

Chapitre 1

Calcul algébrique et calcul littéral

0 - Pour bien commencer, vocabulaire de base

L'ensemble de tous les nombres que l'on connaît en seconde est appelé l'ensemble des **nombres réels**.

On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

Par exemple, les nombres : $-3,4$; $\frac{2}{3}$; 8 ; π ; $\sqrt{2}$ sont quelques exemples de nombres réels.

En algèbre : dire qu'un réel a est nul signifie que $a = 0$.

Dire qu'un réel x n'est pas nul signifie que $x \neq 0$.

La **somme** de deux termes est **le résultat de l'addition** de ces deux termes :

Par exemple, $8 + 7 = 15$. 8 et 7 sont les termes de cette somme.

$x + y + 15$ est une somme de trois termes respectivement égaux à x , y et 15. Cette dernière ne se réduit pas davantage !

L'addition est **commutative**, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel les termes sont additionnés n'a pas d'importance.

Pour tous réels a et b , on a donc : $a + b = b + a$.

Exemple

Calculer astucieusement, sans calculatrice : $23 + 48 + 37 + 32 = 23 + 37 + 48 + 32 = 60 + 80 = 140$

Définition

Soit x un réel. L'opposé du réel x est le nombre qui additionné avec x donne une somme nulle.

Ainsi, l'opposé de x est le nombre $-x$ car : $x + (-x) = 0$.

Par exemple, l'opposé de 4,31 est $-4,31$.

Enfin, l'opposé de l'opposé de x , c'est-à-dire $-(-x)$ est égal à x . On a : $-(-x) = x$.

L'opposé de $-7,58$ est $7,58$.

Définition

Soient a et b deux réels. Soustraire le réel b au réel a , c'est-à-dire effectuer l'opération : $a - b$, revient à additionner au réel a l'opposé du réel b .

$$a - b = a + (-b).$$

La soustraction n'est donc en fait qu'une addition particulière !

Le **résultat** de la **soustraction** est communément appelé la **différence**.

Par exemple, $2 - 3 = 2 + (-3) = -1$.

Considérons l'expression : $7+(-x)$: la parenthèse est obligatoire et évite le chevauchement d'un signe $+-$.

Ecrire $7 \times x$ constitue une erreur d'écriture.

En pratique, on utilisera la notation $7 - x$ plutôt que $7+(-x)$, la première écriture évitant les parenthèses ! En algèbre, on utilisera le moins de symboles possibles pour alléger les écritures et en faciliter la lecture.

☛ **Attention la soustraction n'est pas commutative !**

Par exemple : $5-7 = -2$, tandis que $7-5 = 2$.

L'ordre des termes dans une soustraction est donc fondamental.

Enfin, sur calculatrice (modèle lycée), il faut faire attention : il y a un gros signe moins $-$ qui désigne l'opération soustraction, et un petit signe moins $-$ qui désigne l'opposé.

Par exemple : si je tape $15-23$ la machine comprend qu'il faut soustraire 23 au nombre 15 et affiche après avoir appuyé sur la touche entrée le résultat -8 .

Si vous tapez : $15-23$ un message d'erreur s'affichera !

Exemple

Donner la séquence à taper sur la calculatrice et le résultat affiché pour calculer :
 $-5,2 - 7,61 + 15,264 - (-2,81) = 5,264$

Définition

Le produit de deux facteurs est le **résultat de la multiplication** de ces **facteurs** :

Par exemple : $3 \times 8 = 24$: 3 et 8 sont les **facteurs** de ce produit qui est égal à 24

$-5a$; $7,2xy$

Remarque : dans les deux exemples précédents, on ne met pas le signe de la multiplication entre -5 et a d'une part pour le premier exemple, et pour le second exemple, pas de signe multiplié entre $7,2$ et x , et pas de signe multiplié entre x et y : ceci est purement conventionnel, le but est d'alléger les écritures qui contiennent moins de caractères, ce procédé est fréquent en algèbre.

Le développement des mathématiques, et en particulier du calcul algébrique, a été considérable grâce à de tels allègements dans les écritures.

Exemple

Soient a , b et c des nombres réels. $2abc$ est un produit de 4 facteurs, et : $2abc = 2 \times a \times b \times c$

Soit a un réel (= nombre) quelconque. Rappelez la signification des expressions suivantes :

$$4a = 4 \times a; \quad -a = -1 \times a;$$

$$a^2 = a \times a.$$

;

$$3(a+5) = 3 \times (a+5)$$

a^2 est appelé le **carré** du nb. a ...

Même si le produit est commutatif (c'est-à-dire que pour tous réels a et b , $ab = ba$), ne pas écrire $a4$ au lieu de $4a$! *On met dans un produit de facteurs le nombre avant la lettre !*

Enfin, pour tout réel a , $1a = a$: multiplier par 1 un réel ne change pas la valeur de ce dernier.

Ce dernier point peut paraître ridicule, mais ce sera une astuce classiquement utilisée dans le paragraphe suivant concernant les factorisations !

