Chapitre 10	Equations de droites et systèmes

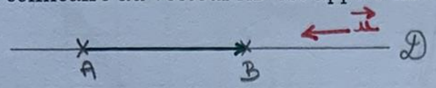
I-Vecteur directeur d'une droite et équations cartésiennes d'une droite

Définition

Soient A et B deux points distincts appartenant à une même droite $\mathscr{D}$.

Tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Illustration :



Remarque : une droite donnée admet donc une infinité de vecteurs directeurs deux à deux colinéaires.

On dit aussi que $\vec{u}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ pour dire que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

← $x_B - x_A = -1-1$

Exemple : Dans un repère du plan, si A(1 ; -4) et B(-1 ; 2), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la

← $y_B - y_A = 2-(-4) = 2+4 = 6$

droite (AB), tout comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

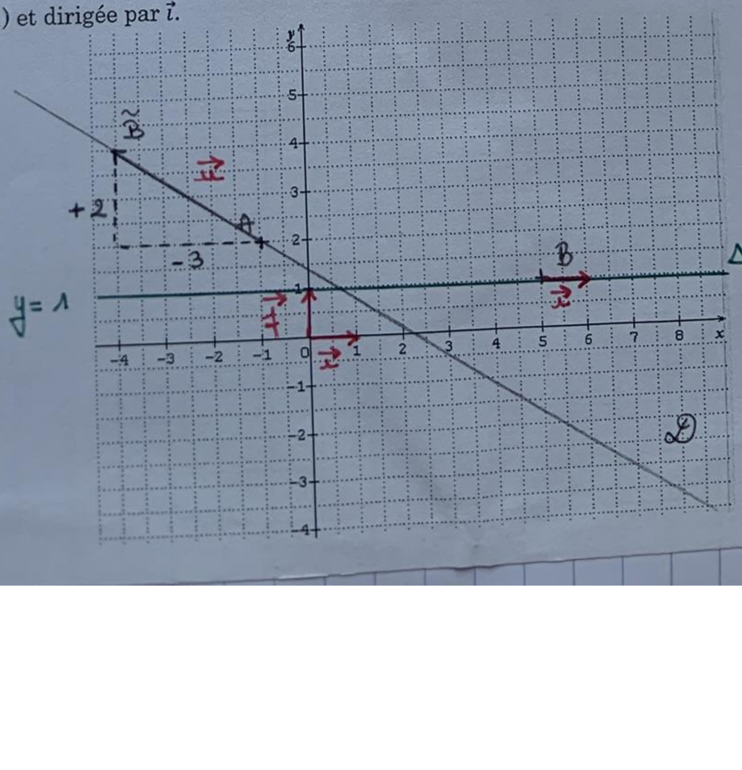
> **Propriété**
>
> Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
>
> Il existe une unique droite $\mathscr{D}$ passant par A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.
>
> $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
>
> c'est-à-dire tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

✂- -

Exercice 1 Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ ci-dessous, construire :

a) La droite $\mathscr{D}$ passant par A(-1 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. ← On place $\tilde{B}$ tel que : $\overrightarrow{A\tilde{B}} = \vec{u}$

b) La droite Δ passant par B(5 ; 1) et dirigée par $\vec{\imath}$.



Or $f(x) - f(0) = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - 2 = \dfrac{9x^2+4}{2(x^2+1)} - \dfrac{2}{1}$

$f(x) - f(0) = \dfrac{9x^2+4-4(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \dfrac{9x^2+4-4x^2-4}{2(x^2+1)}$

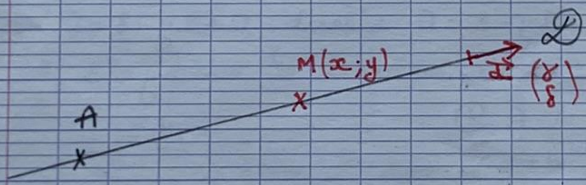
$f(x) - f(0) = \dfrac{5x^2}{2(x^2+1)}$

$x^2 \geqslant 0$; $5 > 0$, donc $5x^2 \geqslant 0$
$2 > 0$; $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, donc $2(x^2+1) > 0$
Ainsi $\dfrac{5x^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0$ (règle des signes)

__Donc :__ $f(x) - f(0) \geqslant 0$
$f(x) \geqslant f(0)$

__f admet donc par minimum $f(0) = 2$ sur $\mathbb{R}$.__

p 2. Preuve



$\mathcal{D}$ passe par $A(\alpha;\beta)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$
$M(x;y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.

$$\boxed{M(x;y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{d}) = 0}$$

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}$ $\vec{d}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$

Donc : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{d}) = \begin{vmatrix} x-\alpha & \gamma \\ y-\beta & \delta \end{vmatrix}$

$= \delta(x-\alpha) - \gamma(y-\beta)$

Ainsi : $M(x;y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \delta(x-\alpha) - \gamma(y-\beta) = 0$

$\iff \underbrace{\delta x - \gamma y - \delta\alpha + \gamma\beta = 0}$

c'est de la forme : $\boxed{ax + by + c = 0}$

Pour qu'on pose : $\left[\begin{array}{l} a = \delta \\ b = -\gamma \\ c = -\delta\alpha + \gamma\beta \end{array}\right.$

Mieux $\vec{d}\begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$ $\longleftarrow$

Ceci est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Exercice 2 :

a) Pour $x = 1$ et $y = 1$: $1 + 2 \times 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

Donc $A(1;1) \in \mathcal{D}$.

Pour $x = 0$: $x + 2y - 3 = 0$ s'écrit : $0 + 2y - 3 = 0$

$2y = 3$

$y = \frac{3}{2}$

Donc $B\left(0; \frac{3}{2}\right) \in \mathcal{D}$

Pour $x = 3$, l'équation s'écrit : $3 + 2y - 3 = 0$

Donc $C(3;0) \in \mathcal{D}$

$2y = 0$

$y = 0$

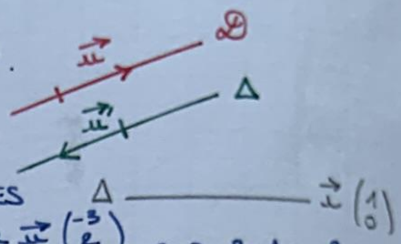
De même : $E(0{,}5; 1{,}25) \in \mathcal{D}$

$F(7;-2) \in \mathcal{D}$

$G(6;-1{,}5) \in \mathcal{D}$

$H(21;-9) \in \mathcal{D}$

$\mathcal{D}$ a pour équation : $\underbrace{x + 2y - 3}_{\text{de la forme : } ax + by + c = 0} = 0$



Remarque importante

Soient $\mathcal{D}$ et Δ deux droites respectivement dirigées par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

$\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont..COLINÉAIRES...

