

Chapitre 6

Partie I : Statistiques descriptives

Lorsqu'on a un relevé de valeurs, on dit qu'on dispose d'une série statistique.

Par exemple, on relève les notes des 18000 élèves ayant passé l'épreuve anticipée de français du baccalauréat en 2025 dans l'académie d'Aix-Marseille. Cette donnée brute n'est, à elle seule, pas du tout lisible et encore moins interprétable.

Les statistiques descriptives vont permettre, à l'aide d'indicateurs que l'on va définir, de fournir des éléments qui rendent intelligibles ces valeurs.

Vocabulaire : Une population est un ensemble dont les éléments sont appelés les INDIVIDUS.....
Le nombre total d'individus d'une population donnée est appelé EFFECTIF de cette population.

Contrairement à ce que pourrait laisser penser la définition, une population n'est pas nécessairement formée d'entités vivantes !

Exemple : Les élèves de seconde du lycée Benoît forment une population d'effectif 315.

L'élève B.G de seconde 1 est un individu de cette population.

Les 15 stylos de ma trousse forment une population d'effectif égal à 15

Résumé : Cadre général : Série statistique

Valeurs (x_i)	x_1	x_2	x_3	...	x_p
Effectifs (n_i)	n_1	n_2	n_3	...	n_p

L'effectif total est : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

Exemple 1

Des élèves ont obtenu les notes suivantes : on dispose de six séries statistiques.

Pour chacune d'entre-elles, calculer la moyenne :

Elève A : 8 - 7 - 10 - 14 - 12 - 9 $m_A = \frac{8+7+10+14+12+9}{6} = \frac{60}{6} = 10$

Elève B : 9 - 9,5 - 10 - 10,5 - 10,5 - 10,5 $m_B = \frac{9+9,5+10+10,5+10,5+10,5}{6} = \frac{60}{6} = 10$

Elève C : 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 $m_C = 10$

Elève D : 0 - 0 - 0 - 20 - 20 - 20 $m_D = 10$

Elève E : 5 - 9 - 15 - 4 - 11 - 16 $m_E = \frac{5+9+15+4+11+16}{6} = \frac{60}{6} = 10$

Elève F : 10 $m_F = 10$

Qu'en déduisez-vous concernant la moyenne d'une série statistique ? *Ici les six élèves ont la même moyenne.*

Nous allons introduire un indicateur chiffré qui va permettre de se faire une bonne idée de la dispersion des valeurs prises par la série statistique autour de sa valeur moyenne.

Exercice 0:

Soit $\bar{x}$ la moyenne de l'élève G: $\bar{x} = \frac{7 \times 2 + 10 \times 2 + 4 + 2 + 14 \times 5}{2 + 2 + 1 + 1 + 5} = \frac{110}{11} = 10$

Notes	7	10	4	2	14
Ecart à la moyenne $(x_i - \bar{x})^2$	*	**	***		
	9	0	36	64	16
Effectif	2	2	1	1	5

$$* = (7 - 10)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$** = (10 - 10)^2 = (0)^2 = 0$$

$$*** = (4 - 10)^2 = (-6)^2 = 36$$

$$\text{Donc: } V = \frac{9 \times 2 + 0 \times 2 + 36 + 64 + 16 \times 5}{2 + 2 + 1 + 1 + 5} = \frac{138}{11}$$

$$V = 18$$

Fin: $G = \sqrt{V} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$$G = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$G \simeq 4,24$$

Calculer une moyenne etc. peut se faire beaucoup plus rapidement à l'aide d'une machine ou d'un ordinateur, à l'aide de ce qu'on appelle un algorithme.