Exemple : Simplifier les écritures :

$$3x \times 2y = (3 \times 2 \times x \times y) = 6xy$$

$$5x \times (-8y) \times 7 = 5 \times (-8) \times 7 \times x \times y = -280xy$$

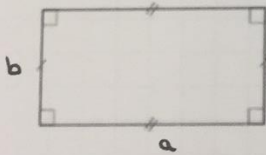
$$(3a)^2 = 3a \times 3a = 3 \times 3 \times a \times a = 9a^2$$

Conclusion : $(3a)^2$ n'est pas égal à $3a^2$: $(3a)^2 \neq 3a^2$

Comment se simplifie l'expression $(-a)^2$? Pourquoi ? $(-a)^2 = a^2$ car : $(-a)^2 = (-1 \times a)^2 = -1 \times a \times (-1) \times a$
On a donc prouvé que deux nbs opposés ont le même carré ! $(-a)^2 = -1 \times (-1) \times a \times a = 1 \times a^2 = a^2$

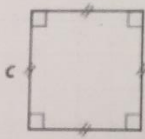
Quelques formules algébriques d'usage courant contenant des produits (et à mémoriser par cœur ♥) :

A - Les périmètres (= longueur du contour)

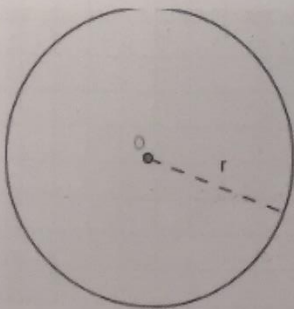


Un rectangle de longueur a et de largeur b a pour périmètre P avec :

$$P = 2a + 2b = 2(a+b)$$

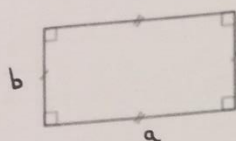


Un carré de côté c a pour périmètre P avec : $P = 4c$



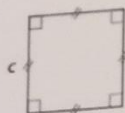
Un cercle de rayon r a pour périmètre P avec : $P = 2\pi r$ où $\pi \approx 3,14$

B - Les aires (= surfaces)

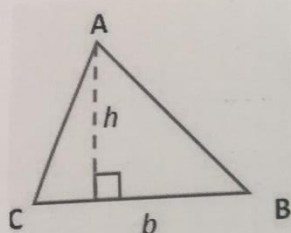


Un rectangle de longueur a et de largeur b a pour aire A avec :

$$A = ab$$

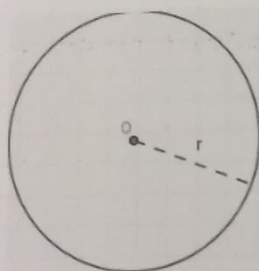


Un carré de côté c a pour aire A avec : $A = c^2$



Un triangle de base b et de hauteur h a pour aire A avec :

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{bh}{2}$$



Un disque de rayon r a pour aire A avec : $A = \pi r^2$

Remarque: $d = \text{diamètre du cercle}$
 $d = 2r$

Exprimer l' A du disque de rayon r en fonction de son d :

$$d = 2r \text{ donc } r = \frac{d}{2}$$

$$\text{Comme } A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{d}{2} \times \frac{d}{2} = \boxed{\pi \frac{d^2}{4}} \quad \text{L'aire du disque est ici exprimée en fonction du diamètre } d \text{ du cercle.}$$

Enfin, terminons ces rappels par des expressions chiffrées d'usage fréquent en algèbre :

Le double d'un nombre réel a est le nombre $2a$.

Le triple d'un nombre réel a est le nombre $3a$.

La moitié d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{2}$ ou encore $0,5a$

Le tiers d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{3}$

Le quart d'un nombre réel a est le nombre $\frac{a}{4}$

Ainsi de suite avec le cinquième du réel a qui est le nombre $\frac{a}{5}$, le dixième du réel a est le nombre $\frac{a}{10} = 0,1a$, et le trentième du réel a est le nombre $\frac{a}{30}$, le centième du réel a est le nombre $\frac{a}{100}$, le millièmè du réel a est le nombre $\frac{a}{1000}$

Exercice 1

a et b désignent des nombres réels quelconques.

Ecrire algébriquement l'expression correspondante à chacune des phrases suivantes :

- a) La somme des réels 7 et de la moitié de 18. $7 + \frac{18}{2}$
- b) la somme du double de a et du triple de b $2a + 3b$
- c) le produit des réels 7, a et b $7 \times a \times b = 7ab$
- d) le produit du tiers de a par le double de b $\frac{a}{3} \times 2b = \frac{2ab}{3}$
- e) La somme de l'opposé de a et du carré de a $-a + a^2$
- f) La somme des carrés des réels a et b $a^2 + b^2$
- g) Le carré de la somme des réels a et b $(a+b)^2$
- h) La différence des carrés des réels a et b $a^2 - b^2$

I-Rappels sur les transformations d'écritureDéfinition

Développer un produit de facteurs signifie le transformer en une somme de termes

Pour ce faire, on dispose des règles suivantes :

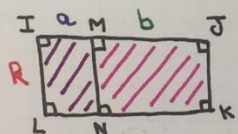
Règle de (simple) distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction :

Quels que soient les réels k , a et b , on a :

$$\heartsuit k(a+b) = k \times a + k \times b \text{ et } \heartsuit k(a-b) = k \times a - k \times b \text{}$$

Géométriquement, ces règles se comprennent aisément :

Illustration :



Considérons des rectangles ILNM et MNKJ ayant pour largeur commune la nb R :

$$A(ILKJ) = R(a+b)$$

$\rightarrow$ ILKJ est un rectangle de $a+b$ et de $L.R$.

$$\text{et } A(ILKJ) = A(ILNM) + A(MNKJ)$$

$$R(a+b) = R \times a + R \times b$$

Exemples

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$$3(x+5y) = 3x + 3 \times 5y = 3x + 15y$$

$$-2(x-3y) = -2 \times x - (-2) \times 3y = -2x + 6y$$

$$7(2x-7y+3z-4) = 7 \times 2x - 7 \times 7y + 7 \times 3z - 7 \times 4 = 14x - 49y + 21z - 28$$

Calculer mentalement : 24×7 ; 54×11 ; 16×98 ..

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & (20+4) \times 7 \end{aligned}$$

$$= 7(20+4)$$

$$= 7 \times 20 + 7 \times 4$$

$$= 140 + 28 = 168$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & 54 \times (10+1) \end{aligned}$$

$$= 54 \times 10 + 54 \times 1$$

$$= 540 + 54$$

$$= 594$$

$$16 \times (100-2)$$

$$= 16 \times 100 - 16 \times 2$$

$$= 1600 - 32$$

$$= 1600 - 30 - 2$$

$$= 1568$$

Règle de double distributivité

♥♥ Pour tous réels a, b, c et d , on a : $(a+b)(c+d) = \dots ac + ad + bc + bd \dots$

Preuve : Découle de la règle précédente !

Poser $R = a+b$ et appliquer la règle de simple distributivité 2 fois :

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd$$

Exemples

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$$(2x+3)(x+7) = 2x^2 + 14x + 3x + 21 = \boxed{2x^2 + 17x + 21}$$

$$(3x-4)(2x+1) = 6x^2 + 3x - 8x - 4 = \boxed{6x^2 - 5x - 4}$$

$$3 - (2x-1)(4x+3) = 3 - (2x \times 4x + 2x \times 3 - 4x - 3) = 3 - (8x^2 + 6x - 4x - 3) = 3 - 8x^2 - 2x + 3 = \boxed{-8x^2 - 2x + 6}$$

On retiendra qu'on ne regroupe des x qu'avec des x , des x^2 qu'avec des x^2 etc.

Factoriser une somme de termes signifie la transformer en un produit.....

On factorise, lorsque c'est possible, par reconnaissance d'un facteur commun et à l'aide des identités suivantes :

Pour tous réels k, a et b , on a : $k \times a + k \times b = \dots k \times (a+b) \dots$ et $k \times a - k \times b = \dots k \times (a-b) \dots$

Ce qui s'écrit encore : $ka + kb = k(a+b)$
 $ka - kb = k(a-b)$

↳ facteur commun

Exemples

Factoriser les expressions suivantes :

$$3x + 3y = 3(x+y)$$

$$5x - 10y = 5(x-2y)$$

$$3x^2 - x = x(3x-1)$$

$$2x^2 + 4x(x-2) = 2x \times x + 4x(x-2) = x(2x + 4(x-2)) = x(6x-8) = 2x(3x-4)$$

$$(2x+3)^2 + 6x + 9 = (2x+3)^2 + 3(2x+3) = (2x+3)(2x+3+3) = (2x+3)(2x+6) = (2x+3)(2(x+3)) = \boxed{2(2x+3)(x+3)}$$

$$(3x+1)(x-1) - 2(2x-1)(3x+1) = (3x+1)((x-1) - (2(2x-1))) = (3x+1)(x-1-4x+2) = \boxed{(3x+1)(-3x+1)}$$

II - Les identités remarquables

Nous allons voir de nouveaux outils, qui vont nous permettre, dans certains cas, de développer et factoriser rapidement certaines expressions algébriques.

Tout d'abord, **une identité** est une **égalité vraie quelles que soient les valeurs des variables**.

Par exemple, l'égalité : $2(x+5) = 2x + 10$ est vraie pour tout réel x : $2(x+5) = 2x + 10$ est donc une identité.

Identité remarquable numéro 1

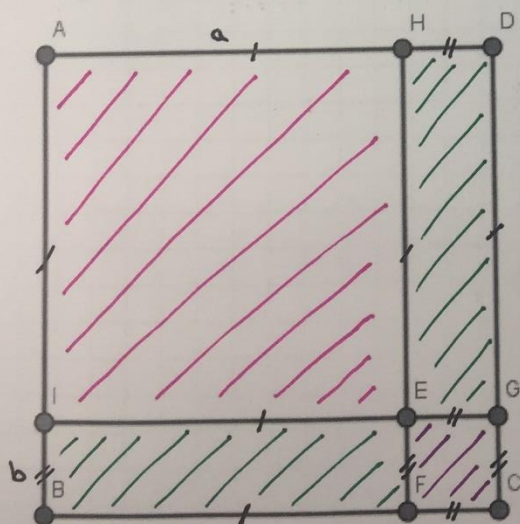
Pour tous réels a et b , on a : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Remarque : le terme $2ab$ de la forme développée de cette identité remarquable est appelé ...le...
...double produit.....

