Chapitre 10 Arithmétique et ensembles de nombres

I – Introduction

Les nombres, vous les manipulez depuis l'école maternelle ! Ils sont à l'origine des mathématiques !

Nous allons voir dans ce chapitre, les différents ensembles de nombres, ainsi que les propriétés essentielles de ces nombres.

II- L'ensemble des entiers naturels

Définition et notation

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ..... ; 2022 sont des exemples d'entiers naturels.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ comme naturel !).

On a : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots\ldots ; 10 ; 11 ; \ldots\ldots\}$.

Les entiers naturels sont donc les nombres avec lesquels on compte depuis son enfance.
Historiquement, voici comment procédaient les bergers : pour compter le nombre d'animaux dispersés dans un enclos, ils prenaient des cailloux, et à chaque caillou, correspondait un animal.

Caillou vient du latin *calculus* qui a donné le mot calcul !

Exemples : le nombre 15 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$: mathématiquement, cette phrase se note : $15 \in \mathbb{N}$

Par contre, le nombre -8 n'appartient pas à $\mathbb{N}$: on notera mathématiquement : $-8 \notin \mathbb{N}$.....

💣 On s'interdira, au sein d'une phrase écrite en français, tout symbole mathématique !

Ne surtout pas écrire : $3 \in$ l'ensemble des entiers naturels !

Remarques

$\mathbb{N}$ est un ensemble constitué d'une infinité d'éléments, qui sont tous des nombres positifs.

Il y a toujours un entier ***naturel*** qui succède à n'importe quel entier naturel.

Il n'existe donc pas de plus grand entier naturel !

Si n désigne un entier naturel, l'entier qui succède à n est égal à $n+1$

♥ Les entiers n et $n+1$.. sont appelés entiers consécutifs ♥

Dans $\mathbb{N}$, on peut toujours effectuer les opérations addition et multiplication : la ***somme*** (= *résultat de l'addition*) de deux entiers naturels, est un entier naturel ; le ***produit*** (= *résultat de la multiplication*) de deux entiers naturels est un entier naturel.

On dira que l'ensemble $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication.

💣 Par-contre, il n'en est rien concernant la soustraction et la division.

Pourquoi ? Pour la soustrac° : $1 \in \mathbb{N}$ et $3 \in \mathbb{N}$; $1-3 = -2$, $-2 \notin \mathbb{N}$ (car $-2 < 0$)

Pour la division : $1 \in \mathbb{N}$; $2 \in \mathbb{N}$ et $1 \div 2 = 0,5$ et $0,5 \notin \mathbb{N}$!

III- L'ensemble des entiers relatifs

Définition

L'ensemble formé par les entiers naturels ainsi que leurs opposés est appelé l'ensemble des entiers relatifs.

Rappelons que l'opposé d'un entier naturel a, n'est autre que l'entier relatif $-a$

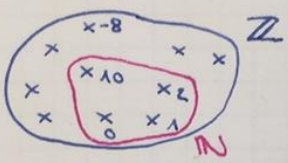
On le note $\mathbb{Z}$ (la notation $\mathbb{Z}$ vient du mot *zählen,* qui signifie, en allemand, entier !).

On a donc : $\mathbb{Z} = \{.....-4\ ;-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ .....\}$.

De par la définition, tout entier naturel est donc un entier relatif : on dira que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus (ou encore contenu) dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ce que l'on notera : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

↳ est inclus dans

Illustration ensembliste :



Remarque : L'affirmation : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ est-elle vraie ? Pourquoi ? Non car $-8 \in \mathbb{Z}$ et $-8 \in \mathbb{N}$, donc $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$

↳ n'est pas inclus dans

A l'oral comme à l'écrit, quand on dit qu'un nombre est entier, c'est sous- entendu, que c'est un entier relatif. Si on veut désigner un entier positif, il faut utiliser le terme entier naturel.

A présent, nous allons parler d'arithmétique, partie des mathématiques qui étudie les entiers.

Notons que la somme, la différence, et le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif.

IV- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Citer quatre nombres qui sont des multiples de 3 (être dans la table de 3.) : ....6 ; 9 ; 15 ; 42.....

De façon générale, comment noter un multiple de 3 quelconque ? ...3a avec a entier relatif...

Nous allons rigoureusement définir la notion de multiple d'un entier donné :

♥ ♥ *Définition (multiple/diviseur)* ♥♥

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que : a est un *multiple de* b s'il .existe un entier.....

...relatif k tel que : $a = b \times k$.....

