

Chapitre VII

LES VECTEURS

I - Généralités

Définition 1 : On dit que deux droites ont la même direction lorsqu'elles sont parallèles.

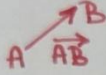
Remarque : une direction étant fixée, il y a deux sens de parcours sur une droite donnée.

Illustration : Sur la droite (AB) , il y a deux sens de parcours : de A vers B et de B vers A .

→ 1^{er} sens de parcours : de A vers B
→ 2^e sens de parcours : de B vers A

Définition 2 : Un vecteur est un "segment de droite orienté".

Illustration :



Il faut trois renseignements pour caractériser un vecteur :

- Sa direction (celle de la droite (AB)).
- Son sens (de A vers B).
- Sa longueur, encore appelée la norme du vecteur, qui n'est autre que la longueur du segment $[AB]$.

Le point A est appelé l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point B est appelé l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
La flèche sur un vecteur va toujours de l'origine vers l'extrémité de ce vecteur !

Remarques importantes : Un vecteur n'est ni une longueur, ni une droite, ni un segment.

Ne pas oublier la flèche dans la notation des vecteurs qui donne tout son sens au vecteur.

En particulier, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, tandis que $\underbrace{AB = BA}_{\text{longueurs}}$, $\underbrace{[AB] = [BA]}_{\text{segments}}$, et $\underbrace{(AB) = (BA)}_{\text{droites}}$

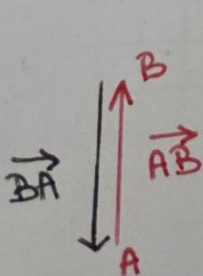
Des cas particuliers de vecteurs : Le vecteur nul n'a pas de direction, ni de sens, et sa norme vaut 0.

On l'appellera le vecteur nul : on le notera $\vec{0}$: un vecteur est nul lorsque son origine coïncide avec son extrémité.

Deux vecteurs qui ont la même direction, la même norme, mais des sens contraires sont dits opposés.

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés : par analogie avec les nombres, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $-\overrightarrow{AB}$ et on a : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Illustration :



$\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

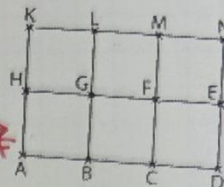
Propriété : égalité de deux vecteurs.

♥♥ Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes caractéristiques, à savoir s'ils ont la même direction, le même sens, et la même norme. ♥♥

Illustration : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie donc que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, que l'on se déplace pour aller de A vers B dans le même sens que pour aller de C vers D, et qu'enfin, les segments [AB] et [CD] ont la même longueur.

Exemple

On donne la figure ci-contre formée de six carrés juxtaposés :



a) Citer deux vecteurs égaux. $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{GF}$

b) Citer deux vecteurs qui ont seulement la même norme. $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{GF}$

c) Citer deux vecteurs opposés. $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{GB}$

d) Citer deux vecteurs qui ont la même direction, des sens opposés et des normes différentes. $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{KA}$

Remarque cruciale : A partir de maintenant, on emploiera fréquemment le terme de représentant d'un vecteur : un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur qui est égal à $\overrightarrow{AB}$.

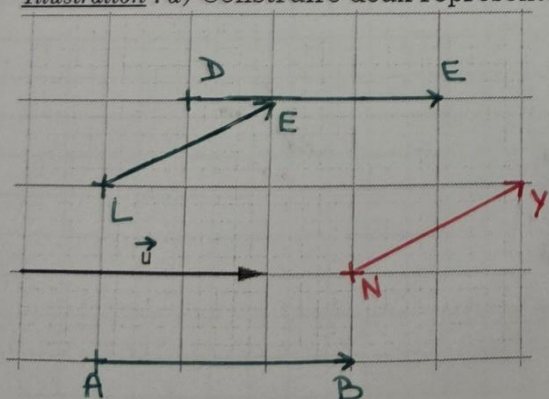
Comme il y a une infinité de représentants d'un vecteur donné, on note conventionnellement $\vec{u}$ un tel représentant, sans nommer son origine et son extrémité.

Exemple

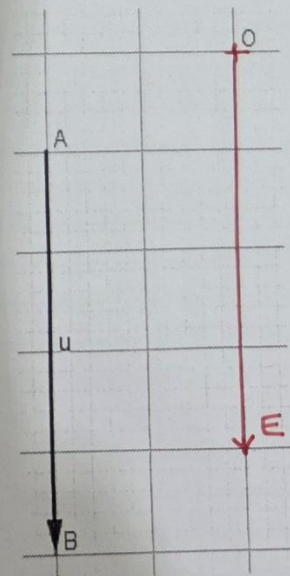
Donner deux représentants du vecteur $\overrightarrow{GE}$ dans l'exemple précédent.

$\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{LN}$ sont deux représentants de $\overrightarrow{GE}$.

Illustration : a) Construire deux représentants du vecteur $\vec{u}$ dessiné ici :



b) Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont l'origine est le point O :



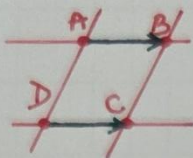
II - Lien entre les vecteurs et la géométrie

Nous allons voir, grâce à la propriété suivante, que les vecteurs constituent un outil très performant pour faire de la géométrie.

Théorème fondamental (Fait le lien entre les vecteurs et la géométrie).

♥♥♥♥ $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$ ♥♥♥♥

Illustration :



Preuve :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $(AB) \parallel (DC)$ car côtés opposés du parallélogramme 2 à 2 parallèles.
 $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ ont même sens.
 Enfin, $AB = DC$ car les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur.

Réciproque :

Si $\vec{AB} = \vec{DC}$, alors $(AB) \parallel (DC)$ car deux vecteurs égaux ont même direction.

De plus, $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ ont même sens donc $ABCD$ n'est pas croisé.

Enfin, $AB = DC$ donc ce quadrilatère est un parallélogramme.