$\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas ..COLINÉAIRES

$\mathcal{D}$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Dans l'exemple précédent, $\mathcal{D}$ et Δ sont SÉCANTES.. car : $\det(\vec{u};\vec{i}) = \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -3\times 0 - 2\times 1 = -2$

$-2 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{i}$ ne sont pas colinéaires et $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes.

♥♥ *Théorème XL* ♥♥

Quelle que soit la droite $\mathcal{D}$ du plan, il existe trois réels a, b et c, tels que, pour tout point $M(x\,;y)$ du plan, M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si : $\boxed{ax + by + c = 0.}$

De plus, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Preuve :

✂--

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

L'équation : $\boxed{ax + by + c = 0}$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;0)$ est appelée une ***équation cartésienne*** de la droite $\mathcal{D}$ dont un vecteur directeur est : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Remarques

- $M(x_M\,;y_M)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ si et seulement si les coordonnées de M rendent vraies l'égalité précédente (on dit fréquemment que les coordonnées du point M vérifient l'équation : $ax + by + c = 0$), c'est-à-dire lorsqu'on a : $a\times x_M + b\times y_M + c = 0$
- Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes : par exemple, $x + 2y + 5 = 0$ est une équation de droite, $4x + 8y + 20 = 0$ est une autre équation de cette même droite, tout comme : $0{,}5x + y + 2{,}5 = 0$, ou encore : $-3x - 6y - 15 = 0$ *etc*……

Exercice 2

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne : $x + 2y - 3 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, ainsi que les coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Construire la droite $\mathcal{D}$ dans le repère ci-dessous :

Or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-(-1)=x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AM};\vec{u})=0$ équivaut à $\begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y-2 & 4 \end{vmatrix}=0$

$4(x+1)-(y-2)\times(-3)=0$
$4x+4-(-3y+6)=0$
$4x+4+3y-6=0$
Donc $4x+3y-2=0$ est une équation de $\mathcal{D}$.

2) Δ a pour équation cartésienne : $y+1=0$
$0x+1y+1=0$
De la forme $ax+by+c=0$ avec : $a=0$
$\vec{u}\begin{pmatrix} -b=-1 \\ a=0 \end{pmatrix}$ dirige Δ $\quad b=1$
Donc $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige aussi Δ $\quad c=1$
Δ passe par le point $P(0;-1)$
Δ est parallèle à l'axe des abscisses.
Δ est appelé droite horizontale
Δ a pour équation $y=-1$

3) $\vec{v}\begin{pmatrix} -b=-2 \\ a=1 \end{pmatrix}$ dirige d $\quad$ Ici : $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$ $\quad ax+by+c=0$

Montrons que $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\det(\vec{v};\vec{j})=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\times1-1\times0=-2$
$-2\neq0$, donc $\vec{v}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.
Donc d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
d non verticale.

$x+2y-1=0$

avec : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$ Donc $\vec{d}\begin{pmatrix} -b = -2 \\ a = 1 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$.

b) $B(51 ; -24)$

On calcule : $x_B + 2y_B - 3 = 51 + 2 \times (-24) - 3$

$x_B + 2y_B - 3 = 51 - 48 - 3 = 3 - 3 = 0$

$\boxed{\text{Donc } B(51 ; -24) \in \mathcal{D}}$

$C(-150 ; 76)$

$x_C + 2y_C - 3 = -150 + 2 \times 76 - 3 = -150 + 152 - 3 = 2 - 3 = -1$

$-1 \neq 0$ donc $\boxed{C \notin \mathcal{D}}$

Exercice 3 :

M_1 : On utilise le théorème XL du cours

Ici $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

avec $\begin{cases} -b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$ donc $a = 4$ et $b = 3$

Donc $\mathcal{D}$ a pour équation : $4x + 3y + c = 0$

$A(-1 ; 2) \in \mathcal{D}$ donc : $4x_A + 3y_A + c = 0$

$4 \times (-1) + 3 \times 2 + c = 0$

$-4 + 6 + c = 0$

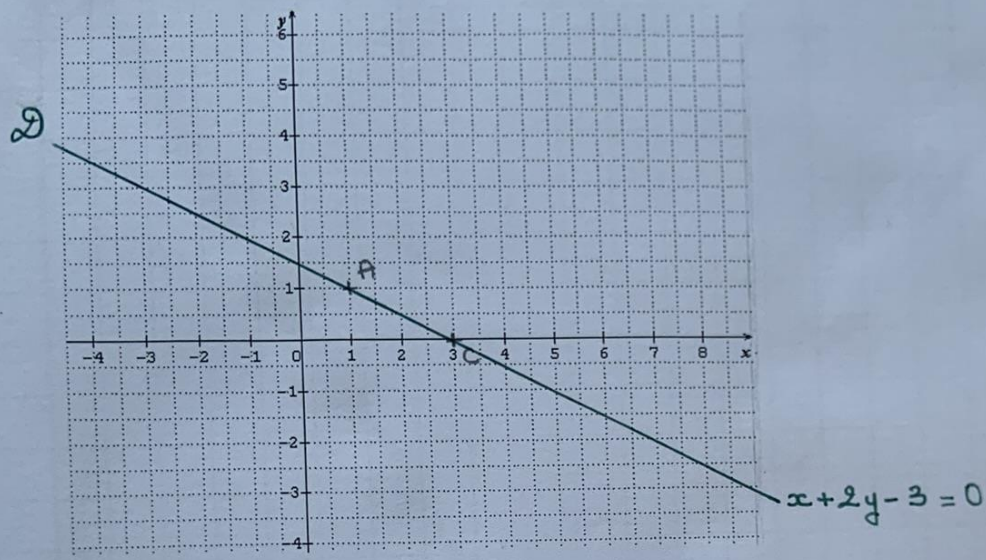
$2 + c = 0$

$c = -2$

$\mathcal{D}$ a pour équation

$4x + 3y - 2 = 0$

M_2 : $M(x ; y) \in \mathcal{D}$ équivaut à : $\underbrace{\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}}_{\det(\overrightarrow{AM} ; \vec{u})}$



b) Le point $B(51\,;-24)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$? Même question avec $C(-150\ ;\ 76)$.