Preuve : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2 \times ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\swarrow \searrow$
" "
 ab car la multiplication est commutative

Illustration géométrique du carré d'une somme de deux termes strictement positifs :



AHEI est un carré de côté a et d'aire a^2 .

EFGH est un carré de côté b et d'aire b^2 .

IBEF et EFGH sont des rectangles de longueur a et de largeur b et d'aire ab .

Rq : ABCD est un carré de côté $a+b$.

Donc $A(ABCD) = (a+b)^2$

Or $A(ABCD) = A(AHEI) + A(EFGH) + A(IBEI) + A(EGDH)$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + \underbrace{ab + ab}_{2ab}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Remarque

La précédente illustration géométrique doit vous éviter la fréquente erreur d'oubli du double produit lorsqu'on développe à l'aide de l'identité remarquable numéro 1.

Enfonçons le clou :

Calculer : $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. puis $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$ Conclusion ? $(2+3)^2 \neq 2^2 + 3^2$!

Pour calculer $(2+3)^2$, inutile d'utiliser l'identité remarquable.

Exercice 2

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$$(x+4)^2 = x^2 + 2x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(2x+5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$\left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{2x}{3} \times \frac{4}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4x^2}{9} + \frac{16x}{21} + \frac{16}{49}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2 \times (a+b) \times c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2cb + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer, sans poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice : $21^2 = (20+1)^2 = 400 + 40 + 1$
= 441

Exercice 4

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x+5)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x+1)^2$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{3} + 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{3} \times 1 + 1^2 = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$$

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x+2)^2$$

Identité remarquable numéro 2

Pour tous réel a et b , on a : ♥♥ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Preuve : $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \times a - a \times b - b \times a + b \times b = a^2 - ab - ba + b^2 = \underline{a^2 - 2ab + b^2}$

Exercice 5

Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$$(x-7)^2 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = x^2 - 14x + 49$$

$$(4t-3u)^2 = (4t)^2 - 2 \times 4t \times 3u + (3u)^2 = 16t^2 - 24tu + 9u^2$$

$$(2x-5y)^2 = 4x^2 - 2 \times 2x \times 5y + 25y^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

$$\left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 - \frac{30}{8}x + \frac{25}{16} = \frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{25}{16}$$

Exercice 6

Calculer, sans poser de multiplication et sans utiliser de calculatrice : $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = \underline{361}$.

Exercice 7

Factoriser les expressions suivantes : I.R.2

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = \overset{\text{I.R.2}}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{(3x+1)(x-4)}^F + x^2 - 8x + 16 &= (3x+1)(x-4) + x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = (3x+1)(x-4) + (x-4)^2 \\ &= (x-4)(3x+1+x-4) \\ &= \boxed{(x-4)(4x-3)} \end{aligned}$$

Identité remarquable numéro 3 : Elle permet de factoriser une différence de 2 carrés !

Pour tous réel a et b , on a : ♥♥ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Preuve : $(a+b)(a-b) = a \times a - a \times b + b \times a - b \times b = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Exercice 8

Développer rapidement :

$$(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$$

$$(x-5)(x+5) = x^2 - 25$$

Exercice 9

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$$x^2 - 36 = x \times x - 6 \times 6 = (x+6)(x-6)$$

$$4x^2 - 9 = 2x \times 2x - 3 \times 3 = (2x+3)(2x-3)$$

$$25x^2 - 49y^2 = 5x \times 5x - 7y \times 7y = (5x+7y)(5x-7y)$$

$$(2x+5)^2 - (4x-2)^2 = (2x+5+4x-2)(2x+5-(4x-2)) = (6x+3)(2x+5-4x+2) = (6x+3)(-2x+7)$$

$$\begin{aligned} (3x-1)(2x+3) - (9x^2-1) &= (3x-1)(2x+3) - ((3x)^2 - 1^2) = (3x-1)(2x+3) - (3x+1)(3x-1) \\ &= (3x-1)(2x+3 - (3x+1)) = (3x-1)(-x+2) \end{aligned}$$

Identité remarquable 3

$$\frac{x^2}{4} - \frac{9y^2}{100} = \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} - \frac{3y}{10} \times \frac{3y}{10} = \left(\frac{x}{2} + \frac{3y}{10}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{3y}{10}\right)$$

Calculer mentalement : $51^2 - 49^2$ puis $33^2 - 29^2$.

$$51^2 - 49^2 = (51+49)(51-49) = 100 \times 2 = 200$$

$$33^2 - 29^2 = (33+29)(33-29) = 62 \times 4 = 248$$

III- Les puissances

A- Quelques rappels sur les puissances de 10

Définitions

Soit n un entier naturel non nul : cela se note mathématiquement : $n \in \mathbb{N}^*$ (lire $\mathbb{N}$ étoile l'ensemble formé par les entiers naturels non nuls).