$A \Leftrightarrow B$ signifie 2 choses :

- Si A est vraie alors B aussi
- Si B est vraie alors A aussi

Avertissement : dès qu'on parle de vecteurs, de parallélogrammes, faites toujours, même si cela n'est pas demandé, une figure à main levée.
 ♦ J'attire votre attention sur le fait que $ABCD$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et non pas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ comme on est souvent tenté de l'écrire par rapidité. Attention à l'ordre des points. ♦

Exemples

- $IJKL$ est un parallélogramme équivaut à dire que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$
- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{UV}$ équivaut à dire que $RTVU$ est un parallélogramme

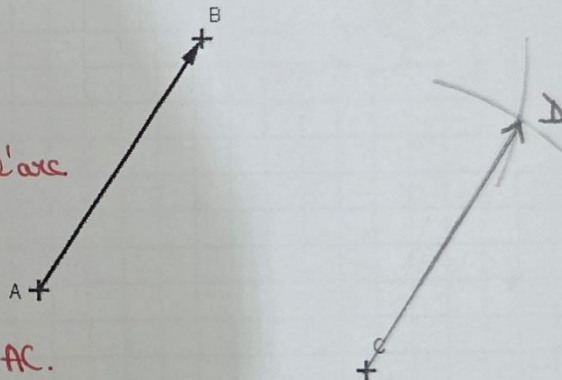
Application : Construction géométrique d'un représentant d'un vecteur donné (sur papier sans carreau).

Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine C . = Construire le vecteur (appelé $\overrightarrow{CD}$) tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Méthode : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ revient à dire que : $ABDC$ est un parallélogramme.
 D est le quatrième sommet du pgm $ABDC$ (A , B et C sont connus).
 Un pgm a ses côtés opposés de même longueur.
 On utilise le compas pour construire D .

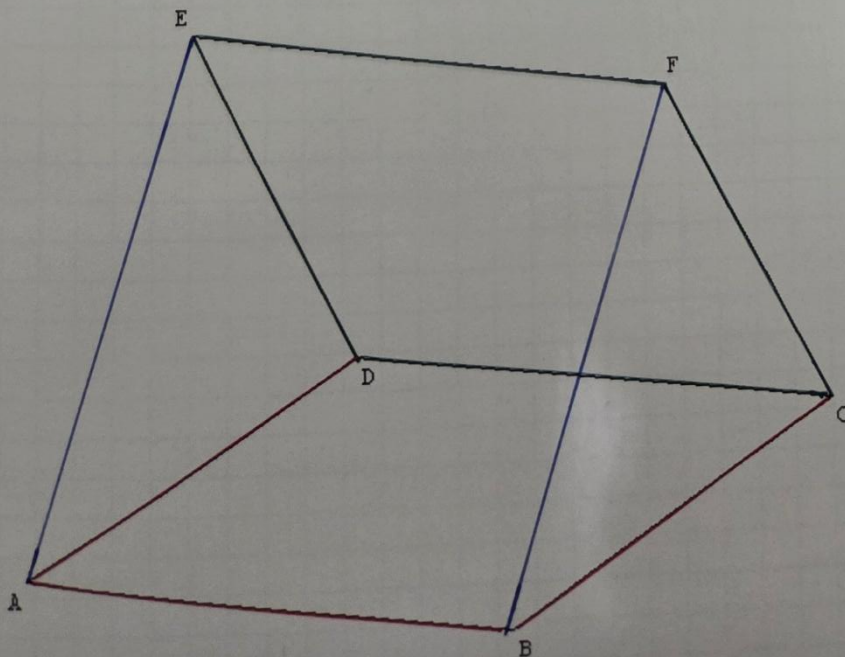
Construction :

On prend avec le compas la distance AB .
 On la reporte à partir de C en traçant l'arc de cercle de centre C et de rayon AB .
 On prend enfin la longueur AC et on la reporte à partir du point B en traçant l'arc de cercle de centre B et de rayon AC .
 Ainsi : D est à l'intersection de ces deux arcs de cercle.



Exercice 1

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ et $CDEF$ sont des parallélogrammes.
 Démontrer que $ABFE$ est un parallélogramme.



ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*)

CDEF est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ (**)

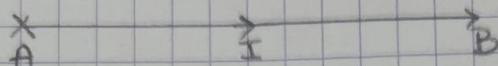
(*) et (**) font que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Donc ABFE est un parallélogramme.

Exercice 2

Construire trois points A, I et B tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Que peut-on dire du positionnement de ces trois points ? Justifier.



Constat : A, I et B sont alignés

Mieux : I est le milieu de [AB]

III - Les translations

Définition : Le mouvement qui consiste à se déplacer en ligne droite sans tourner est appelé une translation.

Par exemple, un escalator, un ascenseur sont animés de mouvement de translation.

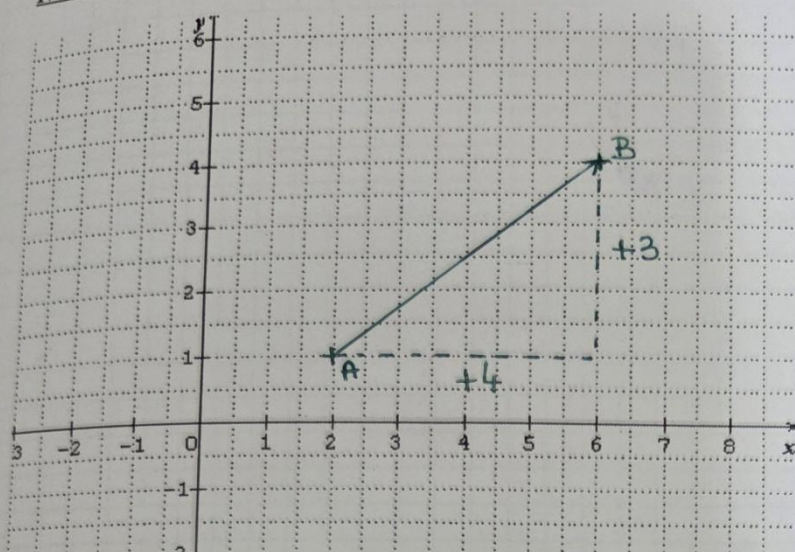
Remarque : Le mouvement décrit précédemment qui permet d'aller d'un point A à un point B est appelé la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Soit la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

↖ à l'arrivée (extrémité du vecteur)

IV - Vecteurs et géométrie analytique



Un exemple d'introduction : Soit $A(2 ; 1)$ et $B(6 ; 4)$, et considérons le vecteur $\vec{AB}$. Placer A et B, puis construire le vecteur $\vec{AB}$.

Pour aller du point A au point B en suivant les directions des axes de coordonnées, on avance de 4 unités à l'horizontale et on monte de 3 unités à la verticale.

On dira que le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(4 ; 3)$ et on notera en colonne les coordonnées d'un vecteur : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 ← déplacement horizontale : abscisse
 ← déplacement verticale : ordonnée

Cette notation, permet de différencier les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point.

♥♥ Propriété (XXL) ♥♥

Soit $(O ; I ; J)$ un repère du plan et $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points placés dans ce repère.