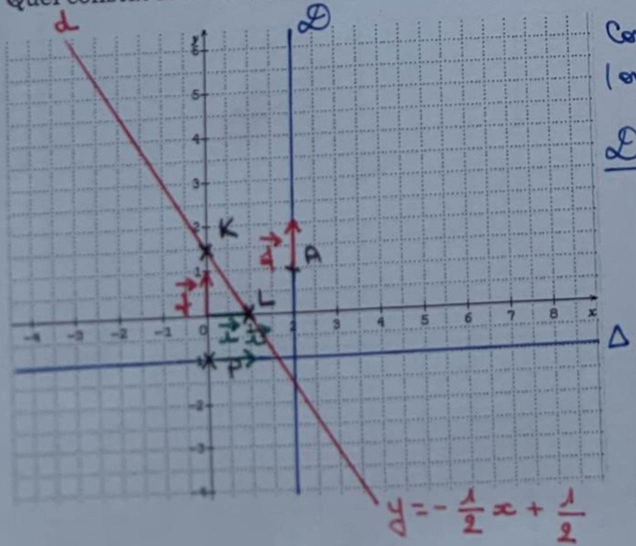
Exercice 3

Déterminer, par deux méthodes différentes, une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(-1 ; 2) et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

II – Equation réduite d'une droite

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2\ ;1)$ et dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. La tracer dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.

Quel constat fait-on ? Comment nommeriez-vous une telle droite ?



Constat : $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées (ou encore $\mathscr{D}$ est verticale)

$\mathscr{D}$ a pour équation : $x=2$

2) Soit Δ la droite dont une équation cartésienne est : $y + 1 = 0$. Trouver un vecteur directeur de Δ et la construire dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Constat ?

3) Soit $\boldsymbol{d}$ la droite dont une équation cartésienne est : $x + 2y - 1 = 0$.

Expliquer pourquoi cette droite est non parallèle à l'axe des ordonnées.

Isoler y dans l'équation cartésienne de $\boldsymbol{d}$.

✂---

Propriété et définition

Dans un repère orthogonal :

- Toute droite $\mathscr{D}$ ***non verticale*** du plan admet une unique équation de la forme : $\boxed{y = mx + p.}$
  Cette dernière équation est appelée ***l'équation réduite*** de la droite $\mathscr{D}$.
- Toute droite ***verticale*** admet une unique équation de la forme : $\boldsymbol{x = k}$ où k est un réel.

L'équation est ***réduite*** lorsque ***y est isolé***, c'est-à-dire $\boldsymbol{y = mx + p}$.

Tous les points appartenant à une ***même droite verticale ont la même abscisse***, d'où la forme des équations des droites verticales : $\boldsymbol{x = k}$.

Preuve :

$\mathscr{D}$ est une droite du plan, donc elle admet comme équation cartésienne : $\boldsymbol{ax + by + c} = 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

De plus, $\mathscr{D}$ n'est pas verticale, donc $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $det(\vec{u}\ ;\vec{\jmath}) \neq 0$

Donc $\begin{vmatrix}-b & 0\\ a & 1\end{vmatrix} \neq 0$ donc : $-b\times 1 - a\times 0 \neq 0$ donc $-b \neq 0$, donc $b \neq 0$.

Par suite : $\boldsymbol{ax + by + c} = 0$ équivaut à : $\boldsymbol{by} = \boldsymbol{-ax - c}$ et donc comme $b \neq 0$, on peut effectuer la division par b : $y = \dfrac{-ax-c}{b} = -\dfrac{a}{b}x + \left(-\dfrac{c}{b}\right)$.

En posant : $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$ on obtient : $\boldsymbol{y = mx + p}$.

Si Δ est une droite verticale, alors $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dirige Δ qui admet donc pour équation cartésienne ($-b=0$ et $a=1$ donc $a=1$ et $b=0$) : $1x+0y+c=0$ où c est un réel, donc $x+c=0$ donc $x=-c$.
En posant $k=-c$, on obtient pour équation de Δ : $x=k$.

__Remarques__ : toute droite du plan admet des équations cartésiennes.

Seules les droites non verticales du plan admettent une équation réduite.

Une droite est non verticale dès qu'elle contient deux points n'ayant pas la même abscisse.

Fondamental : si une droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y = mx + p$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. car : $y = mx + p$ $\quad mx - y + p = 0$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-(-1)=1\\a=m\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$

__Exemple__

1) Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ qui a pour équation cartésienne : $-10x+5y+15=0$.

2) Construire dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ la droite Δ d'équation : $y=\frac{1}{3}x+1$.

✂---

__Remarque__ : la droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite : $y = mx + p$ est la courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx+p$.

↳ car $y = f(x)$ donc $f(x) = mx + p$

Propriété

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation réduite : $y = mx+p$.

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points distincts appartenant à $\mathscr{D}$.

♥

Alors $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ où $\begin{cases}\Delta y = \text{la variation des ordonnées}\\ \Delta x = \text{la variation des abscisses}\end{cases}$ Prise dans le même ordre

__Preuve et illustration__ :

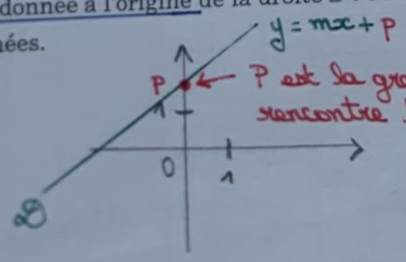
✂---

__Définition__ : m est appelé le ***coefficient directeur*** (ou encore la ***pente***) de la droite $\mathscr{D}$.

La valeur de m ne dépend pas du choix effectué des deux points appartenant à $\mathscr{D}$ dans le calcul précédent.

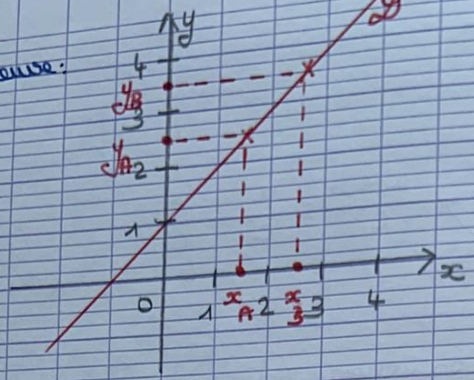
p est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathscr{D}$: c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.