Propriété: La variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne :

$$V = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{Formule de Koeruille}$$

Démonstration : $V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$ ← def. de la variance

(IR2) $V = \frac{n_1(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + n_2(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + n_p(x_p^2 - 2x_p\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$

* $V = \frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2}{N} - 2\bar{x} \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N} + \bar{x}^2 \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_p}{N}$

$V = \frac{\overline{x^2}}{N} - 2\bar{x} \times \frac{\bar{x}}{N} + \bar{x}^2$

$V = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

Exercice 1 Le tableau suivant donne les tailles de 34 élèves d'une classe.

taille(cm)	151	152	155	160	165	170	172	176	180	186	188
effectif	1	2	3	4	5	4	6	3	3	2	1

Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

Suite démonstration :

* $V = \frac{n_1(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + n_2(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + n_p(x_p^2 - 2x_p\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$

$V = \frac{n_1x_1^2 - 2n_1x_1\bar{x} + n_1\bar{x}^2 + \dots + n_px_p^2 - 2n_px_p\bar{x} + n_p\bar{x}^2}{N}$

$V = \frac{(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p)^2}{N} - 2\bar{x}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p)$

Exercice 1:

Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série :

$\bar{x} = \frac{151 + 152 \times 2 + 155 \times 3 + 160 \times 4 + 165 \times 5 + 170 \times 4 + 172 \times 6 + 176 \times 3 + 180 \times 3 + 186 \times 2 + 188}{34}$

$\bar{x} = \frac{5725}{34}$

$\bar{x} \approx 168,3 \text{ cm}$

Variance :

Taille x_i	151	152	155	160	165	170	172	176	180	186	188
Carré taille x_i^2	22801	23104	24025	25600	27225	28900	29584	30976	32400	34596	35344
Effectif	1	2	3	4	5	4	6	3	3	2	1

$$\underbrace{x^2}_{\text{Moyenne des carrés}} = \frac{22 \cdot 801 + 23 \cdot 104 \times 2 + 24 \cdot 025 \times 3 + 25 \cdot 600 \times 4 + 27 \cdot 225 \times 5 + 28 \cdot 900 \times 4 + 29 \cdot 584 \times 6 + 30 \cdot 976 \times 3}{34}$$

$$x^2 = \frac{967.377}{34} \approx 28452,3$$

$$\text{Enfin : } G = \sqrt{V} \approx \sqrt{127,4}$$

$$G \approx 11,3 \text{ cm}$$

$$\text{Donc } V = x^2 - \bar{x}^2 \approx 28452,3^2 - 168,3^2$$

$$V \approx 127,41$$

Propriété: Propriétés de la moyenne.

— Si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ sont les moyennes des deux sous groupes d'effectifs respectifs n_1 et n_2 , alors la moyenne de l'ensemble est

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

— La moyenne de la série des valeurs $ax_i + b$ est $a\bar{x} + b$.

Exercice 2 Dans une classe de 35 élèves, la moyenne des 20 filles de la classe est de 13. La moyenne des garçons est de 11. Quelle est la moyenne de la classe ?

Exercice 3 Un relevé de température (très précis) a donné les valeurs, en degré Celsius :

37,2408 - 37,2407 - 37,2410 - 37,2414 - 37,2412 - 37,2409.

1. Calculer (sans calculatrice!) la moyenne de ces valeurs.
2. On convertit les degrés Celsius en degrés Kelvin en ajoutant 273,15 à la température en degrés Celsius. Calculer la moyenne, en degré Kelvin, des températures précédentes.

X

Exercice 2:

20 filles $\bar{x}_f = 13$

15 garçons : $\bar{x}_g = 11$

Soit $\bar{x}$ la moyenne de la classe:

$$\bar{x} = \frac{20 \times 13 + 15 \times 11}{35} = \frac{260 + 165}{35} = \frac{425}{35}$$

$$\bar{x} \approx 12,14$$

Exercice 3:

$$\frac{8+7+10+14+12+9}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$\bar{T} = 37,2410^\circ\text{C}$$

moyenne des deux derniers chiffres

$$2) T_K = T_C + 273,15 = 37,2410 + 273,15$$

$$\overline{T_K} = 310,391^\circ K$$

4

Indicateurs de position

On considère une série statistique d'effectif total N .