Alors, le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées : ♥♥ $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ♥♥

Si de plus le repère $(O ; I ; J)$ est orthonormé, alors :

$$♥♥ \|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_{\vec{AB}})^2 + (y_{\vec{AB}})^2} \quad \begin{matrix} x_{\vec{AB}} = x_B - x_A = \text{abscisse de } \vec{AB} \\ y_{\vec{AB}} = y_B - y_A = \text{ordonnée de } \vec{AB} \end{matrix} ♥♥$$

Cette propriété traduit l'exemple vu en introduction.

Retenir : pour déterminer les coordonnées d'un vecteur, on fait :

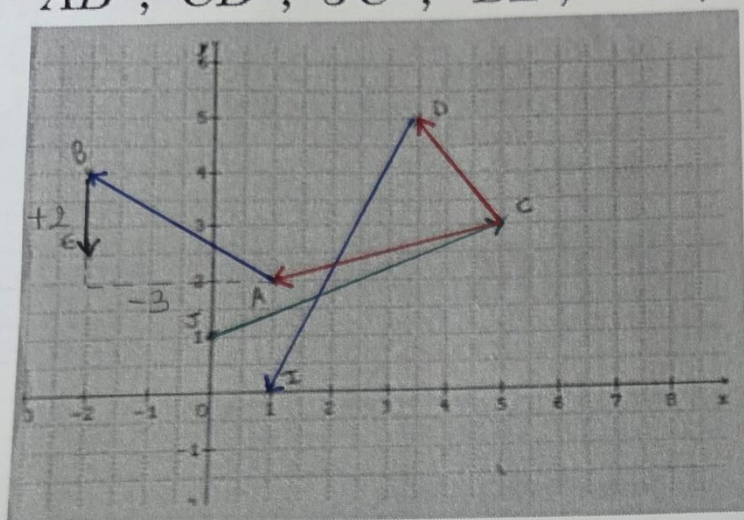
♥ abscisse de L'EXTREMITÉ - abscisse de L'ORIGINE du vecteur ♥, et pareil en ordonnée.

Exemple 1 : Soit $A(2 ; 5)$, $B(-1 ; 3)$ et $C(-4 ; 1)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.

$$\begin{array}{l} \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 2 = -3 \\ y_B - y_A = 3 - 5 = -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B = -4 - (-1) = -3 \\ y_C - y_B = 1 - 3 = -2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ u.l.} \quad \|\vec{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{ u.l.} \end{array}$$

Exemple 2 : En utilisant le repère ci-dessous, lire les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{CA}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} & \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} & \begin{pmatrix} -1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{JC} & \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BE} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DI} & \begin{pmatrix} -2,5 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CA} & \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Propriété clé

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont ... les MÊMES COORDONNÉES ...

x, x', y, y' étant des réels, on a : ♥♥ $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si : $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ ♥♥

Exercices fondamentaux (à maîtriser parfaitement.)

Exercice 3

- 1) Dans un repère $(O ; I ; J)$, placer les points : $A(1 ; 2)$; $B(-3 ; 4)$ et $C(-5 ; -4)$ et $D(-1 ; -6)$.
- 2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
- 3) Déterminer les coordonnées du point K centre de ce parallélogramme.

2) Pour montrer que ABDC est un pgm, il suffit de montrer que $\vec{AB} = \vec{DC}$ en établissant que ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -3-1 = -4 \\ 4-2 = 2 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} \begin{pmatrix} x_c - x_d = -5 - (-1) = -4 \\ y_c - y_d = -4 - (-6) = 2 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

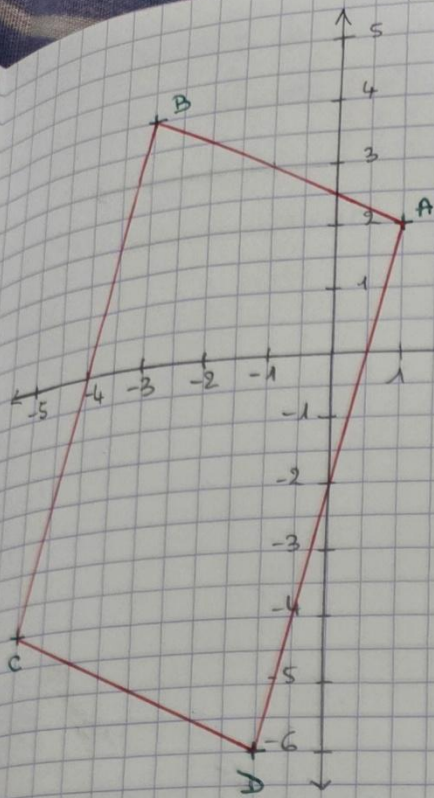
Par suite, $\vec{AB} = \vec{DC}$, donc ABDC est un pgm.

3) K est le centre du pgm ABDC, donc K est le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

$$K = \text{Milieu de } [AC] \text{ donc } K \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

$$K \left(\frac{1 + (-5)}{2}, \frac{2 + (-4)}{2} \right)$$

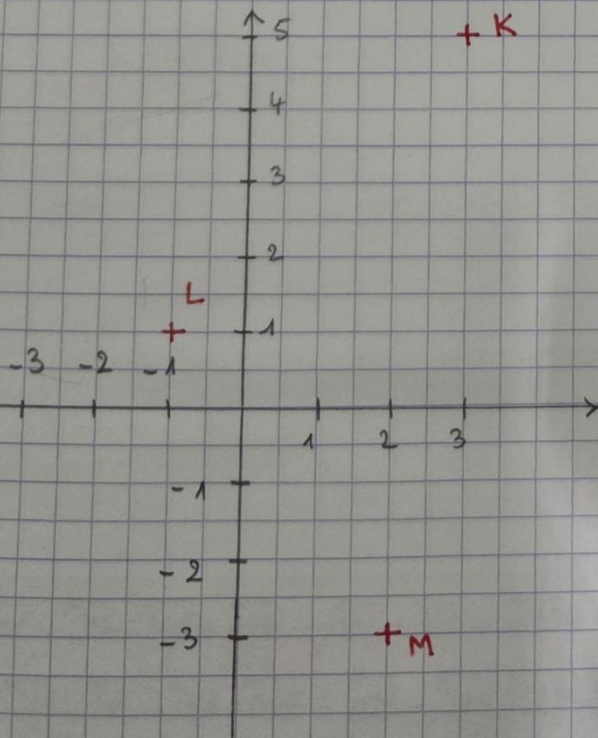
$$K(-2; -1)$$



Exercice 4

- Placer dans un repère orthonormé (O ; I ; J) les points K(3 ; 5) ; L(-1 ; 1) et M(2 ; -3).
- Déterminer, en utilisant des vecteurs, les coordonnées du point N tel que le quadrilatère KLMN soit un parallélogramme.