__Illustration__ :



P est la graduation en laquelle la droite $\mathscr{D}$ rencontre l'axe des ordonnées

Preuve :



$\mathcal{D}$ a pour équation : $y = mx + p$

$A(x_A ; y_A) \in \mathcal{D}$, donc : $y_A = mx_A + p$ (1)

$B(x_B ; y_B) \in \mathcal{D}$, donc $y_B = mx_B + p$ (2)

(2) − (1) : $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p)$

$y_B - y_A = mx_B + \cancel{p} - mx_A - \cancel{p}$

$y_B - y_A = m(x_B - x_A)$

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

car $x_B - x_A \neq 0$
ou que $x_B \neq x_A$
car $\mathcal{D}$ non verticale.

Ex4 $\mathcal{D}$ a pour équation réduite :
$y = mx + p$
Ici $m = -2$ donc $y = -2x + p$
$K(1 ; -4) \in \mathcal{D}$, donc : $y_K = -2x_K + p$

$-4 = -2 \times 1 + p$

$-4 + 2 = p$

$p = -2$

$\mathcal{D}$ a pour équation réduite : $y = -2x - 2$

On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des droites non verticales. Les droites verticales n'ont pas de coefficient directeur ni d'ordonnée à l'origine !

Exemple

Déterminer, pour chacune des deux droites suivantes, le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :

La droite $\mathcal{D}_1$ qui a pour équation réduite : $y = -3x + 1$ Ici $m = -3$ $p = 1$

La droite $\mathcal{D}_2$ qui a pour équation réduite : $y = x - 2$ Ici $m = 1$ $p = -2$

La droite $\mathcal{D}_3$ qui a pour équation réduite : $y = 3$. Ici $m = 0$ $p = 3$

La droite $\mathcal{D}_4$ qui a pour équation : $3x - 4y + 11 = 0$.

✂--

Remarque fondamentale : les droites dont le coefficient directeur est égal à zéro sont ..horizontales.

et réciproquement, les droites ..horizontales..........ont pour coefficient directeur zéro.

Exercice 4

X Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $K(1\ ;-4)$ et qui a pour coefficient directeur -2. .

✂--

Exercice 5

X Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par A(-1 ; 5) et B(4 ; 10).

✂--

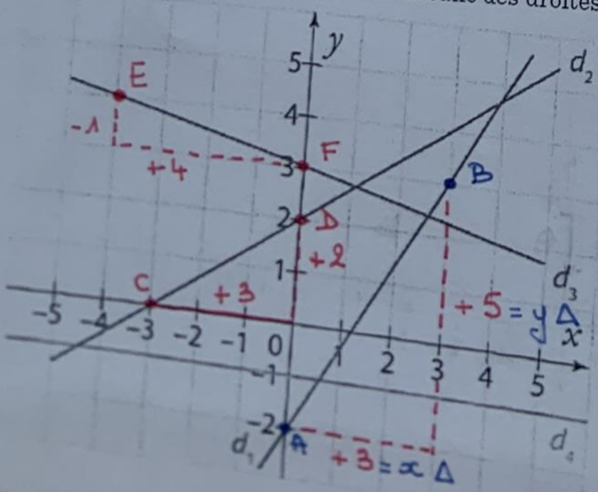
Exercice 6

Construire dans un repère la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(-2198\ ; -2202)$ et $B(1892\ ; 1888)$.

✂--

Exercice 7 (clé)

Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites tracées :



d_1 a pour coefficient directeur $m = \frac{y\Delta}{x\Delta} = \frac{5}{3}$

d_2 a pour coef. directeur $m = \frac{2}{3}$

d_3 a pour coef. directeur $m = \frac{-1}{4}$

d_4 a pour coef. directeur $m = 0$

$x + 2y = 1$

$2y = 1 - x$

$y = \frac{1-x}{2}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \longrightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ → l'équation réduite de la droite d

→ d passe par $K\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$

$L(1 ; 0)$

Exemple :

1) $\mathcal{D}$ a pour équation : $-10x + 5y + 15 = 0$

Isolons y :

$$\begin{aligned} -10x + 5y + 15 &= 0 \quad (+10x) \\ 5y + 15 &= 10x \quad (-15) \\ 5y &= 10x - 15 \quad (:5) \\ y &= \frac{10x - 15}{5} \\ y &= \frac{10x}{5} - \frac{15}{5} \\ \boxed{y = 2x - 3} \end{aligned}$$

l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

2) Δ a pour équation réduite : $y = \frac{1}{3}x + 1$

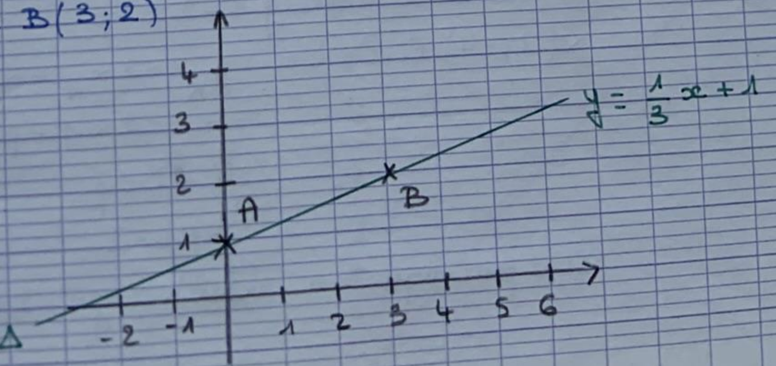
Pour $x = 0$, $y = \frac{1}{3} \times 0 + 1 = 1$

Donc Δ passe par $A(0 ; 1)$

Pour $x = 3$, $y = \frac{1}{3} \times 3 + 1 = 1 + 1 = 2$

Donc Δ passe par $B(3 ; 2)$

D'où le tracé :



Ex 5 $-1 \neq 4$ ($x_A \neq x_B$), donc (AB) n'est pas verticale et a pour équation réduite : $y = mx + p$

Or : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - 5}{4 - (-1)} = \frac{5}{5} = 1$

Donc : $y = 1x + p = x + p$

Enfin $B(4 ; 10) \in (AB)$, donc : $y_B = x_B + p$

$10 = 4 + p$

$p = 10 - 4 = 6$

Ex 6 $\mathcal{D}$ passe par $A(-2198 ; -2202)$ et $B(1892 ; 1888)$

Cherchons l'équation réduite de (AB) :