Remarques

Si le nombre b est différent de 0, on dira également, lorsque a est un multiple de b, que b est un diviseur de a.

L'affirmation : b est un diviseur de a se note mathématiquement : b/a (b divise a)

Il faut savoir jongler entre les notions de multiples et de diviseurs. Attention, au sein d'une phrase en français, on s'interdira d'écrire : $b|a$!!

Exemples

45 est un multiple de 5 car : $45 = 5 \times 9$ et $9 \in \mathbb{N}$

22 est un diviseur de 110 car : $110 = 22 \times 5$ et $5 \in \mathbb{N}$

46 n'est pas un multiple de 7 car : connaissances des tables !

Remarques

0 est un multiple de n'importe quel entier relatif *a*, car : $0 = a \times 0$ avec $0 \in \mathbb{Z}$

L''unique entier naturel qui admet un seul diviseur est ...1...

Exercice 0

Soient *a*,*b* et *c* trois entiers relatifs.

Démontrer que si *a* est un multiple de *b* et si *b* est un multiple de *c*, alors *a* est un multiple de *c*.

| données | conclusion

a est un multiple de b signifie qu'il existe un entier relatif k tel que : $a = b \times k$.

De même, b est un multiple de c signifie qu'il existe un entier relatif l tel que : $b = c \times l$.

Donc $a = c \times l \times k$: $a = c \times lk$ avec lk entier relatif car l et k sont des entiers relatifs.

Donc a est un multiple de c.

Définition

Un entier est appelé ***nombre PAIR*** lorsque c'est ***un multiple de 2.***

La phrase : *"a est un entier pair"* se note mathématiquement : ♥♥ $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Un entier est appelé ***nombre IMPAIR*** lorsqu'il n'est ***pas un multiple de 2***, ou encore lorsqu'il n'est pas divisible par 2.

La phrase : "*a* est un entier impair " se note mathématiquement : ♥♥ $a = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Comprenons pourquoi en utilisant la division euclidienne vue au collège :

a	2
r	q

avec q : quotient entier
r : reste
2 : diviseur
a : entier naturel

ET $a = 2k + r$ et $0 \leq r < 2$ et r entier.

Cela laisse à possibilité : $r = 0$ ou $r = 1$

Si $r = 0$ alors : $a = 2q + 0 = 2q$, donc a serait PAIR en contradic° avec le fait que a est IMPAIR !

Donc $r \neq 0$ et par suite $r = 1$ et donc $a = 2q + 1$.

Exercice 1

Etablir que pour tout entier relatif n, le nombre $A = 4n^2 + 14n$ est un entier relatif pair.

$n \in \mathbb{Z}$ et $A(n) = 4n^2 + 14n$

$A(n) = 2 \times 2n^2 + 2 \times 7n$ } factorisation

$A(n) = 2(2n^2 + 7n)$

avec $2n^2 + 7n \in \mathbb{Z}$ car $n \in \mathbb{Z}$
$2 \in \mathbb{Z}$
$7 \in \mathbb{Z}$
et $\mathbb{Z}$ est stable par addi° et multiplica°

Exercice 2

a) Montrer que la somme de deux nombres impairs quelconques est paire.

b) Que dire de la somme de deux nombres entiers de parité différente ? Justifier.

c) Etudier la parité du produit de deux entiers impairs. Etudier les autres cas.
↳ pair / impair

d) En vous servant de la question *c)*, établir que si un entier a est impair, alors l'entier a^2 est impair.

e) En déduire que si a est un entier impair, alors l'entier $a^2 + 3a$ est un entier pair.

a) Soit n et m 2 entiers IMPAIRS :

Il existe de des entiers k et l tels que :

$n = 2k + 1$ et $m = 2l + 1$

Donc $n + m = 2k + 1 + 2l + 1$

$n + m = 2k + 2l + 2$

$n + m = 2(k + l + 1)$ avec $k + l + 1$ entier.

Donc $n + m$ est pair.

b) Que dire de la somme de 2 nb entiers de parité ≠ ?

Soit n un entier PAIR et soit m un entier IMPAIR.

Il existe k entier tel que : $n = 2k$ Il existe un entier l tel que : $m = 2l + 1$.

Donc : $n + m = 2k + 2l + 1$

$n + m = 2(k + l) + 1$ avec $k + l$ est entier

Donc $n + m$ est impair.

La somme de 2 entiers de parité différente est tjs impaire.

c) Soit n et m 2 entiers impairs :

Il existe donc des entiers k et l tels que : $n = 2k+1$ et $m = 2l+1$

- Donc $n \times m = (2k+1)(2l+1)$

$n \times m = 4kl + 2k + 2l + 1$

$nm = 2(2kl + k + l) + 1 = 2\lambda + 1$ avec $\lambda = 2kl + k + l$

λ est entier car somme et produit d'entiers

Donc nm est IMPAIR.