✕-----



2) Soit N(x; y)

KLMN est un pgm équivaut à dire que :

$$\vec{KL} = \vec{NM}$$

La relation vectorielle : $\vec{KL} = \vec{NM}$ va se traduire par le fait que ces deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

$$\text{Or } \vec{KL} \begin{pmatrix} x_L - x_K = -1 - 3 = -4 \\ y_L - y_K = 1 - 5 = -4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\vec{NM} \begin{pmatrix} x_M - x_N = 2 - x \\ y_M - y_N = -3 - y \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\vec{KL} = \vec{NM}$ s'écrit $\begin{cases} -4 = 2 - x \\ -4 = -3 - y \end{cases}$ même abscisse même ordonnée

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 2 + 4 = 6 \\ y = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

$$N(6; 1)$$

7

V - Opérations algébriques sur les vecteurs

A) Somme de deux vecteurs

Intuitivement, on comprend aisément si l'on raisonne en termes de translation, que prendre un escalator qui emmène de A à B puis prendre un autre escalator qui emmène de B à C revient à prendre un escalator qui emmène de A à C.

De cette façon assez intuitive, on va définir la somme de deux vecteurs : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
 $\uparrow$
 suivi de

♥♥ Propriété : La relation de Michel CHASLES (1793-1880) ♥♥

Pour tous points A, B et C, on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Remarques :

- Cette relation n'est valable qu'avec des vecteurs : écrire : pour tous points A, B et C, $AB + BC = AC$ constitue une monstruosité ! Pourquoi au fait ?
- Pour appliquer cette relation, observez bien que les vecteurs doivent être mis bout à bout, c'est-à-dire que $\odot^*$ l'extrémité de l'un doit coïncider avec l'origine de l'autre. $\odot^*$
- Cette relation de Chasles, s'étend à plus de deux vecteurs : par exemple, écrire plus simplement la somme de vecteurs suivante : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$

Exemples

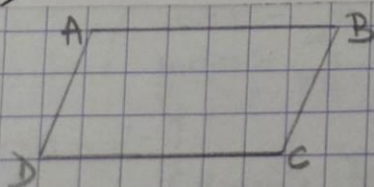
Réduire les sommes de vecteurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{FD} + \vec{DE} &= \vec{FE} & \text{b) } \vec{ZA} + \vec{PZ} &= \vec{PZ} + \vec{ZA} = \vec{PA} & \text{c) } \vec{AB} + \vec{CR} + \vec{BC} &= \vec{AR} \\ \text{d) } \vec{ZA} + \vec{AB} + \vec{BZ} &= \vec{ZZ} = \vec{0} & \text{e) } \vec{AI} + \vec{BI} - \vec{TI} &= \vec{AI} + \vec{BI} & \text{f) } \vec{CD} - \vec{CT} &= \vec{CD} + \vec{TC} = \vec{TC} + \vec{CD} = \vec{TD} \\ & & \vec{AI} + \vec{BI} + \vec{IT} & & & \downarrow \\ & & & & & \text{irréductible} \end{aligned}$$

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme.

Montrer, à l'aide de la relation de Chasles, que pour tout point M on a : $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$.



+ M

$$\begin{aligned} \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} &= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{MC} + \vec{DM} \\ \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} &= \vec{BM} + \vec{MA} + \vec{DM} + \vec{MC} \\ \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} &= \vec{BA} + \vec{DC} \end{aligned}$$

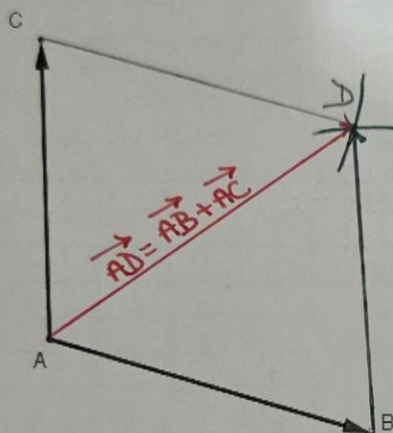
Où ABCD est un pgm, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 Ainsi $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui ne sont pas mis bout à bout mais qui ont la même origine ?

Exemple : Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ issu de A.

Méthode : On se ramène à ce que l'on sait faire ! On va mettre bout à bout le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le représentant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine B.

Construction :



On construit le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'origine B: 8

Soit D le point tel que: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

ABDC est un pgm

On construit D quatrième sommet de ce pgm.

$$\hookrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Règle du parallélogramme : (Permet d'additionner deux vecteurs qui ont la même origine).

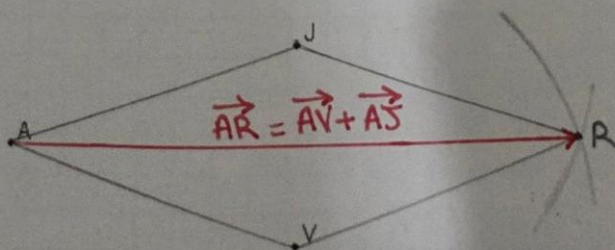
Pour tous points A, B, C et D, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \text{ABDC est un parallélogramme.}$$

Preuve : Se référer à la construction précédente

Exemple : Construire le point R sachant que : $\overrightarrow{AV} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AR}$.

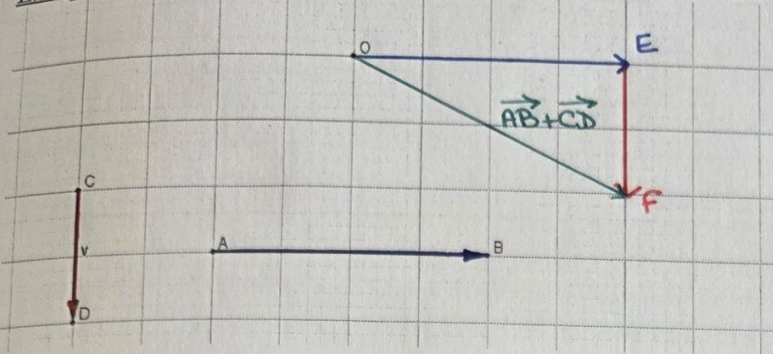
AVRJ est un pgm (propriété précédente.)



Comment procéder si l'on doit additionner deux vecteurs qui n'ont rien de commun ?