La notation 10^n désigne l'entier naturel $\underbrace{100\dots 0}_n$: $10^n = \underbrace{100\dots 0}_n$ ♥♥

$$\heartsuit \heartsuit 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{100\dots 0}_n} \text{ et } 10^0 = 1.$$

$$= \underbrace{10 \times 10 \dots \times 10}_n$$

n facteurs ts égaux à 10

Voici deux tableaux utiles en Physique par exemple !

Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^1	dix	10	déca	Da
10^2	cent	100	hecto	h
10^3	mille	1 000	kilo	k
10^6	million	1 000 000	méga	M
10^9	milliard	1 000 000 000	giga	G
10^{12}	mille milliards	1 000 000 000 000	téra	T

Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^{-1}	dixième	0,1	déci	d
10^{-2}	centième	0,01	centi	c
10^{-3}	millième	0,001	milli	m
10^{-6}	millionième	0,000 001	micro	μ
10^{-9}	milliardième	0,000 000 001	nano	n
10^{-12}	millième de milliardième	0,000 000 000 001	pico	p

Enfin, terminons les rappels par la notion d'écriture scientifique, notation utilisée par la calculatrice :

Tout nombre décimal (= nombre ayant éventuellement un nombre fini de chiffres après la virgule) positif et non nul x s'écrit sous la forme : $x = a \times 10^n$ où : n est un entier relatif, et a est un nombre décimal compris entre 1 inclus et 10 exclu.

La précédente écriture : $x = a \times 10^n$ est appelée écriture scientifique du nombre décimal x .

Le décimal a ne comporte donc qu'un seul chiffre non nul avant son éventuelle virgule !

C'est la notation standard utilisée par les calculatrices (notée $x \cdot 10^n$) et les ordinateurs.

ou E

$$10^{-m} < 1$$

$$10^m \geq 1$$

Exemples

1) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$A = 2320000 \quad ; \quad B = 0,00057$$

$$A = 2320000 = 2,32 \times 10^6$$

$$B = 0,00057 = 5,7 \times 10^{-4}$$

2) Donner l'écriture décimale correspondante à l'écriture scientifique suivante :

$$C = 7,68 \times 10^{-5} = 0,0000768$$

Nous allons voir que les puissances de 10 ne sont qu'un cas particulier de puissances.

B- Puissances entières d'un nombre réel non nulDéfinition

Soient a un nombre réel, et n un entier naturel non nul.

Le produit de n facteurs tous égaux à au réel a est noté : a^n et se lit : " a exposant n " ou encore a puissance n .

On a donc :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux au réel } a}$$

En particulier, $a^1 = a$, et si $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$.

Exemples

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

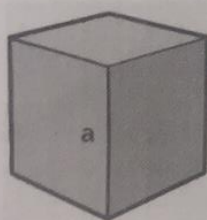
$$(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$$

$$3,5^2 = 3,5 \times 3,5 = 12,25$$

$$x^3 = x \times x \times x$$

$$3^0 = 1$$

En géométrie, le volume V d'un cube dont la longueur des arêtes est a est donné par :



$$V = a^3$$

Enfin, si $a \neq 0$ et n est un entier naturel non nul, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs tous égaux au réel } a}}$

En particulier, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ est fréquemment utilisée en Physique !

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad ; \quad 7^{-1} = \frac{1}{7} \quad ; \quad (-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)} = \frac{1}{625}$$

Les puissances ont des propriétés qui vont permettre de simplifier les écritures et d'accroître la puissance de l'arsenal calculatoire que vous possédez.

Au collège, vous avez vu des règles de calcul sur les puissances de 10.

Nous allons généraliser ces dernières à un nombre a non nul.

Activité

Ecrire sous la forme d'une seule puissance, chacune des expressions suivantes :

$$2,4^3 \times 2,4^2 = 2,4^{3+2} = 2,4^5$$

$$\frac{3^5}{3^7} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} \quad (= 3^{5-7})$$

$$(4^2)^3 = (4 \times 4)^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 \quad (= 4^{2 \times 3})$$

$$2^3 \times 5^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \quad (= (2 \times 5)^3)$$

$$\frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

On généralise sans difficulté les exemples précédents :

Propriétés ♥♥♥♥

Quels que soient les réels a et b non nuls, et quels que soient les entiers relatifs n et p , on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

Exemple : $2,6^3 \times 2,6^{11} = 2,6^{3+11} = 2,6^{14}$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

Exemple : $\frac{(-1,5)^7}{(-1,5)^4} = (-1,5)^{7-4} = (-1,5)^3$

$$(a^n)^p = a^{n \times p}$$

Exemple : $(5,1^2)^7 = 5,1^{2 \times 7} = 5,1^{14}$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemple : $2^3 \times 7^3 = (2 \times 7)^3 = 14^3$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemple : $\frac{3,1^5}{1,7^5} = \left(\frac{3,1}{1,7}\right)^5 = \left(\frac{31}{17}\right)^5$

Ces propriétés, d'usage courant en mathématiques, sont à connaître dans les deux sens !