- Soit n pair et m impair :
Dc : $nm = 2k(2l+1) = 2w$ avec $w = k(2l+1)$ et w entier

Donc nm est pair.

- Enfin si n et m sont pairs :

Donc $n = 2k$ avec k entier

$m = 2l$ avec l entier

Donc $nm = 2k \times 2l = 2(2kl)$ avec kl entier.

Donc nm est pair.

Produit

m \ n	P	I
P	P	P
I	P	I

Somme

m \ n	P	I
P	P	I
I	I	P

d) a est impair. Donc a^2 est le produit de 2 nb impairs.

Dc d'après c), a^2 est impair.

e) a est impair : donc d'après q. d), a^2 est IMPAIR.

3 est impair.

Donc $3a$ est impair (cf. q. c.).

Enfin, $a^2 + 3a$ est pair car somme de 2 entiers impairs. (cf. q. a.)

f) Soit n un entier. Démontrer que si n^2 est un entier impair, alors n est un entier impair, par deux méthodes différentes :

i) En raisonnant par l'absurde.

ii) A l'aide du principe de contraposition que l'on va rappeler ci-dessous :

f) n^2 est impair → n impair / n pair

i) Raisonnons par l'absurde en supposant que n soit pair:

alors d'après d) n^2 serait pair.

Ainsi n^2 serait à la fois impair et pair : absurde !

Par suite, n est impair.

ii) Principe de contraposition :

En logiq l'affirmation : Si A ..., alors B ...

a même valeur de vérité que l'affirma° contraposée qui est :

Si non B ..., alors A ...

contraire de B — contraire de A.

Ex : Si un quadrilatère est un pgm (A), alors ses diagonales se coupent en leur milieu (B),

Cette affirma° a pour contraposée :

Si un quadrilatère n'a pas ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors ce n'est pas un pgm.

Si un entier a pr chiffre des unités 4, alors il est pair.

Contraposée : Si un entier est impair, alors il n'a pas pr chiffre des unités 4.

" Si n^2 est impair, alors n est impair"

↳ contraposée : Si n est pair, alors n^2 est pair : Vrai d'après c).

Par suite on a bien : " Si n^2 est impair, alors n est impair."

Exercice 3

Déterminer, mentalement, la parité de chacun des entiers suivants, c'est-à-dire déterminer si chacun d'eux est pair ou impair :

$A = 58978449^2 + 11$; $B = 3(10^{23} + 207)$

Rappelons (fondamental pour le calcul mental et la suite), les principaux critères de divisibilité :

Un entier a est divisible :

1. • *Par 2 si et seulement si* ~~son chiffre des unités est pair (soit 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).~~
2. • *Par 5 si et seulement si* ~~son chiffre des unités vaut 0 ou 5.~~
3. • *Par 3 si et seulement si* ~~la somme de ses chiffres est un multiple de 3.~~
4. • *Par 9 si et seulement si* ~~la somme de ses chiffres est un multiple de 9.~~

Exemples : 2457 est-il divisible par 9 ? 33445 est-il un multiple de 3 ?
2+4+5+7 = 18 et 18 = 2×9 donc oui ce nb est divisible par 9. || 3+3+4+4+5 = 19 et 19 n'est pas multiple de 3 donc 33445 n'est pas multiple de 3.

Justifions les trois premiers critères :

1. Soit a un entier :
Deux choses sont à justifier :

Supposons que le chiffre des unités soit pair et justifions que a est pair :

$a = 10d + u$ où $\begin{cases} d = \text{nb de dizaines de } a \\ u = \text{chiffre des unités de } a \end{cases}$

Or u est pair, donc $u = 2k$ où $k \in \{0;1;2;3;4\}$ car u est un chiffre.

Donc on a : $a = 10d + 2k$
$a = 2(5d + k)$ avec $5d + k$ est entier

Donc a est pair.

Réciproque, supposons a pair et montrons que u est pair.

Or, $a = 10d + u = 2\lambda$ avec λ entier car a est pair.

Donc : $u = 2\lambda - 10d = 2(\lambda - 5d)$ avec $\lambda - 5d$ est entier.

Donc u est pair.