$y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1888 - (-2202)}{1892 - (-2198)} = \frac{4090}{4090} = 1$

$y = 1x + p = x + p$

$B(1892 ; 1888) \in \mathcal{D}$ donc : $y_B = x_B + p$

$1888 = 1892 + p$

$p = 1888 - 1892 = -4$

(AB) a pour équation réduite $y = x - 4$

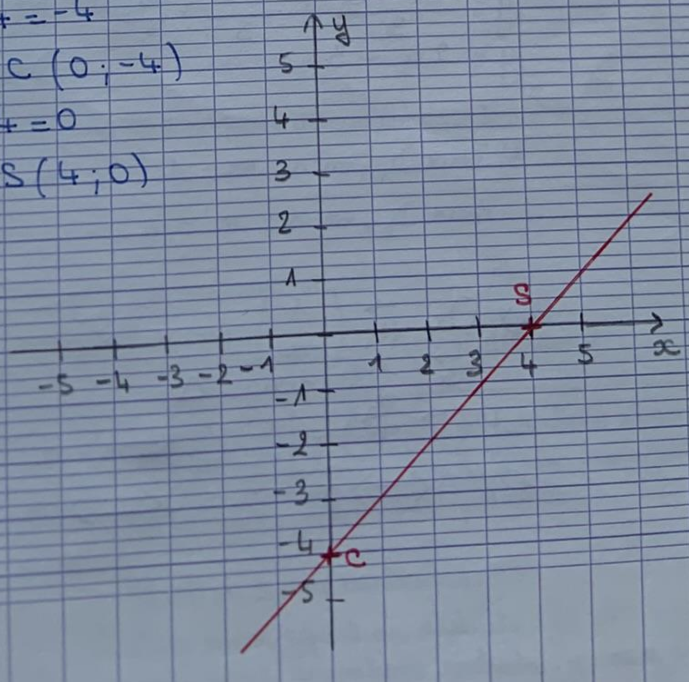
Pour $x = 0$, $y = 0 - 4 = -4$

Donc $\mathcal{D}$ passe par $C(0 ; -4)$

Pour $x = 4$, $y = 4 - 4 = 0$

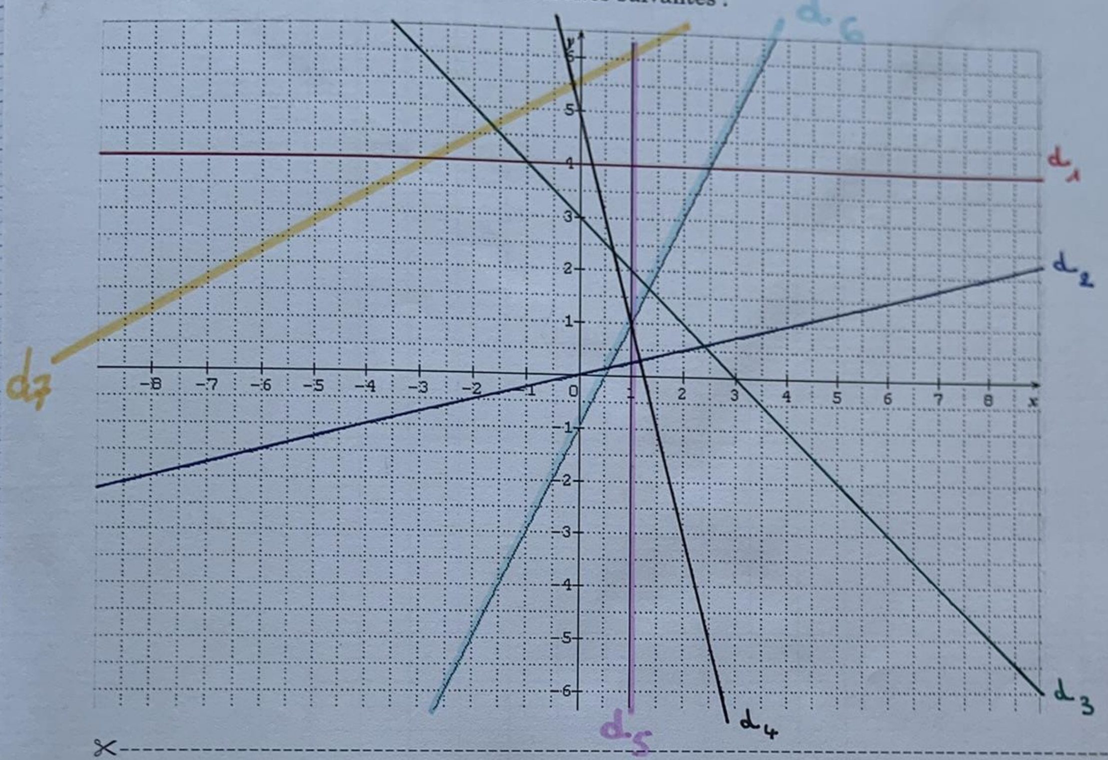
Donc $\mathcal{D}$ passe par $S(4 ; 0)$

D'où le tracé :



Exercice 8 (clé)

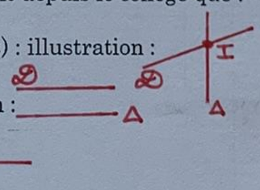
X Déterminer une équation de chacune des droites suivantes :



✂--

Rappel : Lorsqu'on a deux droites $\mathscr{D}$ et Δ du plan, on sait depuis le collège que :

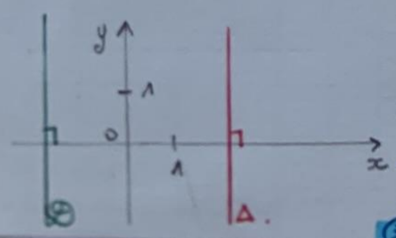
- $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes (et se coupent en un point) : illustration :
- $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles : illustration :
- $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues : illustration :



Etudier la position relative de deux droites du plan, revient à déterminer dans lequel des trois cas rappelés ci-dessus on se trouve.

> ***Propriété***
>
> Deux droites $\mathscr{D}$ et Δ du plan sont parallèles si et seulement si :
>
> Elles $\underbrace{\textit{sont toutes les deux verticales}}_{①}$ *ou bien* elles $\underbrace{\textit{ont le même coefficient directeur}}_{②}$.

Preuve : ①



Si Δ et $\mathscr{D}$ sont verticales, alors elles sont toutes deux perpendiculaires à l'axe des abscisses.
À ce titre, elles sont parallèles.