Exercice 10

1) Ecrire sous la forme d'une seule puissance, chacune des expressions suivantes :

$$A = \underline{2,5^3} \times \underline{2,5^{-4}} \times \underline{(2,5^2)^{-3}} = \underline{2,5^{3+(-4)}} \times \underline{2,5^{2 \times -3}} = \underline{2,5^{-1}} \times \underline{2,5^{-6}} = \underline{(2,5^{-1+(-6)})} = \underline{2,5^{-7}}$$

Dans toute la suite, x désigne un réel non nul et n est entier.

$$B = \frac{x^4 \times x^{-1}}{(x^3)^2} = \frac{x^{4+(-1)}}{x^{3 \times 2}} = \frac{x^3}{x^6} = x^{3-6} = x^{-3} \quad B' = \frac{x}{x^{-n}} = \frac{x^1}{x^{-n}} = x^{1-(-n)} = x^{n+1}$$

$$B'' = \frac{x^{n+2}}{(x^n)^2} \times \frac{1}{x^{-n} \times x^3} = \frac{x^{n+2}}{x^{n \times 2}} \times \frac{1}{x^{n+3}} = \frac{x^{n+2-2n}}{x^{n+3}} \times x^{-3n} = x^{-n+2+n-3} = x^{-1}$$

$$C = \frac{13,1^{-3}}{1,31^{-3}} = \left(\frac{13,1}{1,31} \right)^{-3} = 10^{-3}$$

$$D = \frac{3^{-10} \times 9^2}{3^5} = \frac{3^{-10} \times (3^2)^2}{3^5} = \frac{3^{-10} \times 3^4}{3^5} = \frac{3^{-6}}{3^5} = 3^{-6-5} = 3^{-11} \quad E = \frac{(5^{-5})^3}{((5^2)^3)^4} = \frac{5^{-15}}{(5^6)^4} = \frac{5^{-15}}{5^{24}} = 5^{-15-24} = 5^{-39}$$

2) Donner l'écriture scientifique de : $F = 2375 \times 10^{-14} = 2,375 \times 10^3 \times 10^{-14} = 2,375 \times 10^{-11}$

3) Ecrire sous la forme : $a^n \times b^p$, où n et p sont des entiers relatifs :

$$G = (a^3 \times b)^4 \quad ; \quad H = a^2 \times \left(\frac{a}{b} \right)^3 \times b^{-5} \quad ; \quad I = a^4 b^{-6} (ab)^3 = a^4 \times b^{-6} \times a^3 \times b^3$$

$$= (a^3)^4 \times b^4 = a^{12} \times b^4 \quad = a^2 \times \frac{a^3}{b^3} \times b^{-5} = a^2 \times a^3 \times \frac{b^{-5}}{b^3} = a^5 \times b^{-8} \quad = a^7 \times b^{-3}$$

$$4) \text{ Simplifier l'expression suivante : } J = \left(\frac{3}{4} \right)^{25} \times \left(\frac{4}{3} \right)^{24} = \frac{3^{25}}{4^{25}} \times \frac{4^{24}}{3^{24}} = \frac{4^{24}}{4^{25}} \times \frac{3^{25}}{3^{24}} = 3^1 \times 4^{-1} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5) Matt a écrit dans son DM : $3 \times 10^2 = 30^2 = 900$. Qu'en pensez-vous ?

❌ $3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$ Matt fait : $(3 \times 10)^2 = 30^2 = 900$ Il élève au carré 30 et non pas 10.

6) Calculer sous forme simplifiée au mieux : $\frac{2^7 \times 10^{-5} \times 3^{10}}{10^{-9} \times 2^5 \times 3^7} = \frac{2^7 \times 10^{-5} \times 3^{10}}{2^5 \times 10^{-9} \times 3^7} = 2^2 \times 10^{-5-(-9)} \times 3^3$

$$= 2^2 \times 10^4 \times 3^3$$

$$= 4 \times 27 \times 10000$$

$$= 1080000$$

Remarque

Il n'existe aucune règle pour additionner ou soustraire deux puissances d'un même nombre !

Exemples

Calculer : $10^2 + 10^3$ et comparer le résultat à 10^5 . Conclusion ? $1100 \neq 10000$ donc $10^2 + 10^3 \neq 10^5$
 $100 + 1000 = 1100$ 100000

De même calculer la valeur de $10^3 - 10^2$ et celle de 10^{3-2} . Conclusion ? $900 \neq 10$ donc
 $1000 - 100 = 900$ $10^1 = 10$ $10^3 - 10^2 \neq 10^{3-2}$

Exercice 11

Soient $A = 5 \times 10^3$ et $B = 5 \times 10^{-3}$.

Calculer, sans utiliser de calculatrice, les expressions : $A+B$; $A-B$; $A \times B$ et $\frac{A}{B}$.

$$A+B = 5000 + 0,005 = 5000,005 \quad \left| \quad \frac{A}{B} = \frac{5 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}} = 10^6$$

$$A-B = 5000 - 0,005 = 4999,995$$

IV- Les racines carrées

$$A \times B = 5 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3} = 5 \times 5 \times 10^2 \times 10^{-3} = 25 \times 1 = 25$$

Au collège, vous avez déjà rencontré cette notion que nous allons définir rigoureusement.