3. Cas particulier d'un nb a qui est composé de trois chiffres.

$a = 100c + 10d + u$ où $\begin{cases} c = \text{chiffre des centaines} \\ d = \text{chiffre des dizaines} \\ u = \text{chiffre des unités} \end{cases}$

Supposons que a soit un multiple de 3 : montrons que $c + d + u$ est aussi un multiple de 3

Or $a = 100c + 10d + u = 3k$ où k entier

Donc : $c + 99c + d + 9d + u = 3k$

Donc : $c + d + u = 3k - 99c - 9d$

Donc : $c + d + u = 3(k - 33c - 3d)$ avec $k - 33c - 3d$ entier.

Donc $c+d+u$ est un multiple de 3.

Réciproque : On suppose ici que $c+d+u$ est un multiple de 3 où $a = 100c + 10d + u$.

But : Montrons que a est lui aussi un multiple de 3.

Or $a = 100c + 10d + u$
$a = c + 99c + d + 9d + u$
$a = 99c + 9d + \underbrace{c+d+u}_{3w} = 3(33c + 3d + w)$ avec $33c + 3d + w$ entier.

Propriété

Soit a un entier relatif quelconque.

La somme de deux multiples de a est encore un multiple de a.

Démonstration : Soit b et c deux multiples de a : on a donc : $\begin{cases} b = Ra \text{ où } R \text{ est entier} \\ c = \ell a \text{ où } \ell \text{ est entier} \end{cases}$

Donc $b+c = Ra + \ell a = a(R+\ell)$ avec $R+\ell$ entier.

Donc $b+c$ est un multiple de a.

Remarque : reformulé en : la somme de deux nombres tous deux dans la table de multiplication de l'entier a est un nombre de la table de cet entier a vous parlera peut-être plus ?

Preuve :

Exercice 4

1) Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs quelconques est un multiple de 3.

2) La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ?

↳ Non !

1) Soit n un entier naturel quelconque.

$n+1$ est le successeur de n
$n+2$ est le successeur de $n+1$.

Or $n + n + 1 + n + 2$ = la somme de 3 entiers consécutifs quelconque.

$= 3n + 3 = 3(n+1)$ avec $n+1$ entier

Donc la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

2) Contre-exemple

3. $1+2+3+4 = 10$ et 10 n'est pas multiple de 4.

Exercice 5

4334
1221

Un entier naturel N se composant de 4 chiffres est tel que son chiffre des unités est égal à son chiffre des milliers, et son chiffre des dizaines est égal à son chiffre des centaines.

Démontrer que N est un multiple de 11.

N s'écrit : $N = 1000m + 100c + 10d + u$ où m = chiffre des milliers
c = chiffre des centaines
d = chiffre des dizaines
u = chiffre des unités

Ici l'énoncé dit que : $m = u$ et $c = d$

Donc $N = 1000u + 100c + 10c + u$

Donc $N = 1001u + 110c$

Donc $N = 11 \times 91u + 11 \times 10c$

Donc $N = 11(91u + 10c)$ avec $91u + 10c$ entier

Donc N est un multiple de 11.

V- Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet, dans N, exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples

2 est un nombre premier car les seuls diviseurs positifs de 2 sont : 1 et 2.

De même, 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont quelques exemples de nombres premiers.

Le nombre 0 n'est pas premier. Pourquoi ? Car il admet une infinité de diviseurs ! $0 \times k = 0$ pr tt entier k.

Le nombre 1 est-il un nombre premier ? Non car il admet un seul diviseur : 1.

Un entier pair est-il un nombre premier ? Seul 2 est pair et premier. Si $n \geq 4$ et n pair alors n n'est pas premier car il a pr diviseurs : 1 ; 2 ; n au minimum.

Que peut-on dire de deux nombres premiers distincts (= différents) ? Donc au min 3 diviseurs distincts.

Deux nbs premiers distincts ont pr unique diviseur commun 1.

En effet, soit p et q deux nbs premiers distincts ($p \neq q$)

Les diviseurs de p sont : $D_p = \{1 ; p\}$

Les diviseurs de q sont : $D_q = \{1 ; q\}$

Donc $D_p \cap D_q = \{1\}$

Définition : (Nombres premiers entre eux)

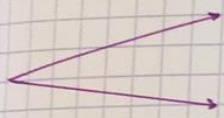
Deux entiers naturels n et m sont dits *premier entre eux* lorsque *leur seul diviseur commun est 1*.

Mini propriété fort utile

Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

On a l'alternative suivante : ou bien p divise n, ou bien p et n sont premiers entre eux.

Preuve :



Soit p divise n

Soit p ne divise pas n : Or $\mathcal{D}_p = \{1; p\}$ car p est premier et p ne divise pas n,

donc $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_n = \{1\}$.