② $\mathscr{D}$ et Δ non verticales :
$\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y = mx + p$
Δ a pour équation réduite : $y = m'x + p$

(✱)

Exo 8 : Trouver l'équation réduite d'une droite c'est parvenir à la relation : $y = mx + p$ (si droite non verticale)
cherchés

d_1 a pour équation réduite : $y = 4$
d_2 a pour équation réduite : $y = \frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$ car $m = \frac{1}{4}$ et $p = 0$
d_3 a pour équation réduite : $y = -x + 3$ car $m = -1$ et $p = 3$
d_4 a pour équation réduite : $y = -4x + 5$ car $m = -4$ et $p = 5$
d_5 a pour équation : $x = 1$ (verticale)
d_6 a pour équation réduite : $y = 2x - 1$
d_7 a pour équation réduite : $y = \frac{1}{2}x + 5{,}5$

Exo 9 : 1) Pour d_1, on a : $m = 3$ et $p = -4$
Pour d_2, on a : $m = 3$ et $p = 8$
Donc $m = m'$ et $p \neq p'$, donc d_1 et d_2 sont strictement parallèles.

2) Pour Δ_1, on a : $m = 2$ et $p = 3$
Donnons l'équation réduite de Δ_2.
$6x - 3y + 9 = 0$
$6x + 9 = 3y$
$y = \frac{6x+9}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3}$
$y = 2x + 3$

on a : $m = 2$ et $p = 3$
Ici $m = m'$ et $p = p'$
Donc Δ_1 et Δ_2 sont confondues.

3) Pour D_1, on a : $m = 1$
Pour D_2, on a : $m' = 1$
$m \neq m'$, donc D_1 et D_2 sont sécantes.

Or $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$
$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ dirige Δ
$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}1 & 1\\ m & m'\end{vmatrix} = m' - m$
$\mathcal{D} \parallel \Delta \iff m' - m = 0 \iff m' = m$

Remarque : si $\mathscr{D}$ a pour équation : $y = mx + p$ et Δ a pour équation : $y = m'x + p'$, alors :

- $\mathscr{D}$ et Δ sont strictement parallèles si et seulement si : $m = m'$ et $p \neq p'$
- $\mathscr{D}$ et Δ sont confondues si et seulement si : $m = m'$ et $p = p'$
- $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes si et seulement si : $m \neq m'$

Exercice 9

Etudier la position relative des droites suivantes :

1) d_1 a pour équation : $y = 3x - 4$ et d_2 a pour équation : $y = 3x + 8$.
2) Δ_1 a pour équation : $y = 2x + 3$ et Δ_2 a pour équation : $6x - 3y + 9 = 0$. → équation cartésienne non réduite
3) D_1 a pour équation : $y = x$ et D_2 a pour équation : $y = -x + 1$.

✂--

Remarque : lorsque deux droites dont on a des équations sont sécantes, il est assez naturel de chercher à déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites. C'est l'un des objectifs du paragraphe suivant.

III – Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Un exemple d'introduction :

On dispose d'un stock de stylos tous identiques, et de crayons tous identiques.

4 stylos et un crayon coûtent 10,40€, tandis que 2 stylos et 3 crayons coûtent 9,20€.

A l'aide de ces informations, nous allons dégager une méthode qui va nous permettre de trouver à quel prix est vendu chaque stylo et chaque crayon.

Mise en équation : Soit x le prix d'un stylo et y celui d'un crayon

$$\begin{cases} 4x + y = 10{,}40 \\ 2x + 3y = 9{,}20 \end{cases}$$

Cet exemple sera résolu dans la suite, après avoir dégagé des méthodes de résolution.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, tout ensemble formé par deux équations, où figurent, dans chacune, deux inconnues, notées x et y, [les inconnues étant sans puissance]. On note avec une accolade un tel système.

Par exemple : $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ x+0,2y=11,3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{4}x+5y-\sqrt{2}=0 \\ -2x+5y+13,1=0 \end{cases}$ sont des systèmes de deux équations à deux inconnues. On dira seulement système dans toute la suite.

Définition

On appelle ***solution*** du système, tout ***couple*** de réels $(x\ ;\ y)$ tel que ***chacune des deux égalités*** figurant dans le système soit ***vraie***. Attention à l'ordre des valeurs dans un couple !

On considère le système suivant : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Le couple (3 ; 1) est-il solution du système *précédent* ? Même question avec le couple ($\frac{9}{7}$; $\frac{13}{7}$).

Méthode : • Ici avec $(3;1)$: $x=3$ et $y=1$

Donc $x+2y-5=0$ s'écrit : $3+2\times 1-5=0$, c'est à dire $5-5=0$: Vrai

et $3x-y-2=0$ s'écrit : $3\times 3-1-2=0$, c'est à dire $9-1-2=0$: $6=0$: Faux

Donc $(3;1)$ n'est pas solution du système.

• Avec $\left(\frac{9}{7};\frac{13}{7}\right)$: $x=\frac{9}{7}$ et $y=\frac{13}{7}$

Donc $x+2y-5=0$ s'écrit : $\frac{9}{7}+2\times\frac{13}{7}-5=0$, c'est à dire $\frac{9}{7}+\frac{26}{7}-5=0$: $\frac{35}{7}-5=0$
$5-5=0$: Vrai

et $3x-y-2=0$ s'écrit : $3\times\frac{9}{7}-\frac{13}{7}-2=0$, c'est à dire $\frac{27}{7}-\frac{13}{7}-2=0$: $\frac{14}{7}-2=0$
$2-2=0$: Vrai

Donc $\left(\frac{9}{7};\frac{13}{7}\right)$ est solution du système.

Une question légitime : le couple ($\frac{9}{7}$; $\frac{13}{7}$) est-il le ***seul*** couple solution du précédent système ?

Définition

Résoudre un système, c'est ***déterminer*** tous les éventuels ***couples de solution*** du système.

Deux systèmes d'équations sont dits ***équivalents*** lorsqu'ils ont le ***même ensemble de solutions***.

On ***transforme*** un système en un ***système équivalent*** en faisant des opérations licites sur chacune de ses équations : ces opérations sont : ajout d'un même nombre dans chacun des membres d'une égalité, multiplication de chacun des membres par le même réel non nul, permutation des lignes du système, remplacement d'une ligne par la somme ou la différence des deux autres….