Méthode : on se ramène à ce que l'on sait déjà faire, en construisant un représentant de l'un des deux vecteurs dont l'origine est placée à l'extrémité de l'autre.

Exemple : Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ d'origine O.

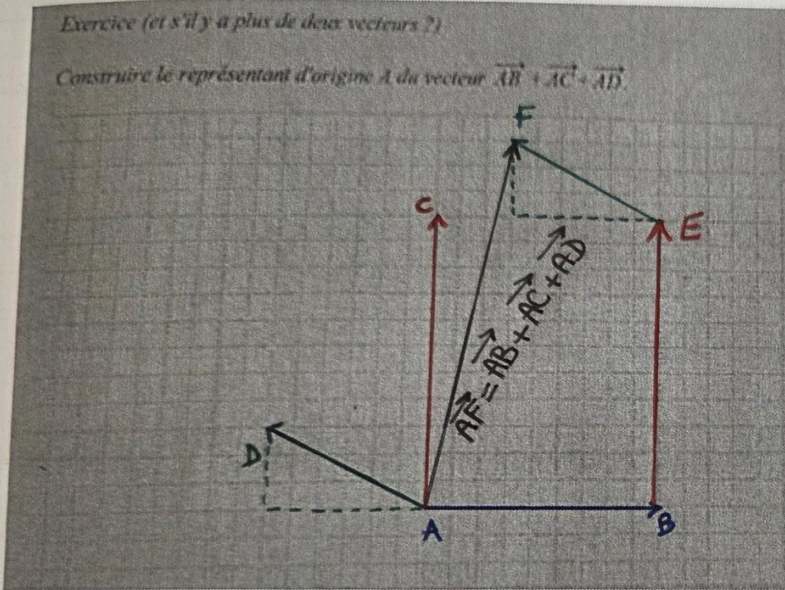


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{EF} \quad (\text{construction})\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF}$$

Exercice (et s'il y a plus de deux vecteurs ?)

Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.



$$\begin{aligned}\text{Par construction : } \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BE} \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{EF}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$$

Remarque : pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ on a : 1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; 2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
Notez l'analogie de ces règles avec celles connues concernant les nombres réels.

Propriété et retour de l'analytique

1) L'addition des vecteurs est commutative, c'est-à-dire que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
on permute l'ordre des deux vecteurs, mais pas l'ordre des lettres de chaque vecteur !

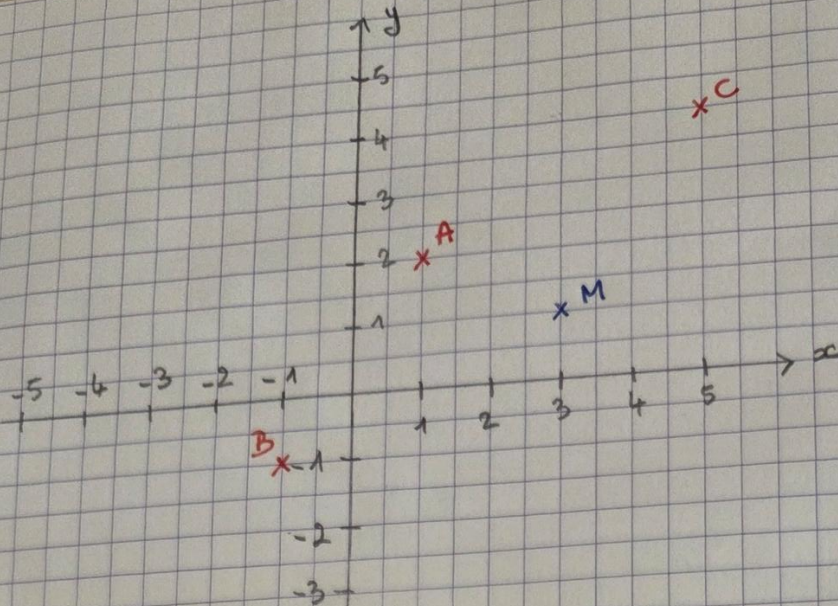
2) Dans un R.O.N. $(O; I; J)$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$.

En d'autres termes, pour avoir les coordonnées de la somme de deux vecteurs donnés, il suffit d'**ADDITIONNER**... respectivement les coordonnées de même nom de chacun des deux vecteurs.

Remarque : Ces deux règles s'étendent à une somme de **plus de deux** vecteurs.

Exemple fondamental : Dans un R.O.N. $(O; I; J)$, soit $A(1; 2)$; $B(-1; -1)$ et $C(5; 4)$.

- 1) Faire une figure, puis déterminer, par le calcul, les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- 2) Déterminer les coordonnées du point K tel que : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.



1) Soit $M(x; y)$: x et y sont les inconnues

↳ On traduit que $\vec{AM}$ et $\vec{AB} + \vec{AC}$ ont les mêmes coordonnées car: $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Où $\vec{AM} \begin{pmatrix} x_M - x_A = x - 1 \\ y_M - y_A = y - 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_B - y_A = -1 - 2 = -3 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A = 5 - 1 = 4 \\ y_C - y_A = 4 - 2 = 2 \end{pmatrix}$

Récapitulatif: $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} + \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} + \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 + 4 = 2 \\ -3 + 2 = -1 \end{pmatrix}$

L'égalité $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$ se traduit par

$x - 1 = 2$ (même abscisse)

$y - 2 = -1$ (même ordonnée)

$x = 2 + 1 = 3$

Donc $M(3; 1)$

$y = -1 + 2 = 1$

2) Soit $K(x_K; y_K)$: x_K et y_K sont les inconnues

$\vec{KA} \begin{pmatrix} x_A - x_K = 1 - x_K \\ y_A - y_K = 2 - y_K \end{pmatrix}$

$\vec{KB} \begin{pmatrix} x_B - x_K = -1 - x_K \\ y_B - y_K = -1 - y_K \end{pmatrix}$

$\vec{KC} \begin{pmatrix} x_C - x_K = 5 - x_K \\ y_C - y_K = 4 - y_K \end{pmatrix}$

Donc $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC}$:

$(1 - x) + (-1 - x) + (5 - x) = 5 - 3x$

$2 - y + (-1 - y) + 4 - y = 5 - 3y$

et $\vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} 5 - 3x = 0 \\ 5 - 3y = 0 \end{cases}$

$3x = 5 = \frac{5}{3}$

$3y = 5 = \frac{5}{3}$

$K\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$

B) Produit d'un vecteur par un réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur, et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ qui est défini comme suit :

- $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.
- $k\vec{u}$ a : le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$.
- $k\vec{u}$ a pour norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ où $|k|$ désigne la distance à 0 du nombre k appelée la valeur absolue de k . Par exemple : $|3| = \dots 3 \dots$; $|-8| = \dots 8 \dots$; $|-2,3| = \dots 2,3 \dots$.