Donc n et p sont premiers entre eux !

Théorème

1) Tout entier naturel $N \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

2) Si N est NON PREMIER avec $N \neq 1$, alors N admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{N}$.

Preuve : admise en seconde pour le 1).

Preuve du 2) : N n'est pas premier et $N \neq 1$, donc $N \geqslant 4$: D'après 1), il existe donc un nb premier p qui divise N : $N = pk$ avec k entier supérieur ou égal à 2.

↳ Donc d'après 1), k admet un diviseur premier q.

Donc $k = ql$ où $l \geqslant 1$

Par suite, $N = pql$ et $l \geqslant 1$

Par l'absurde supposons tous les diviseurs premier de N strictement supérieurs à $\sqrt{N}$: on aurait donc : $p > \sqrt{N}$ (>0), $q > \sqrt{N}$ (>0)] Donc $pq > \sqrt{N} \times \sqrt{N}$, donc $pq > N$

donc $pql > Nl \geqslant N$ car $l \geqslant 1$

Donc $N > N$: absurde !

D'où le résultat.

Test de primalité *(permet de savoir si un entier est premier ou pas)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

Pourquoi ?

Ceci n'est que la contraposée de 2 du 2) du précédent théorème !

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

$L = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97\}$

Connaître par coeur cette liste augmente la rapidité en calcul algébrique !

Culture

- ✓ Un entier autre que 1 qui n'est ***pas premier*** est appelé ***entier composé***.
- ✓ Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier !

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou bien peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

Cette propriété sera justifiée en terminale !

Remarque : les nombres premiers sont aux entiers naturels ce que les lettres sont aux mots !

Remarque : ce test de primalité fournit un critère d'arrêt dans la recherche des diviseurs premiers d'un entier naturel donné.

Exemple : Déterminer si le nombre 149 est premier ou pas.

$N = 149$ donc $\sqrt{N} = \sqrt{149} \approx 12,2$.

Les nbs premiers inférieurs à $\sqrt{149}$ sont : $\{2; 3; 5; 7; 11\}$

↳ ne divise pas

$2 \nmid N$; $3 \nmid N$; $5 \nmid N$; $7 \nmid N$; $11 \nmid N$, Donc 149 est premier !

Application : *le crible* d'*Erathostène*

Dresser la liste L des nombres premiers inférieurs à 100 en s'aidant du tableau suivant :

/ : Non premier

: premier

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 6

Décomposer en produit de facteurs premiers :

84 ; 760 ; 217 ; 99999

$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

$760 = 76 \times 10 = 2 \times 38 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 19 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5 \times 19$

$99999 = 11111 \times 9 = 11111 \times 3 \times 3 \times 41 \times 271$

VI – Ensembles de nombres

A-Ensemble des nombres décimaux

Les nombres entiers permettent de construire de nouveaux ensembles de nombres.

Depuis l'école primaire, vous connaissez les nombres décimaux : les écoliers les reconnaissent par la présence d'une virgule, et par le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

C'est par exemple le cas des nombres suivants : 2,236 ; -4,5 ; 11,001.

Donnons une définition rigoureuse de nombre décimal :

Définition

Un nombre N est dit décimal lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $N = \frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : on a donc : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^p} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ avec $5 \in \mathbb{Z}$ et $10 = 10^1$ donc $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$.

$\frac{-4}{25} = \frac{-16}{100}$ avec $-16 \in \mathbb{Z}$: donc $\frac{-4}{25} \in \mathbb{D}$.

Exercice 7

1) Expliquer pourquoi, les nombres $\frac{1}{2}$; $-\frac{4}{25}$ sont des décimaux au sens de la définition donnée.

2) Expliquer pourquoi tout entier relatif est un décimal.

On a donc l'inclusion suivante : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$..... et par suite : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

↑ contenue dans

→ Soit a un entier relatif : $a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0}$ donc a est décimal.

Exercice 8

Démontrer que le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

Soit N et M deux nbs décimaux :

Cela signifie que : $N = \frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

et $M = \frac{b}{10^q}$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$

Donc : $N \times M = \frac{a}{10^p} \times \frac{b}{10^q} = \frac{a \times b}{10^p \times 10^q} = \frac{ab}{10^{p+q}}$ avec $ab \in \mathbb{Z}$ et $p+q \in \mathbb{N}$

Donc : $N \times M$ est décimal.

Exercice 9 clé

Démontrer que lorsqu'on divise un entier (quelconque) par une puissance entière de 2 ou de 5 on obtient toujours un décimal.