Résolution d'un système par la méthode de substitution

On se propose de résoudre le système : $\begin{cases} 3x-y+1=0 & L_1 \\ x+3y+2=0 & L_2 \end{cases}$

Méthode de substitution : Etape 1 : J'isole (au choix) l'une des inconnues (x ou y) dans l'une des deux équations.
Etape 2 : On remplace dans l'autre ligne l'inconnue isolée par quantité qui lui est égale. On aboutit à une équation à une inconnue.

Résolution du système précédent par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ x+3y+2=0 \end{cases}$$

J'isole y dans L_1 $\begin{cases} y=3x+1 \\ x+3(3x+1)+2=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=3x+1 \\ x+9x+3+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3x+1 \\ 10x+5=0 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} x=\frac{-5}{10}=-0{,}5 \\ y=3\times(-0{,}5)+1=-1{,}5+1=-0{,}5 \end{cases}$

$\mathcal{S}=\{(0{,}5\,;0{,}5)\}$

x y

Exercice 10

- Résoudre, par la méthode de substitution, le système suivant : $\begin{cases} x-5y=2 \\ 7x+y=12 \end{cases}$.

J'isole x dans L_1 : $x=5y+2$

$$\begin{cases} x=5y+2 \\ 7(5y+2)+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y+2 \\ 35y+14+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y+2 \\ 36y+14=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y+2 \\ 36y=12-14=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5y+2 \\ y=\frac{-2}{36}=\frac{-1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{-5}{18}+2=\frac{-5}{18}+\frac{36}{18}=\frac{31}{18} \\ y=\frac{-1}{18} \end{cases}$$

$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{31}{18}\,;\frac{-1}{18}\right)\right\}$

$$\begin{cases} 3x+2y+7=0 & L_1 \\ 5x+6y-11=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 5\times L_1 \\ 3\times L_2 \end{array} \begin{cases} 5(3x+2y+7)=5\times 0 \\ 3(5x+6y-11)=3\times 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x+10y+35=0 & L_1' \\ 15x+18y-33=0 & L_2' \end{cases}$$

En faisant $L_1'-L_2'$: $15x+10y+35-(15x+18y-33)=0-0$

$\cancel{15}x+10y+35-\cancel{15}x-18y+33=0$

$-8y+68=0$

$8y=68$

$y=\frac{68}{8}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}=8,5$

Enfin : on remplace y par $8,5$ dans L_1'

$15x+10\times 8,5+35=0$

$15x+120=0$

$x=-\frac{120}{15}=-8$

$\mathcal{S}=\{(-8;8,5)\}$

Remarque : Si aucun des coefficients multiplicateurs des inconnues x ou y n'est égal à 1 ou -1, la méthode de substitution engendre souvent des calculs un peu plus lourds.

Ce serait par exemple le cas avec le système suivant : $\begin{cases} 3x+2y+7=0 \\ 5x+6y-11=0 \end{cases}$.

Nous allons voir une autre méthode de résolution des systèmes, parfois très pratique et efficace.

Résolution d'un système par la méthode de combinaison linéaire.

Méthode de combinaison :

*). On fait apparaître autant de x (ou bien de y) dans chacunes des deux égalités en multipliant ces dernières par des nombres bien choisis.

**). On soustrait alors membre à membre les deux égalités obtenues : disparition de l'une des inconnues.

Application à la résolution de problèmes

Exercice 11

Résoudre le problème posé en introduction du paragraphe *III*.

x = prix d'un stylo $\qquad$ y = prix d'un crayon

$$\begin{cases} 4x + y = 10,40 \\ 2x + 3y = 9,20 \end{cases}$$

Par substitution : J'isole y dans (L_1)

$y = 10 - 4x$

Donc : $\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ 2x + 3(10,40 - 4x) = 9,20 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ 2x + 3 \times 10,40 - 3 \times 4x = 9,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x + 31,20 = 9,20 \\ y = 10,40 - 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10,40 - 4x \\ -10x = 9,20 - 31,20 = -22 \end{cases}$$

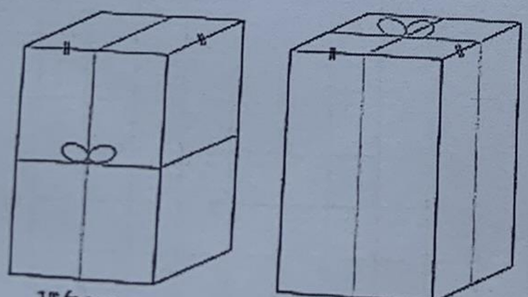
$$\begin{cases} x = 10,40 - 4 \times 2,20 = 10,40 - 8,80 = 1,60 \\ y = \frac{-22}{-10} = 2,20 \end{cases}$$

$S = \{(2,20 ; 1,60)\}$

Chaque stylo coûte 2,20€ et chaque crayon coûte 1,60€.

Exercice 12

Un paquet a la forme d'un parallélépipède ayant deux faces carrées.



1re façon $\qquad$ 2e façon

Pour le ficeler selon la 1re façon, il faut 3 m de ficelle en comptant 46 cm pour un nœud.
Pour le ficeler selon la 2e façon, il faut 3,3 m de ficelle en comptant toujours 46 cm pour un nœud.
Quelles sont les dimensions du paquet ?

Soit x la longueur des côtés des bases carrées et y la hauteur du pavé droit.

$3\text{ m} = 300\text{ cm}$

$6x + 2y + 46 = 300$ (ficeler de la 1ère façon)

Avec la 2ème façon de ficeler : $4x + 4y + 46 = 330$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} 6x + 2y + 46 = 300 & (L_1) \\ 4x + 4y + 46 = 330 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (L_1 : 2) \\ (L_2 : 2) \end{array} \begin{cases} 3x + y + 23 = 150 & (L_1') \\ 2x + 2y + 23 = 165 & (L_2') \end{cases}$$

J'isole y dans (L_1') : $y = 150 - 23 - 3x$

$y = -3x + 127$

Donc : $\begin{cases} y = -3x + 127 \\ 2x + 2(-3x + 127) + 23 = 165 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 6x + 254 + 23 = 165 \\ y = -3x + 127 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 277 = 165 \\ y = -3x + 127 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{165 - 277}{-4} = \frac{-112}{-4} = 28 \\ y = -3 \times 28 + 127 = -84 + 127 = 43 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(28 ; 43)\}$

Ce pavé a pour dimensions : $28\text{ cm} \times 28\text{ cm} \times 43\text{ cm}$

$L \times l \times h$

Remarque importante : lien entre résolution de système et équations de droites.