Remarque : si $k = 0$, alors $0 \times \vec{u} = \vec{0}$; si $\vec{u} = \vec{0}$, alors pour tout réel k , $k\vec{u} = \vec{0}$.

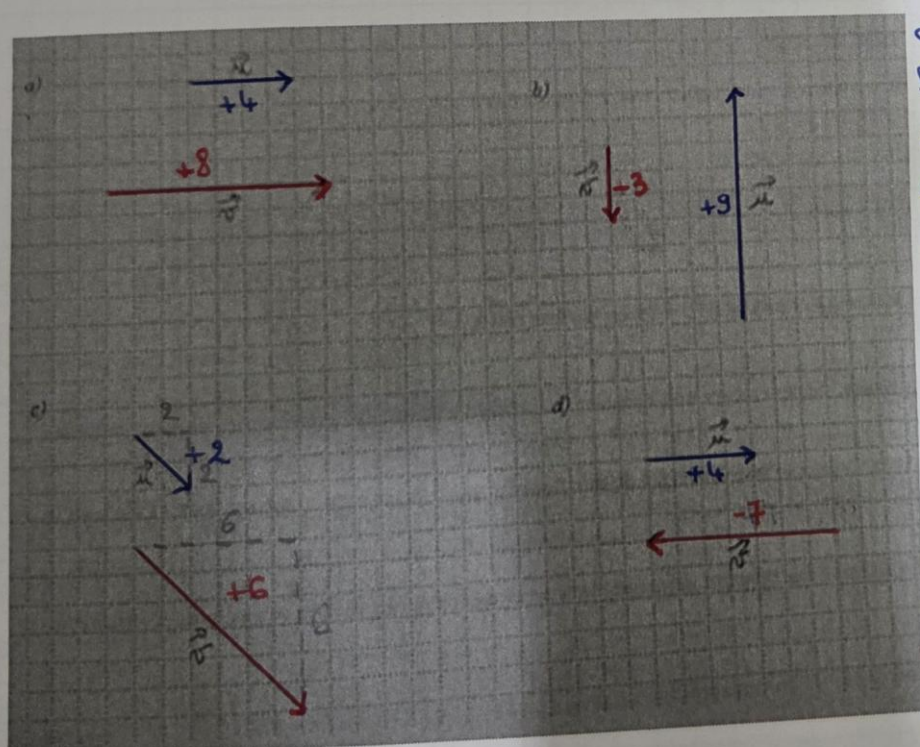
$\vec{u}$, $2\vec{u}$, $0,74\vec{u}$ ont... le même sens.....

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$: $\|2\vec{u}\| = |2| \times \|\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$
 $\|0,74\vec{u}\| = |0,74| \times \|\vec{u}\| = 0,74\|\vec{u}\|$

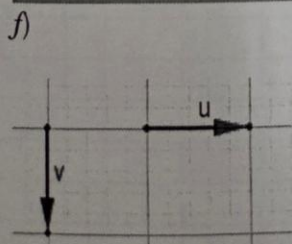
$-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $-\frac{4}{5}\vec{u}$ ont... le même sens contraire à celui de $\vec{u}$

Exprimer la norme de chacun des deux derniers vecteurs en fonction de celle de $\vec{u}$: $\| -3\vec{u} \| = |-3| \times \|\vec{u}\| = 3\|\vec{u}\|$
 $\| -\frac{4}{5}\vec{u} \| = |-\frac{4}{5}| \times \|\vec{u}\| = \frac{4}{5}\|\vec{u}\|$

Exemples : Sur chacun des exemples ci-dessous, exprimer, lorsque c'est possible, le vecteur $\vec{v}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire, trouver, si possible, un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$: $\vec{v}$ est exprimé en fonction du $\vec{u}$



- a) $\vec{v} = 8\vec{u}$
 b) $\vec{v} = -3\vec{u}$
 c) $\vec{v} = 6\vec{u}$
 d) $\vec{v} = -7\vec{u}$



Impossible!
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction

Définition : ♥ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. ♥

Remarque : colinéaire signifie porté par la même ligne, à savoir que des vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction et réciproquement.

COLINÉAIRES = Vecteurs de même direction

En particulier, lorsque $\vec{v} = -\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés ($k = -1$). Des vecteurs opposés sont donc colinéaires. Attention, des vecteurs colinéaires ne sont pas nécessairement opposés !

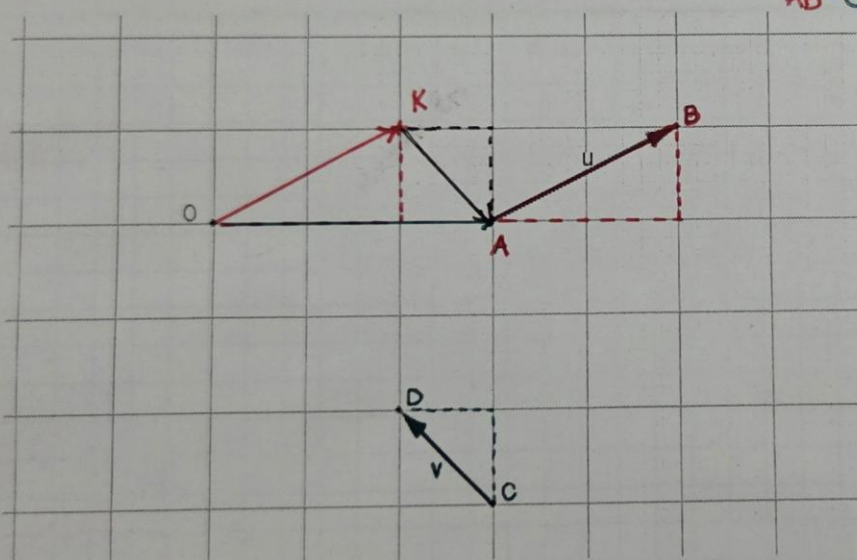
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Exercice 6 : $[AB]$ est un segment de longueur 6 cm. Construire un tel segment, puis placer les points M, N, P et Q sachant que :

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AP} = 2,5 \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AN} = -1,5 \overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

Exercice 7 : Construire le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$



On construit le point K tel que :

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AB}$$

et le point L tel que :

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{DC}$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL}$$

Remarque : Ici $L = A$

Propriétés utiles en calcul vectoriel

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' , on a :

$$- k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$- (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$- k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

2) Dans un repère $(O; I; J)$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors, pour tout réel k , $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

On retiendra que multiplier par k un vecteur $\vec{u}$ revient à multiplier par k chacune des coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Remarque : noter l'analogie avec les règles de calcul sur les nombres réels que vous connaissez déjà pour le 1).