Application : pourquoi $\frac{13589}{32}$; $\frac{248762}{125}$; $\frac{27896333}{2500}$ sont-ils des décimaux ?

Soit a un entier et $p \in \mathbb{N}$: $\frac{a}{2^p}$ → on divise a par une puissance entière de 2.

Montrons que $\frac{a}{2^p}$ est un décimal.

Or $\frac{a}{2^p} = \frac{a \times 5^p}{2^p \times 5^p} = \frac{a \times 5^p}{10^p}$ avec $a \times 5^p$ entier.

Donc $\frac{a}{2^p} \in \mathbb{D}$

De même : $\frac{a}{5^q} = \frac{a \times 2^q}{5^q \times 2^q} = \frac{a \times 2^q}{10^q}$ avec $a \times 2^q$ entier

Donc $\frac{a}{5^q} \in \mathbb{D}$.

Application : $\frac{13589}{32} = \frac{13589}{2^5}$

Donc ĉ 13589 est entier, on a $\frac{13589}{32} \in \mathbb{D}$.

$\frac{248762}{125} = \frac{248765}{5^3}$ et $248762 \in \mathbb{N}$ donc $\frac{248762}{125} \in \mathbb{D}$.

$\frac{27896333}{2500} = \frac{27896333}{5^4 \times 2^2}$ car $2500 = 25 \times 100 = 5^2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 5^4 \times 2^2$.

$= \frac{27896333}{5^4} \times \frac{1}{2^2}$

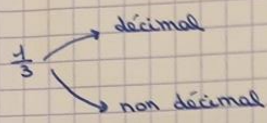
$\uparrow \in \mathbb{D}$ $\uparrow \in \mathbb{D}$

Donc $\frac{27896333}{2500}$ est le produit de 2 décimaux donc un nb décimal.

Exercice 10

Démontrer que le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. ⇨ raisonnement par l'absurde

Démonstration du fait que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.



On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Donc $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Donc par produit en croix : $1 \times 10^p = 3 \times a$

donc $3a = 10^p$

donc 10^p est un multiple de 3 (car égal à 3× un entier).

donc $\underbrace{100\ldots0}_{p \text{ zéros}}$ est un multiple de 3.

D'après le critère de divisibilité par 3, on aurait alors : $\underbrace{1+0+0\ldots+0}_{p \text{ fois}}$ serait multiple de 3

càd 1 serait multiple de 3 : absurde !

Donc l'hypothèse : $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ conduit à une contradic°, donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

→ $\frac{1}{3}$ s'écrit avec une écriture à virgule qui a une infinité de chiffres non nuls après la virgule.

$\frac{1}{3} \rightarrow 0,333333\ldots$

↑ les pointillés signifient qu'on ne s'arrête pas (infinité de 3).

Exercice 11

Voici une affirmation : déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant :

Affirmation : *"Le quotient de deux nombres décimaux non nul est un nombre décimal"*.

Faux ! $a = 0,1$ et $b = 0,3$: $a \in \mathbb{D}$ et $b \in \mathbb{D}$

et $\frac{a}{b} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$!

Donc faux : le quotient de 2 décimaux n'est pas nécessairement un décimal !

B- Ensemble des nombres rationnels

ratio signifie en latin la raison.

Historiquement, les Grecs appelaient nombres *commensurables* tout nombre égal au quotient de deux nombres entiers : par exemple $\frac{2}{3}$; $-\frac{4}{7}$; $\frac{1}{200}$ sont de tels nombres.

Le terme *commensurable*, démodé, se nomme rationnel depuis plus d'un siècle !

Définition

On appelle *nombre rationnel* tout nombre qui peut s'écrire sous forme fractionnaire $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif, et b un entier naturel non nul : a est appelé *le numérateur* de la fraction et b son *dénominateur* !

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On a donc : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exemples : $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$; $\frac{-3}{5} \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{2022}{2023} \in \mathbb{Q}$ ....

Remarque

Expliquer pourquoi tout nombre décimal est un nombre rationnel.

Soit N un nb décimal : $N = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier

Donc N est bien le quotient de 2 entiers avec $10^p \neq 0$.

Donc $N \in \mathbb{Q}$

On a donc : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

L'inclusion réciproque, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ est-elle vraie ? Faux ! Car $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ (d'après ex 10).