Considérons le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$.

Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation cartésienne : $3x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation : $x + 3y + 2 = 0$.
Un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si le couple $(x\,;\,y)$ formé par ses coordonnées est solution du système $\mathcal{S}$.

Ainsi, résoudre le système $\mathcal{S}$ revient géométriquement à déterminer les .coordonnées... ***des éventuels***.points..d'...intersection...des..droites..$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Dans les exercices, il sera assez naturel de d'abord prévoir avant de résoudre le système s'il a une unique solution, aucune solution ou une infinité de solutions.

Propriété

On suppose que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$ et on s'intéresse au système **(S)** $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

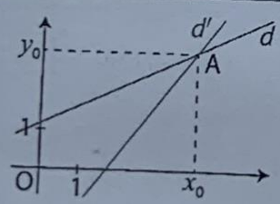
Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d et $a'x + b'y + c' = 0$ est une **équation cartésienne** d'une droite d'.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d, $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'.

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' - (-b')a = ab' - a'b.$$

La nullité ou non nullité du déterminant précédent nous permet de dire :

1^er^ cas :

$ab' - a'b \neq 0$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d et d' sont sécantes en un point $A(x_0\,;y_0)$.
Le système **(S) a un seul couple solution** : $(x_0\,;y_0)$. $\mathcal{S} = \{(x_0;y_0)\}$

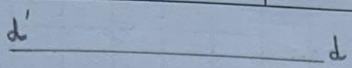
2^ème^ cas : $ab' - a'b = 0$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

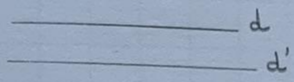
d et d' sont parallèles au sens large.

<u>Plus précisément</u> : si le tableau suivant est un tableau de proportionnalité, alors les droites d et d' sont confondues.

a	b	c
a'	b'	c'

Illustration : 

Sinon elles sont strictement parallèles.

Illustration : 

<u>Exercice 13</u>

Soit d_1 la droite d'équation cartésienne : $2x + y + 5 = 0$ et d_2 la droite d'équation cartésienne $3x + 4y - 2 = 0$.

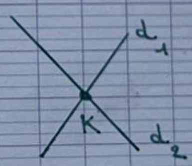
Etudier la position relative de ces deux droites en étant le plus précis possible !

$a = 2 \quad b = 1$

d_1 a pour équation : $2x + y + 5 = 0$

d_2 a pour équation : $3x + 4y - 2 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ dirige d_1 $\qquad$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ dirige d_2



$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}-1 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1\times 3 - 2\times(-4)$$
$$= -3 + 8 = 5$$

$5 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Donc d_1 et d_2 sont sécantes.

Soit $K(x;y)$ le point d'intersection des droites d_1 et d_2 :

<u>Résolvons le système :</u>

$$\begin{cases}2x + y + 5 = 0\\ 3x + 4y - 2 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}-2x - 5 = y\\ 3x + 4y - 2 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y = -2x - 5\\ 3x + 4(-2x-5) - 2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y = -2x - 5\\ 3x - 8x - 20 - 2 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y = -2x - 5\\ -5x - 22 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y = -2x - 5\\ 5x = -22\end{cases}$$

$y = -2x - 5$ $\qquad$ $y = -2 \times -\frac{22}{5} - 5 = \frac{44}{5} - 5 = \frac{44}{5} - \frac{25}{5} = \frac{19}{5} = 3{,}8$

$x = \frac{-22}{5} = -4{,}4$ $\qquad$ $x = \frac{-22}{5} = -4{,}4$

$\mathcal{S} = \{(-4{,}4\,;\,3{,}8)\}$ $\qquad$ d_1 et d_2 se coupent en $K(-4{,}4\,;\,3{,}8)$.

Exercice 14

1) Déterminer la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(3) = -1$ et $f(8) = 2$.

2) Déterminer la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par les points $A(2026\ ;\ 4055)$ et $B(0\ ;\ 3)$.

3) h est la fonction affine telle que $h(2) = 4$ et $h(3) = 9$.

a) Déterminer, en justifiant votre démarche, combien vaut $h(4)$.

b) La courbe représentant la fonction h et la droite (d) d'équation : $y = x$ sont-elles parallèles ? Justifier.

1) $f(x) = ax + b$

$f(3) = -1$ donc : $3a + b = -1$

$f(8) = 2$ donc : $8a + b = 2$

d'où le système : $\begin{cases} 3a + b = -1 & (L_1) \\ 8a + b = 2 & (L_2) \end{cases}$

On cherche les valeurs de a et de b

$(L_1) - (L_2)$: $3a - 8a = -1 - 2$

$-5a = -3$

$a = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Enfin : (L_1) : $3 \times 0{,}6 + b = -1$

$1{,}8 + b = -1$

$b = -1 - 1{,}8 = -2{,}8$

$\mathcal{S} = \{(0{,}6\,;\,-2{,}8)\}$

$f(x) = 0{,}6x - 2{,}8$

2) $g(x) = ax + b$

$A(2026\,;\,4055) \in \mathcal{C}_g$ donc $g(2026) = 4055$

donc $2026a + b = 4055$

$B(0\,;\,3) \in \mathcal{C}_g$ donc $g(0) = 3$

donc $a \times 0 + b = 3$

$b = 3$

Par suite $2026a + 3 = 4055$

$2026a = 4055 - 3 = 4052$

$a = \frac{4052}{2026} = 2$

$\mathcal{S} = \{(2\,;\,3)\}$ et $g(x) = 2x + 3$

3) h est affine donc :

$h(x) = ax + b$

$h(2) = 4$ donc : $2a + b = 4$

$h(3) = 9$ donc $3a + b = 9$

Donc : $\begin{cases} 2a + b = 4 \ (L_1) \\ 3a + b = 9 \ (L_2) \end{cases}$ $(L_2) - (L_1) : 3a - 2a + b - b = 9 - 4$

$a = 5$

D'après (L_1) : $2 \times 5 + b = 4$

$b = 4 - 10 = -6$

Ainsi : $h(x) = 5x - 6$

Enfin, $h(4) = 5 \times 4 - 6 = 14$

b) C_h est la droite d'équation : $y = 5x - 6$: $m = 5$

(d) a pour équation : $y = x$: coefficient directeur : $m' = 1$

$5 \neq 1$, donc C_h et (d) sont sécantes et donc non parallèles.