Exemple

Un carré a pour aire 16 m^2 . Déterminer la longueur des côtés de ce carré.

$c = 4$ car on cherche le nb positif c , qui élevé au carré donne 16 comme résultat.
 $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{16}$ est le nb positif qui élevé au carré donne 16.

Définition

Soit a un réel positif ou nul. Cette phrase se note mathématiquement : $a \geq 0$.

♥♥ On appelle racine carrée de a , l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré est égal à a . ♥♥

On note $\sqrt{a}$ la racine carrée de a .

D'après la définition, on a donc :

pour tout nombre a positif ou nul : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a} \geq 0$.

Exemples

$$\sqrt{100} = 10 \quad ; \quad \sqrt{0} = 0 \quad ; \quad \sqrt{1} = 1$$

Bien souvent, on ne sait pas donner de tête les valeurs des racines carrées.

On se contentera, de donner une valeur approchée, si besoin en est, grâce à une calculatrice : par exemple, $\sqrt{3} \approx 1,73$ arrondi au centième près.

Remarques

Le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé le radical.

❖ Jamais de nombre négatif sous le radical : écrire $\sqrt{-2}$ est une faute, vu que la précédente écriture n'a aucun sens car -2 est un nombre négatif !

$$\Delta \sqrt{a} \neq \frac{1}{2} \quad \text{ex: } \sqrt{9} = 3 \neq \frac{9}{2} = 4,5.$$

D'un point de vue géométrique, si a est un nombre positif, $\sqrt{a}$ représente la longueur des côtés...
d'un carré dont l'aire est égale à a .

Nous allons voir que la racine carrée a des propriétés "compatibles" avec le produit et le quotient seulement.

Propriétés bien utiles des racines carrées

Pour tous nombres réels a et b positifs ou nuls, on a :

$$1) \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

$$2) \text{ Si de plus, } b \neq 0, \text{ on a : } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Preuve : $a \geq 0$ et $b \geq 0$, donc $a \times b \geq 0$ (règles des signes)

Donc $\sqrt{a \times b}$ existe et par définition même de la racine carrée, on a : $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$

$$\text{Et : } (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$$

$$\text{Donc : } (\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$$

Par suite (unicité de la $\sqrt{}$) on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Remarque

Si a est un réel positif ou nul, à quoi est égal $\sqrt{a^2}$? $= a$.

A-t-on le droit d'écrire $\sqrt{a^2}$ lorsque a est un réel négatif ? Dans l'affirmative, simplifier la quantité : $\sqrt{a^2}$. Oui et $\sqrt{a^2} = -a$ lorsque $a \leq 0$. $a^2 \geq 0$ donc $\sqrt{a^2}$ existe (= est calculable)

Application : $\sqrt{(\pi-5)^2} = \pi-5$
 $\pi \approx 3,14$, donc $\pi-5 \approx -1,86$, donc $\pi-5 < 0$!

Exemples Or $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.

$$\text{Donc : } \sqrt{(\pi-5)^2} = -(\pi-5) = -\pi+5$$

$$\text{Or : } a^2 = (-a)^2 \text{ et } (-a)^2 = a^2$$

Parmi les nb a et $-a$, $\hat{c} a \leq 0$.

Seul $-a$ est positif.

$$\text{Donc } \sqrt{a^2} = -a \text{ si } a \leq 0.$$

Calculer la valeur exacte de : $A = \sqrt{50} \times \sqrt{2}$ puis $B = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$.

$$A = \sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = 10.$$

$$\text{Exercice 12 } B = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3.$$

Ecrire chacun des nombres suivants, sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers naturels, b étant le plus petit possible :



décomposer le nb sur la racine en un produit de facteurs (l'un étant un carré parfait). le + grand possible

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{5 \times 9} = \sqrt{5} \times \sqrt{9} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{80} - 8\sqrt{45} = 3\sqrt{16 \times 5} - 8 \times 3\sqrt{5} = 3\sqrt{16} \times \sqrt{5} - 24\sqrt{5} = 3 \times 4\sqrt{5} - 24\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 24\sqrt{5} = -12\sqrt{5}$$

$$14\sqrt{18} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{18} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{2} = 9\sqrt{9} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 27\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

factorisation

facteur commun

Exercice 13

1) Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des fractions irréductibles : $A = \sqrt{\frac{5}{36}} + 2\sqrt{\frac{20}{9}}$

$$A = \sqrt{\frac{5}{36}} + 2\sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} + 2\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{6} + 2 \times \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6} + 2 \times \frac{\sqrt{4 \times 5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{8\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5} + 8\sqrt{5}}{6} = \frac{9\sqrt{5}}{6} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

2) Ecrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a et b sont des entiers, et c l'entier naturel le plus petit possible :

$$A = (2 + \sqrt{3})^2 \quad ; \quad B = (3\sqrt{5} - 4)(3\sqrt{5} + 4)$$

$$A = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$B = (3\sqrt{5})^2 - 4^2 = 3 \times \sqrt{5} \times 3 \times \sqrt{5} - 16 = 9 \times 5 - 16 = 45 - 16 = 29 \quad (29 = 29 + 0\sqrt{5})$$