On retiendra donc qu'on a les inclusions d'ensembles suivantes et que ces dernières sont strictes :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Propriété

Tout nombre rationnel x admet une ***forme irréductible unique*** : il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b non nul, tel que : $x = \frac{a}{b}$ avec ***a et b premiers entre eux.***

Exercice 12

Donner la forme irréductible de chacun des nombres rationnels suivants :

$\frac{200}{75}$; $\frac{136}{36}$; $-\frac{40}{55}$.

$\frac{200}{75} = \frac{5 \times 40}{5 \times 15} = \frac{40}{15} = \frac{5 \times 8}{5 \times 3} = \frac{8}{3}$.

$\frac{136}{36} = \frac{2 \times 68}{2 \times 18} = \frac{68}{18} = \frac{2 \times 34}{2 \times 9} = \frac{34}{9}$.

$\frac{-40}{55} = \frac{-8 \times 5}{11 \times 5} = \frac{-8}{11}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient déjà *"beaucoup"* de nombres, et a la particularité d'être stable par addition, soustraction, multiplication et division.

Comment reconnaitre des nombres rationnels ?

Comment reconnait-on un nombre rationnel lorsque ce dernier est écrit en écriture décimale (= avec la virgule !) ?

- S'il y a un nombre fini de chiffres après la virgule dans son écriture décimale, on est en présence d'un nombre décimal.
- Sinon, si l'écriture décimale d'un nombre comporte une infinité de chiffres après la virgule, on admet qu'un nombre est rationnel non décimal, si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il y a répétition d'un même bloc de chiffres à partir d'un certain rang.

Exemples

12,265 est un nombre décimal.

4,121212..... est un nombre rationnel (non décimal)

12,15787878.... est un nombre rationnel (non décimal)

On remarquera la nécessité des pointillés dans les deux dernières écritures décimales, qui signifient que la répétition des chiffres se poursuit sans s'arrêter (il y a donc une infinité de chiffres après la virgule !).

On peut légitimement penser qu'on a fait le tour de l'ensemble de tous les nombres connus !

Or, rien n'empêche de concevoir qu'il existe des nombres dont l'écriture décimale comporte une infinité de chiffres après la virgule, sans être périodique à partir d'un certain rang pour autant, et donc que $\mathbb{Q}$ ne contient pas tous les nombres de l'univers !

Prenons par exemple le nombre : 0,12345678910111213141516171819202122232425.....

Il a une infinité de chiffres après la virgule, et manifestement la partie décimale n'est pas périodique !

Nous allons prouver que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : ceci montrera que l'ensemble $\mathbb{Q}$ construit précédemment ne contient pas tous les nombres.

Exercice 13

On se propose de démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers (on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe des entiers a et b (non nuls) tels que :

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible (= qu'on ne peut plus simplifier).

i) Montrer qu'alors $a^2 = 2b^2$.

ii) En déduire que a^2 est pair, puis que a est pair.

iii) En déduire que b^2 est pair, puis que b est pair.

iv) Relever une contradiction et conclure.

On suppose que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a, b entiers naturels non nuls et $\frac{a}{b}$ irréductible
càd a et b sont premiers entre eux.

i) 2 nbs égaux ont le même carré, donc :

$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ donc $2 = \frac{a^2}{b^2}$ donc par produit en croix : $a^2 = 2b^2$

ii) On a : $a^2 = 2b^2$ avec b^2 entier donc a^2 est un multiple de 2, donc a^2 est pair.

Donc (ex 2) : a est pair.

iii) D'après ii) a est pair, donc : $a = 2p$ où p est entier.

Et d'après i) on a : $a^2 = 2b^2$ donc $(2p)^2 = 2b^2$

donc $4p^2 = 2b^2$

Donc $b^2 = \frac{4p^2}{2} = 2p^2$ avec p^2 entier, donc b^2 est pair.

D'après l'ex 2, on a : b est pair.

iv) D'après ii) et iii) on aurait alors : a et p pairs.

Donc $\frac{a}{b}$ serait simplifiable par (au-) 2, donc ne serait pas irréductible : contradic° au fait que $\frac{a}{b}$ est irréductible !

Par suite $\sqrt{2}$ n'est pas un nb rationnel.

Culture : ce nombre mystérieux $\sqrt{2}$ a permis aux grecs de faire émerger un nouvel ensemble de nombre, l'ensemble des nombres irrationnels (irrationnels signifiant contraire à la raison).

Pendant des siècles, les Grecs pensaient que tout nombre était commensurable, c'est-à-dire qu'on pouvait l'écrire sous forme de quotient de deux entiers, jusqu'à ce qu'Euclide, (6 siècles avant notre ère) démontre l'incommensurabilité du nombre $\sqrt{2}$ (qui existe géométriquement comme longueur des diagonales d'un carré de côté 1).