- La médiane M_e est une valeur qui partage la série ordonnée en deux séries de même effectif.

Si N est impair, $N = 2p + 1$, alors la médiane est la $(p + 1)^{ème}$ valeur de la série ordonnée.

Si N est pair, $N = 2p$, alors la médiane est la moyenne de la $p^{ème}$ et de la $(p + 1)^{ème}$ valeur.

- Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que 25 % des valeurs (un quart) de la série lui soient inférieures.

Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que 75 % des valeurs (les trois quarts) de la série lui soient inférieures.

- De même avec les déciles (D_1 avec 10 %, D_9 avec 90 %) et les centiles (C_1 avec 1 %; ...).

Définition: Caractéristiques de dispersion

- L'étendue d'une série est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur.
- L'écart inter-quartile est la différence entre le troisième et le premier quartile : $Q_3 - Q_1$.

Exercice Donner la médiane, l'étendue, les quartiles et l'écart inter-quartile des notes de l'élève G.

Notes (x_i)	7	10	4	2	14
coefficients (n_i)	2	2	1	1	5

Étape 1 : en ordonne par ordre croissant les valeurs

2 - 4 - 7 - 7 - 10 - 14 - 14 - 14 - 14 - 14

$N = \text{eff. total} (= 2 + 2 + 1 + 1 + 5) = 11$

$$\frac{N}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

Médiane = 10

$$\text{étendue} = N_{\max} - N_{\min} = 14 - 2 = 12$$

$$\frac{N}{4} = \frac{11}{4} = 2,75$$

Donc Q_1 est la 3^{ème} valeur de la série ordonnée

$$Q_1 = 7$$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 11}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$$

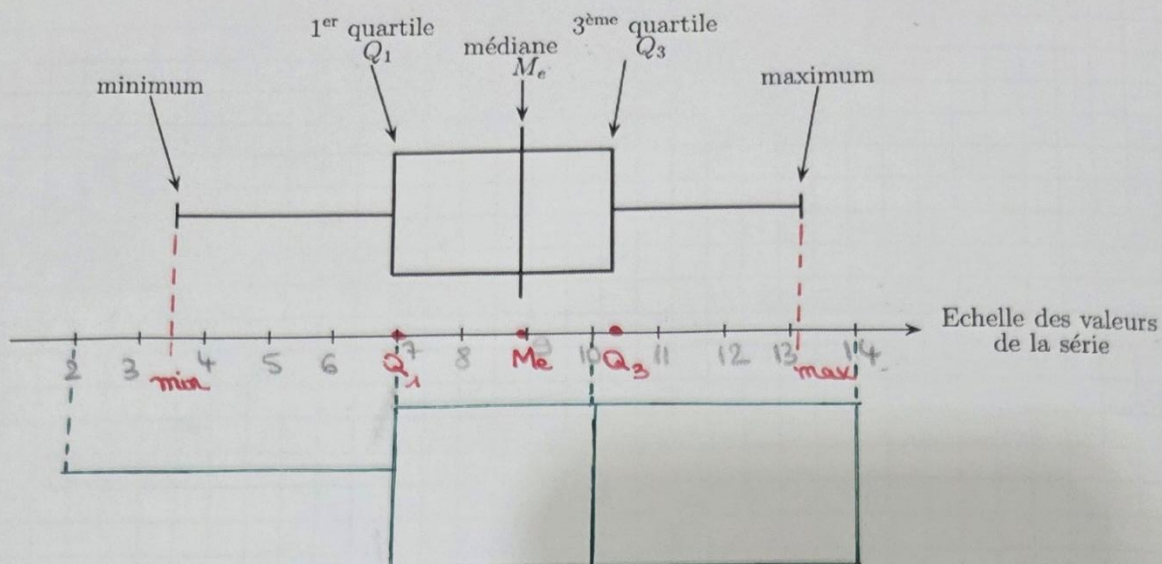
$$E_i = \text{écart interquartiles} = Q_3 - Q_1$$

$$E_i = 14 - 7 = 7$$

Donc Q_3 est la 7^{ème} valeur de la série ordonnée.

$$\text{Donc } Q_3 = 14$$

Diagrammes en boîte (boîtes à moustaches) On peut alors représenter les données de la série statistique par un diagramme en boîte, aussi connu sous le nom de "boîte à moustaches" :



Faire ci-dessus la boîte à moustache de l'élève G.