15 cm

4 cm

9 cm

6 cm

3 cm

B

M

A

Q

P

N



Propriété

Soient A et B deux points du plan.

♥ Dire que le point I est le milieu du segment $[AB]$ équivaut à : $\vec{AI} = \vec{IB}$ ou encore $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ ♥

Exercice 8

A l'aide de la propriété précédente, démontrer après les avoir rappelées, les relations qui donnent les coordonnées du milieu d'un segment en fonction des coordonnées de ses extrémités.

$$A(x_A; y_A) \quad B(x_B; y_B)$$

Si K est le milieu de $[AB]$, alors $K(x_K; y_K)$ avec :

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Prouver : K est le milieu de $[AB]$ donc

$$\vec{AK} = \vec{KB}$$



$$\text{Or } \vec{AK} \begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \end{pmatrix} \quad \vec{KB} \begin{pmatrix} x_B - x_K \\ y_B - y_K \end{pmatrix}$$

Or deux vecteurs égaux ont les mêmes coordonnées.

Donc on a :

$$\begin{cases} x_K - x_A = x_B - x_K & (\text{même abscisse}) \\ y_K - y_A = y_B - y_K & (\text{même ordonnée}) \end{cases}$$

(inconnues : x_K et y_K : on les isole)

$$\begin{cases} x_K + x_K = x_A + x_B \\ y_K + y_K = y_A + y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_K = x_A + x_B \\ 2y_K = y_A + y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow K \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Exercice 9

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points $A(2; -1)$; $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$.

En raisonnant sur les coordonnées des vecteurs, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$\vec{AM} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ ^{égalité vectorielle} En déduire $\|\vec{AB} + 2\vec{AC}\|$.

Soit $M(x; y)$
 $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) = y+1 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-2=1 \\ 4-(-1)=5 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} -5-2=-7 \\ 2-(-1)=3 \end{pmatrix}$

donc $2\vec{AC} \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix}$

donc $\vec{AB} + 2\vec{AC} \begin{pmatrix} 1+(-14)=-13 \\ 5+6=11 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} + 2\vec{AC} \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \end{pmatrix}$

La relation : $\vec{AM} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ se traduit en passant aux coordonnées par les équations :

$\begin{cases} x-2 = -13 & (\text{même abscisse}) \\ y+1 = 11 & (\text{même ordonnée}) \end{cases}$ Donc $\begin{cases} x = -13 + 2 = -11 \\ y = 11 - 1 = 10 \end{cases}$

$M(-11; 10)$

$\|\vec{AB} + 2\vec{AC}\| = \sqrt{(-13)^2 + 11^2} = \sqrt{169 + 121}$

$\|\vec{AB} + 2\vec{AC}\| = \sqrt{290} \approx 17$

Exercice 10

A, B et C sont trois points donnés du plan. On se propose de construire le point D tel que :
 $2\vec{DA} + 3\vec{DB} = \vec{DC}$.

a) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\vec{AD}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b) Construire alors rigoureusement le point D.

$2\vec{DA} + 3\vec{DB} = \vec{DC}$

$2\vec{DA} + 3(\vec{DA} + \vec{AB}) = \vec{DA} + \vec{AC}$

$2\vec{DA} + 3\vec{DA} + 3\vec{AB} = \vec{DA} + \vec{AC}$

$5\vec{DA} + 3\vec{AB} = \vec{DA} + \vec{AC}$

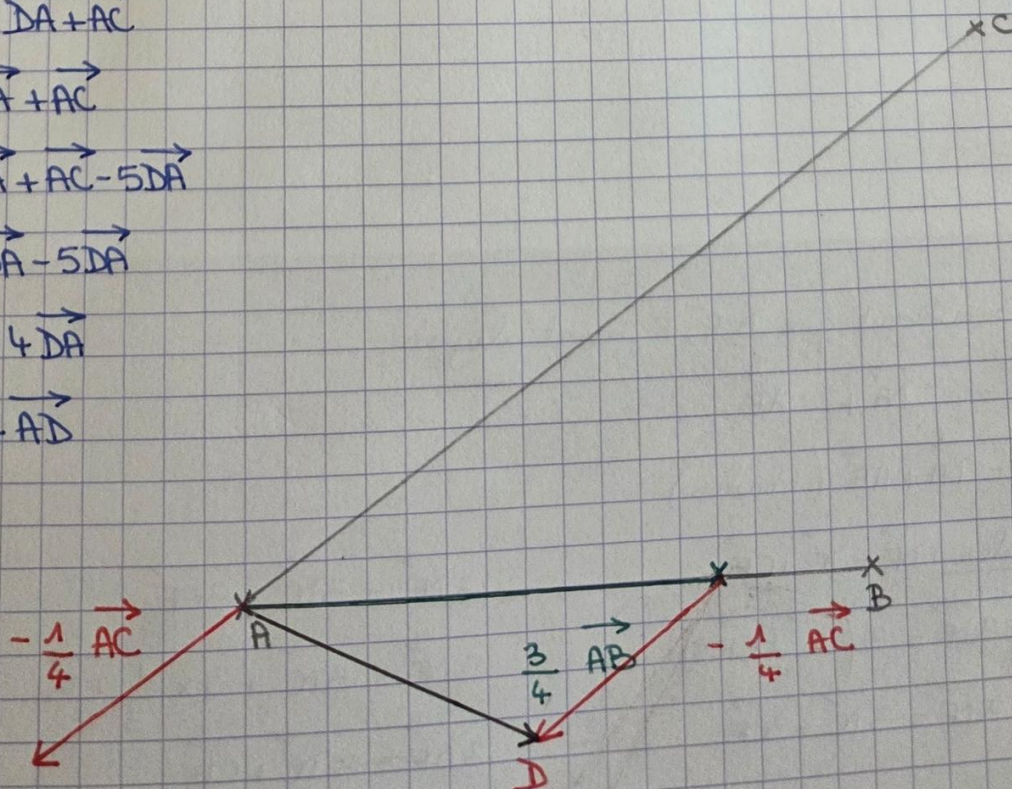
$3\vec{AB} = \vec{DA} + \vec{AC} - 5\vec{DA}$

$3\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DA} - 5\vec{DA}$

$3\vec{AB} - \vec{AC} = -4\vec{DA}$

$3\vec{AB} - \vec{AC} = 4\vec{AD}$

Enfin : $\vec{AD} = \frac{1}{4} (3\vec{AB} - \vec{AC}) = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$



VI - Géométrie et vecteurs

Propriété clé (sert à montrer un alignement de points)

♥♥ Trois points A, B et C deux à deux distincts sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ♥♥

Preuve : évidente, résulte de la notion même de vecteurs colinéaires.