Il existe plusieurs démonstrations différentes pour prouver l'irrationnalité du nombre $\sqrt{2}$, on vient d'en voir une !

Définition

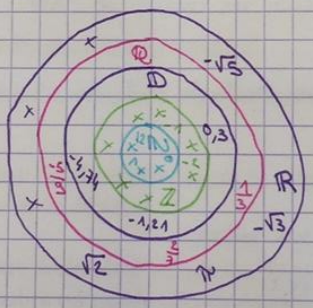
Un nombre réel est un nombre dont l'écriture décimale comporte un nombre fini ou infini de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

Des nombres comme π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$ sont des exemples de nombres réels.

Conséquence de la définition : On a la chaîne d'inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Représentation ensembliste :



Exercice 14

Déterminer, à quel ensemble de nombres, (le plus *"petit"* possible) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, appartiennent chacun des nombres suivants :

a) 0,554 *b)* $\frac{8}{25}$ *c)* $-\frac{49}{7}$ *d)* $-\frac{3}{7}$ *e)* 10^{-3} *f)* $\frac{\pi}{2}$ *g)* $\frac{750}{15}$

a) $0,554 \in \mathbb{D}$ b) $\frac{8}{25} = \frac{8\times4}{25\times4} = \frac{32}{100} = 0,32$ donc $\frac{8}{25} \in \mathbb{D}$ c) $\frac{-49}{7} = -7$ donc $\frac{-49}{7} \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{-3}{7} \in \mathbb{Q}$ e) $10^{-3} = 0,001$ donc $10^{-3} \in \mathbb{D}$

f) $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ g) $\frac{750}{15} = 50$, donc $\frac{750}{15} \in \mathbb{N}$.

Exercice 15

Compléter les pointillés à l'aide de l'un des symboles suivants : $\in, \notin, \subset, \not\subset$:

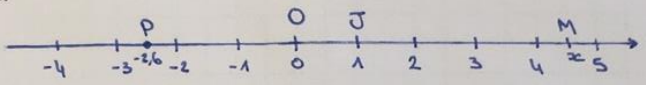
a) $-1 \ldots \in \ldots \mathbb{Q}$ *b)* $\mathbb{Q} \ldots \not\subset \ldots \mathbb{N}$ *c)* $-\frac{3}{2} \ldots \in \mathbb{Q}$ *d)* $\pi \ldots \notin \ldots \mathbb{D}$ *e)* $\mathbb{N} \ldots \subset \ldots \mathbb{Q}$ *f)* $-0{,}33333333 \ldots \in \ldots \mathbb{Q}$

g) $\frac{1}{5} \ldots \in \ldots \mathbb{D}$

Terminons par une propriété qui donne une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

Considérons une droite graduée, c'est-à-dire une droite munie d'une origine O, à laquelle on associe le nombre 0, et sur laquelle est placé un point I auquel on fait correspondre le nombre 1 : on peut alors graduer la droite.

Illustration :



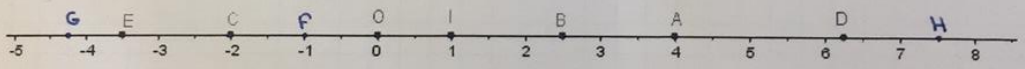
A chacun des points de cette droite, est associé un unique réel, appelé l'abscisse du point.

Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.

Ainsi, l'ensemble des nombres réels peut être vu comme un ensemble sans trou.

Exercice 16

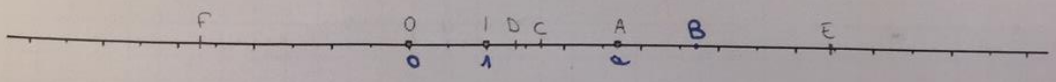
a) Associer à chacun des points de la droite graduée ci-dessous un réel :



$x_E = -3{,}5$; $x_C = -2$; $x_B = 2{,}5$; $x_A = 4$; $x_D = 6{,}25$; $x_O = 0$ et $x_I = 1$

b) Placer sur la précédente droite graduée, les points F, G et H d'abscisses respectives : -1 ; -4,25 ; 7,5.

c) Sur la droite graduée ci-dessous, on a placé le point I ayant pour abscisse 1, et le point A ayant pour abscisse un réel a dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur.



Construire, de façon rigoureuse, le point B d'abscisse $a+1$; C d'abscisse $a-2$; D d'abscisse $\frac{a}{2}$ (médiatrice de OA)

E d'abscisse $2a$ et F d'abscisse $-a$.