3) Calculer $x^2 + y^2$ où $x = \sqrt{2}(1 + \sqrt{6})$ et $y = 2 - \sqrt{6}$

$$x^2 = (\sqrt{2}(1 + \sqrt{6}))^2 = \sqrt{2}^2 \times (1 + \sqrt{6})^2 = 2(1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2) = 2(1 + 2\sqrt{6} + 6) = 2(7 + 2\sqrt{6}) = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$y^2 = (2 - \sqrt{6})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 4 - 4\sqrt{6} + 6 = 10 - 4\sqrt{6}$$

$$\text{Donc } x^2 + y^2 = 14 + 4\sqrt{6} + 10 - 4\sqrt{6} = 24$$

4) Simplifier $\frac{2}{\sqrt{2}}$ puis, pour x réel strictement positif, simplifier l'expression $C = \frac{x}{\sqrt{x}}$

$$2 = (\sqrt{2})^2, \text{ donc } \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$C = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Remarque

On pourrait être tenté de penser que la racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées....

Malheureusement, il n'en est rien :

Calculer la valeur exacte de chacun des deux nombres : $\sqrt[6]{36}$ puis $\sqrt[8]{64}$ puis $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$
Donc : $\sqrt{36} + \sqrt{64} \neq \sqrt{36+64}$
car $10 \neq \frac{6+8}{14}$

• $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ est en général faux, tout comme $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$!

Rq : $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ est faux : Donnons un contre-exemple : $a=100$; $b=64$

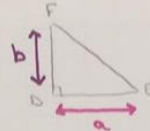
$\sqrt{a-b} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$ $\rightarrow 6 \neq 2$ donc on a un contre-exemple
et $\sqrt{a-b} = \sqrt{100} - \sqrt{64} = 10 - 8 = 2$

Exercice 14

Soit a et b deux réels positifs.

Soit DEF un triangle rectangle en D tel que $DE = a$ et $DF = b$.

Exprimer en fonction de a et b la longueur EF .



Applications numériques : Si $DE = 12$ cm et $DF = 6$ cm, déterminer la valeur exacte de EF en l'écrivant sous la forme : $x\sqrt{y}$ où x et y sont des entiers naturels, y étant le plus petit possible.

$\rightarrow$ voir suite

Un point d'esthétique :

En mathématiques, on a pour *habitude* de ne pas faire figurer de racines carrées au dénominateur des écritures fractionnaires.

Par exemple, on n'écrira pas $\frac{5}{\sqrt{3}}$ mais $\frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\rightarrow$ voir suite p18

Exercice 14

Dans le triangle DEF rectangle en D , le théorème de Pythagore dit que :

$$FE^2 = FD^2 + DE^2$$

$$FE^2 = b^2 + a^2$$

$$\text{donc } FE = \sqrt{b^2 + a^2}$$

Applications numériques : $DE = 12$ cm, donc $a = 12$
 $DF = 6$ cm, donc $b = 6$

$$\text{donc } FE = \sqrt{12^2 + 6^2}$$

$$FE = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180}$$

$$FE = \sqrt{9 \times 20} = \sqrt{9} \times \sqrt{20} = 3\sqrt{20} = 3\sqrt{4 \times 5} = 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \underline{6\sqrt{5} \text{ cm.}}$$

En utilisant les règles sur les racines carrées et sur les fractions, écrire le nombre $\frac{5}{\sqrt{3}}$ avec un dénominateur entier.

Technique (à retenir) : On multiplie numérateur et dénominateur de la fraction par le dénominateur.

$$\text{Rappel : } \frac{a}{b} = \frac{b \times a}{b \times b} \text{ pour } b \neq 0 \text{ non nul.}$$

Exemple

$$\text{Ecrire sans racine carrée au dénominateur : } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Définition

Soient a , b et c des nombres réels avec $c > 0$.

On appelle **quantité conjuguée** du nombre $a + b\sqrt{c}$ le nombre : $a - b\sqrt{c}$ (et vice-versa).

La quantité conjuguée d'une expression comportant des racines carrées s'obtient tout bêtement en changeant l'addition des termes en soustraction des termes et vice-versa !

Exemple

La quantité conjuguée de : $3,1 + 2\sqrt{5}$ est : $3,1 - 2\sqrt{5}$

La quantité conjuguée de $4 - 3\sqrt{7}$ est : $4 + 3\sqrt{7}$

La quantité conjuguée de $\sqrt{5} - 2$ est : $-2 - \sqrt{5}$ ou $-2 + \sqrt{5}$

Ecrire, sans racine carrée au dénominateur, le nombre suivant : $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

Méthode : On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par le conjugué de son dénominateur, car : $(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c}) = a^2 - (b\sqrt{c})^2 = a^2 - b^2 \times c$: plus de racine carrée.

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2 \times (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}^2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2}$$

↑
x (-1) en haut et en bas

Exemple

Ecrire, en détaillant les étapes, le nombre $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ sous la forme : $a+b\sqrt{c}$, où a et b sont des entiers, et c l'entier naturel le plus petit possible.

$$A = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{3-2} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{1} = \underline{\underline{5+2\sqrt{6}}}$$

= conjugué