5

Exercice 4 Le tableau suivant donne les notes des élèves d'une classe.

Elèves	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Notes	15	10	12	8	10	18	12	8	8	15	10	8	6	18	12	8	12

On ordonne la série :

Notes x_i	6	8	10	12	15	18
Effectifs n_i	1	5	3	4	2	2
(ECC)	x	xx	xxx	xxxx		
Effectifs cumulés croissants	1	6	9	13	15	17

L'effectif total de la série : $N = 1 + 5 + 3 + 4 + 2 + 2 = 17$

La médiane de la série : $M_e = 10$ (grâce aux ECC)

Les 1^{er} et 3^{ème} quartiles sont : $Q_1 = 8$, $Q_3 = 12$

L'étendue de la série est : $18 - 6 = 12$

L'écart inter-quartile est : $Q_3 - Q_1 = 12 - 8 = 4$

Tracer le diagramme en boîte de cette série.

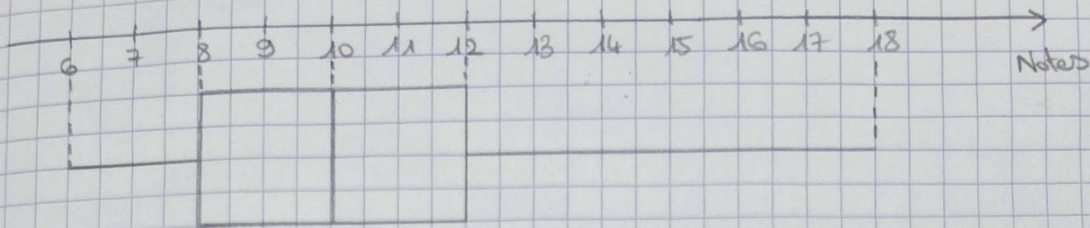
Exercice 5 On compare les températures moyennes (en °C) de chaque mois de l'année pour deux communes de Haute-Savoie situées à 1000 m d'altitude : Chamonix et La Clusaz.

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chamonix	1,5	4	7,5	12	15,5	20	23	22	19	14	6,5	2
La Clusaz	2,5	3,5	6	9,5	14	17	20,5	20,0	17	13	7	3,5

Déterminer pour ces deux communes la médiane et les quartiles des températures.

Tracer ensuite les diagrammes en boîte de ces deux séries en utilisant la même échelle, de manière à pouvoir les comparer.

Diagramme:



Exercice 5:

⚠ Ordonnez les températures par ordre croissant

Chamonix	1,5	2	4	6,5	7,5	12	14	15,5	19	20	22	23
La Clusaz	2,5	3,5	3,5	6	7	9,5	13	14	17	17	20	20,5

$$Me_{Ch} = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

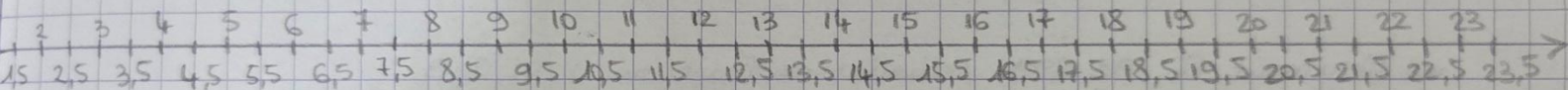
$$Q_{1Ch} = 4$$

$$Q_{3Ch} = 19$$

$$Me_{La} = \frac{9,5 + 13}{2} = \frac{22,5}{2} = 11,25$$

$$Q_{1La} = 3,5$$

$$Q_{3La} = 17$$



Partie II : Information chiffrée

Introduction : Les notions de pourcentage et de proportion sont omniprésentes dans la vie quotidienne.

