]-\infty \; ; \; \sqrt[3]{k}\;[$.

L'inéquation : $\boldsymbol{x^3 > k}$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]\;\sqrt[3]{k} \; ; \; +\infty[$.

racine cubique de k



Preuve : admis en classe de seconde.

On retiendra que pour tout réel x, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$: l'unique réel qui élevé au cube est égal à x est la racine cubique de x.

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$
$\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[3]{4}$ a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule : $\sqrt[3]{4} \approx 1,587401052$

C'est là que la notation $\sqrt[3]{4}$ a toute sa pertinence !

Calculer mentalement : $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{-64}$

Réponse : $\sqrt[3]{1000} = 10$ car $10^3 = 1000$; $\sqrt[3]{-64} = -4$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$x^3 = 21$; $x^3 < 1$; $-125 \leq x^3 < 216$

$x^3 = 21$
$x = \sqrt[3]{21}$
$\mathcal{S} = \left\{\sqrt[3]{21}\right\}$

Remarque : $2 < \sqrt[3]{21} < 3$
car $2^3 = 8$ et $3^3 = 27$

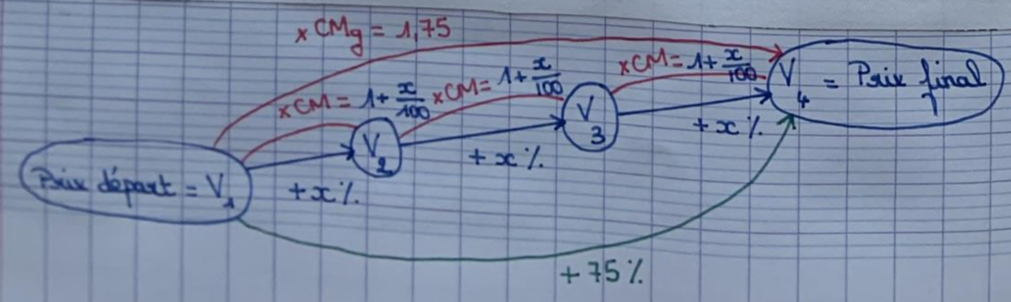
$x^3 < 1$ équivaut à : $\underbrace{\sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{1}}_{x < 1}$

$\mathcal{S} =]-\infty ; 1[$

$-125 \leq x^3 < 216$
$\sqrt[3]{-125} \leq \sqrt[3]{x^3} < \sqrt[3]{216}$
$-5 \leq x < 6$
$\mathcal{S} = [-5 ; 6[$

Exercice 9

Après trois hausses successives de même taux, le prix d'un article a augmenté de 75 %. Déterminer, à 0,1% près, le taux de chacune de ces augmentations.



On a donc : $CM_g = CM \times CM \times CM = CM^3$

$$1{,}75 = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3$$

Donc : $\sqrt[3]{1{,}75} = \sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{100}\right)^3} = 1 + \frac{x}{100}$

Donc $\sqrt[3]{1{,}75} - 1 = \frac{x}{100}$

$x = 100\left(\sqrt[3]{1{,}75} - 1\right)$

$\underline{x \simeq 20{,}5}$

Le taux d'augmentation a été de 20,5% à chaque fois.

<u>Propriété</u> *(position relative de courbes représentatives de fonctions de référence).*

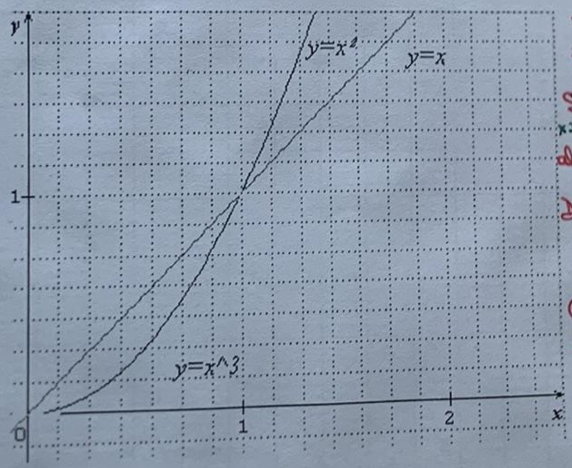
- *Pour tout réel x tel que* : $0 \le x \le 1$, on a : $x^3 \le x^2 \le x$

Donc sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe représentative de la fonction cube est située en dessous de celle de la fonction carrée, elle-même située en dessous de celle de la fonction identité (fonction qui à tout réel x associe ce même réel x).

- *Pour tout réel x tel que $x \ge 1$, on a :* $x^3 \ge x^2 \ge x$

Donc sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe représentative de la fonction cube est située au- dessus de celle de la fonction carrée, elle-même située au-dessus de celle de la fonction identité.

<u>Illustration et preuve</u> :



$x = 0{,}1$

$x^2 = 0{,}1^2 = 0{,}01 : 0{,}01 < 0{,}1$!

Si $0 \leq x^2 \leq 1$ $\times x$ avec $x \geq 0$

alors $0 \leq x^2 \leq x$ (*)

De même : Si $0 \leq x \leq 1$ $\times x^2$ avec $x^2 \geq 0$

alors $0 \leq x^3 \leq x^2$ (**)

(*) et (**) font que :

$x^3 \leq x^2 \leq x$.

<u>Preuve</u> :

Si $0 < x \le 1$, alors en multipliant par x chacun des membres de cette inégalité, il vient : $0 < x^2 \le x$, et en refaisant la même action, il vient que : $\mathbf{0 < x^3 \le x^2}$.

Par suite, par transitivité de la relation $<$, on a : $\mathbf{x^3 \le x^2 \le x}$.

Même principe si $x \ge 1$.

<u>Exercice 10</u>

a) En s'aidant d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4x^3 < 5x$.

b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3$ et $g(x) = 5x$.

a) $4x^3 < 5x$ $\big) -5x$

$-5x \big($ $4x^3 - 5x < 0$ $\big)$ factorisation

$x(4x^2 - 5) < 0$ ← factorisation again

Or $4x^2 - 5 = (2x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5})$ IR3

Donc : $x(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5}) < 0$

À partir de là, faisons un tableau de signes:

$2x + \sqrt{5} \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -\sqrt{5} \iff x \geqslant \frac{-\sqrt{5}}{2}$

$2x - \sqrt{5} \geqslant 0 \iff 2x \geqslant \sqrt{5} \iff x \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$

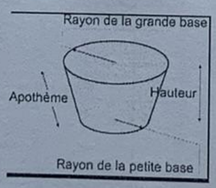
x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2x+\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $2x-\sqrt{5}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}) < 0$ lorsque : $x < \frac{-\sqrt{5}}{2}$ ou $0 < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\mathcal{S} =]-\infty ; \frac{-\sqrt{5}}{2}[\cup]0 ; \frac{\sqrt{5}}{2}[$

Exercice 11

Un chaudron a la forme d'un cône tronqué (figure ci-dessous) :



Le rayon du disque de la petite base mesure 10 cm et le rayon du disque de la grande base mesure 20 cm. Enfin, la hauteur (= segment dont les extrémités sont les centres de chacun des disques de base) est mesure 30 cm.

On remplit d'eau ce chaudron qui est vide au départ. On appelle x la hauteur d'eau dans le chaudron (dessin en coupe), et enfin Vla fonction qui à x associe le volume d'eau contenu dans le cône tronqué rempli à la hauteur x.

Le but de cet exercice est de donner l'expression de $V(x)$ en fonction de x.

a) A quel intervalle (noté I) le nombre x appartient-il ?

Le dessin ci-dessous est une coupe du demi-cône tronqué précédent :