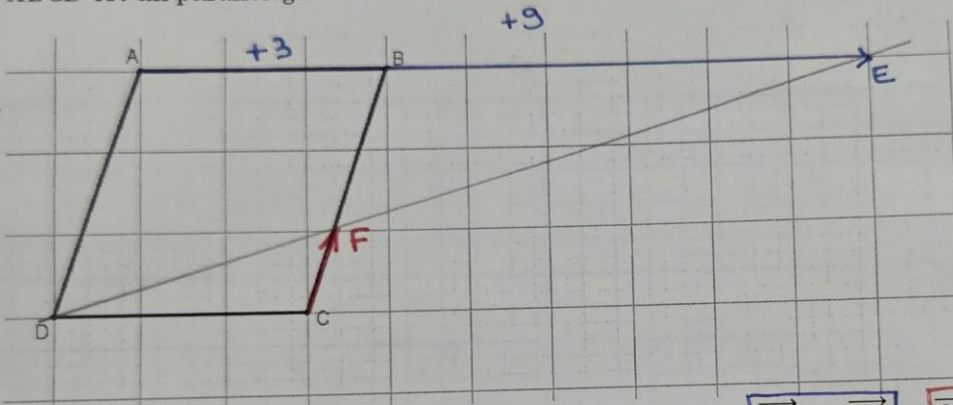
Prenez le temps de comprendre que, les origines et extrémités de deux vecteurs colinéaires qui ont une origine ou extrémité commune, forment trois points alignés.
Cela est utile en exercice.

B, R, U alignés équivaut à : $\vec{BR}$ et $\vec{BU}$ sont colinéaires

13

Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme.



i) Construire rigoureusement les points E et F sachant que : $\vec{AE} = 3\vec{AB}$ et $\vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{CB}$.

ii) Quelle conjecture émettez-vous concernant les points D, E et F ?

iii) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\vec{DE}$ en fonction des vecteurs $\vec{DA}$ et $\vec{AB}$.

iv) Démontrer que $3\vec{DF} = 3\vec{DC} + 3\vec{CF}$, puis en déduire que $3\vec{DF} = \vec{DE}$.

v) Qu'en déduit-on concernant les points D, E et F .

ii) Il semblerait que D, E, F soient alignés.

iii) $\vec{DE} = \dots \vec{DA} + \dots \vec{AB}$

$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AB}$ (Chasles)

iv) Chasles : $\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{CF}$

Donc $3\vec{DF} = 3(\vec{DC} + \vec{CF})$

$3\vec{DF} = 3\vec{DC} + 3\vec{CF}$

$3\vec{DF} = 3\vec{DC} + 3\vec{CF}$

$3\vec{DF} = 3\vec{DC} + 3 \times \frac{1}{3} \vec{CB}$

$3\vec{DF} = 3\vec{DC} + \vec{CB}$

$3\vec{DF} = 3\vec{AB} + \vec{CB}$

$3\vec{DF} = 3\vec{AB} + \vec{DA}$

$$3\vec{DF} = \vec{AE} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AE} = \vec{DE}$$

$$v) \vec{DE} = 3\vec{DF} \text{ d'après iv)}$$

Donc $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires

De plus, ces vecteurs ont l'origine D en commun.

Donc D, E et F sont alignés.

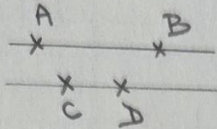
Propriété (sert à montrer le parallélisme de deux droites).

A, B, C et D sont quatre points distincts.

♥♥ (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si... $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires... ♥♥

Illustration et justification :

définition de
vecteurs
colinéaires

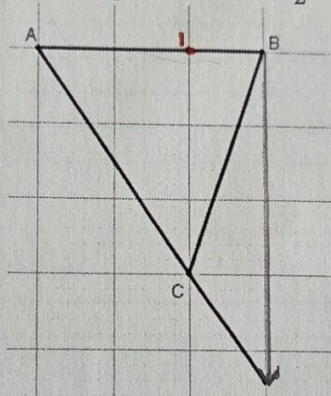


Exercice 12

ABC est un triangle, I et J sont les points tels que : $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{3}{2}\vec{AC}$

La figure ci-contre résume la situation :

- 1) Exprimer $\vec{BJ}$ en fonction de $\vec{BA}$ et $\vec{AC}$.
- 2) Etablir que $\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \vec{AC}$.
- 3) En déduire que (IC) et (BJ) sont parallèles.



1) But: $\vec{BJ} = x\vec{BA} + y\vec{AC}$
↑
inconnu

$$\vec{BJ} = \vec{BA} + \vec{AJ}$$

$$\vec{BJ} = \vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC}$$

2) $\vec{IC} = \vec{IA} + \vec{AC}$ (Chasles)

$$\vec{IC} = -\vec{AI} + \vec{AC}$$

$$\vec{IC} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \vec{AC}$$

3) $\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{BJ}$

Donc $\vec{IC}$ et $\vec{BJ}$ sont colinéaires.

Donc (IC) et (BJ) sont parallèles.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de l'ensemble des vecteurs du plan s'ils ne sont pas colinéaires.

On notera $(\vec{u} ; \vec{v})$ une telle base.

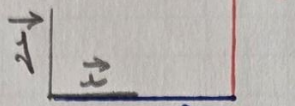
Base = couple de vecteurs non colinéaires.

Remarque : On a coutume, dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, de noter : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
On parlera de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ au lieu de dire dans le repère $(O ; I ; J)$.

Grâce à des propriétés vues en amont, on a : si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base des vecteurs du plan, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit, de façon unique, sous la forme : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: les réels x et y sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Exemples

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base du plan.



Si $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, alors, dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$, on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Si $\vec{v} = 5,2\vec{i} - 2\vec{j}$, alors, dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$, on a : $\vec{v} \begin{pmatrix} 5,2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Si $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors on a : $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

Exercice 13

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