Voici quelques exemples : les océans occupent les $\frac{2}{3}$ de la surface terrestre.

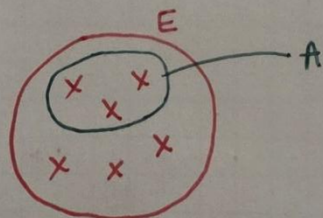
59 % des bacheliers ont eu une mention au baccalauréat en 2025.

I - Notion de proportion et de pourcentage

Définition

On appelle sous-population d'une population E toute partie A formée de certains d'individus de E : A est incluse dans E !

Illustration ensembliste :



A est contenue dans E
et on note : $A \subset E$

Exemple : Notons E la population formée par les élèves de seconde du lycée Benoît à la rentrée 2025, et A les élèves de seconde du lycée qui sont externes : A est une sous-population de E.

Les 4 stylos bleus de ma trousse constituent une sous-population des 15 stylos de ma trousse.

Exercice 6

Le tableau ci-dessous donne une estimation de la répartition de la population française au 01/01/2019, par sexe et groupe d'âge.

	Femmes	Hommes	Total
Moins de 20 ans	7897148	8260779	16158197
De 20 à 64 ans	19072541	18348624	37421165
65 ans et plus	7628209	5785128	13413337
Population totale	34598168	32394531	66992699

- a) Combien d'individus la population totale comprend-elle de personnes ?
- b) Comment se nomme le groupe d'individus formé par les jeunes de moins de 20 ans ? Quel est son effectif ?
- c) Quelle est la proportion du groupe formé par les jeunes de moins de 20 ans au sein de la population totale ?
- d) On s'intéresse maintenant au groupe formé par les personnes de 20 à 64 ans. Trouver la proportion de femmes au sein de ce groupe.

a) Il y avait 66 992 699 individus en France au 01/01/2019.

b) C'est une sous-population de la population française d'effectif 16 158 197.

c) Soit p la proportion de jeune de moins de 20 ans de la population française :

$$p = \frac{16\,158\,197}{66\,992\,699} \approx 0,24$$

$$p \approx 0,24 \text{ soit environ } \frac{1}{4} \left(0,24 = \frac{24}{100} = 24\% \right)$$

d) Soit p la proportion de femmes au sein du groupe de 20-64 ans.

$$p = \frac{19\,072\,541}{37\,421\,165}$$

$$p \approx 509$$

Définition 1

Soit E une population de référence (ensemble E) contenant N éléments, et A une sous-population de E d'effectif n .

La proportion (notée p) des éléments de A parmi ceux de E est égale au quotient..... : ♥ $p = \frac{n}{N}$ ♥

Remarque : une proportion p n'a pas d'unité et pour ce réel p on a toujours l'encadrement suivant :

$$0 \leq p \leq 1 \quad (\text{car } N \geq n)$$

Bien souvent, et afin de rendre l'information chiffrée plus parlante, on exprimera, *sous forme de pourcentage* une proportion : cela permet de se faire une meilleure idée de ce que représente cette proportion.

Rappel : Comme son nom l'indique, pourcent peut être décomposé en les termes : pour un nombre de 100 ou encore par tranche de 100, ou encore : ramené à un effectif de référence égal à 100, dans des proportions égales.

Par exemple : 30 % de mon budget sert à payer mon loyer signifie qu'à chaque tranche de 100€ perçue de mon salaire, je donne 30€ pour payer mon loyer.

Exercice 7

Dans une revue de 180 pages, il y a 52 pages de publicité.

Quel pourcentage les pages de publicité occupent-elles dans cette revue ?

Nb de pages de pub	52	p	C'est un tableau de proportionnalité Donc $p = \frac{52}{180} \times 100$ $p \approx 0,29 \times 100$ } la publicité occupe environ 29% de la revue
Nb total de pages de la revue	180	100	

7

Définition 2

Avec les mêmes notations que celles de la définition 1, la proportion p d'individus du groupe A parmi ceux de E peut être exprimée en pourcentage noté t .

On a donc : $p = \frac{n}{N} = \frac{t}{100}$, et donc : $t = p \times 100$

↳ taux

$$p = \frac{t}{100} \text{ donc } t = p \times 100$$

Exemples célèbres

La moitié d'une quantité correspond à **50** % de cette quantité.

Le quart, respectivement les trois quarts d'une quantité correspondent respectivement à **25** % de cette quantité (respectivement **75** % de cette quantité).

Rappel : Appliquer un pourcentage :

Exercice 8

Dans un lycée de 1250 élèves, 34 % des élèves sont externes. Quel est le nombre d'élèves externes de ce lycée ?

$$N = 1250 \times \frac{34}{100} = 425$$

Il y a 425 élèves externes dans ce lycée.

Règle 1

Pour calculer $x\%$ d'un nombre A donné, il suffit de faire le calcul : $A \times \frac{x}{100}$



II - Notion de proportion de proportion et de pourcentage de pourcentage

Exemple d'introduction

14600 véhicules ont franchi un péage autoroutier le 30 Août 2025.

85 % des véhicules étaient des voitures, et 60 % de ces voitures étaient munies d'un badge de télépaiement.

- Combien de voitures se sont présentées à ce péage en ce jour ?
- Calculer le nombre de voitures munies d'un badge de télépéage.
- En déduire la proportion, exprimée en pourcentage, de voitures munies d'un badge de télépéage par rapport à l'ensemble des véhicules.
- Calculer $14600 \times \frac{85}{100} \times \frac{60}{100}$. En déduire une autre manière de calculer la proportion demandée à la question c).
- 70 % des véhicules qui ne sont pas des voitures étaient munis d'un badge de télépéage.

Déterminer le pourcentage que représentent ces véhicules (qui ne sont pas des voitures) munis d'un badge par rapport à la population totale étudiée.

✂-----

$$a) 14600 \times \frac{85}{100} = 12410$$

Il y a eu 12 410 voitures en circulation ce jour-là.

$$b) 12410 \times \frac{60}{100} = 7446 \text{ Il y a eu 7 446 voitures avec badge ce jour-là.}$$

$$c) p = \frac{7446}{14600} \times 100 = 51 \quad \text{Les voitures avec badge constituent 51\% des véhicules en circulation.}$$

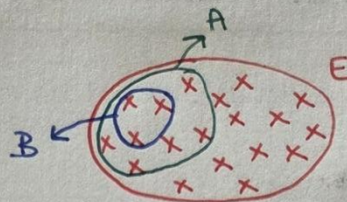
$$d) 14600 \times \frac{85}{100} \times \frac{60}{100} = 7446$$

Pour répondre à la question c), il suffit de faire le calcul : $\frac{85}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{5100}{10000} = 0,51 = 51\%$

$$e) \text{ Il y a : } 100\% - 85\% = 15\% \text{ de véhicules qui ne sont pas des voitures.}$$

$$\text{Donc : } \frac{70}{100} \times \frac{15}{100} = \frac{1050}{10000} = 0,105 = 10,5\%$$

Les véhicules (autres que les voitures) avec badge représentent 10,5% de l'ensemble des véhicules en circulation.



Propriété

On considère un ensemble E ayant N éléments. Soit A une partie de E, et B une partie de A.

On note p_A la proportion des éléments de A dans E, et p_B la proportion des éléments de B dans A.

Alors, la proportion des éléments de B dans E est égale à $p_A \times p_B$.

Exemple

60 % des élèves d'un lycée sont des filles. Parmi ces filles, 34 % sont externes.

Déterminer quel pourcentage représente le groupe des filles externe dans ce lycée.

Sachant qu'il y a 1500 élèves au lycée, déterminer le nombre de filles externe de ce lycée.

$$p = \frac{60}{100} \times \frac{34}{100} = \frac{2040}{10000} = 0,204 = 20,4\%$$

Les filles externes du lycée forment 20,4% de l'effectif total.

Soit n le nombre de filles externes:

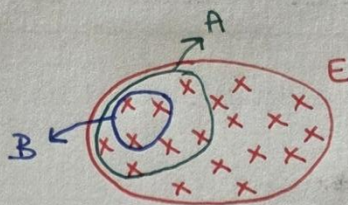
$$n = 1500 \times \frac{20,4}{100} = 15 \times 20,4 = 306$$

Exercice 9

Calculer mentalement : a) 20 % de 80 % b) 90 % de 12 %.

$$a) \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{16}{100}$$

$$b) \frac{90}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{108}{1000} = 0,108 = 10,8\%$$



Propriété

On considère un ensemble E ayant N éléments. Soit A une partie de E, et B une partie de A.

On note p_A la proportion des éléments de A dans E, et p_B la proportion des éléments de B dans A.

Alors, la proportion des éléments de B dans E est égale à $p_A \times p_B$.

Exemple

60 % des élèves d'un lycée sont des filles. Parmi ces filles, 34 % sont externes.

Déterminer quel pourcentage représente le groupe des filles externe dans ce lycée.

Sachant qu'il y a 1500 élèves au lycée, déterminer le nombre de filles externe de ce lycée.

$$p = \frac{60}{100} \times \frac{34}{100} = \frac{2040}{10000} = 0,204 = 20,4\%$$

Les filles externes du lycée forment 20,4% de l'effectif total.

Soit n le nombre de filles externes:

$$n = 1500 \times \frac{20,4}{100} = 15 \times 20,4 = 306$$

Exercice 9

Calculer mentalement : a) 20 % de 80 % b) 90 % de 12 %.

$$a) \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{16}{100}$$

$$b) \frac{90}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{108}{1000} = 0,108 = 10,8\%$$

Remarques : Si $p > 0$, une variation de taux p correspond à une AUGMENTATION / HAUSSE.....

Si $p < 0$, une variation de taux p correspond à une DIMINUTION / BAISSÉ.....

L'intérêt des taux d'évolutions, contrairement aux variations absolues, est de permettre de comparer des évolutions dans des situations différentes.

Exercice 10

Le prix d'un article passe de 168€ au 01/01/2025 à 160€ au 01/06/2025.

Déterminer le pourcentage d'évolution de ce prix entre ces deux dates.

ici : $V_i = 168 \text{ €}$

$V_f = 160 \text{ €}$

Donc $p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$

$p = \frac{160 - 168}{168} \times 100 = \frac{-8}{168} \times 100$

$p \approx -4,8 \%$

Il y a eu environ 4,8% de baisse.

Exercice 11

Le tableau ci-dessous donne les espérances de vie à la naissance pour des individus nés en France en l'an 2000 et en l'an 2015.

Année de naissance	Hommes	Femmes
2000	75,3	82,8
2015	79	85,1

Comparer les taux d'évolution de l'espérance de vie des hommes et celui des femmes entre ces années.

Pour le groupe des hommes :

$V_i = 75,3$ donc $p_H = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{79 - 75,3}{75,3} \times 100$

$V_f = 79$ $p_H = \frac{3,7}{75,3} \times 100$

$p_H \approx 4,9$

Entre ces dates, l'espérance de vie des hommes a augmenté d'environ 4,9%.

Pour le groupe des femmes :

$V_i = 82,8$ donc $p_F = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$

$V_f = 85,1$ $p_F = \frac{85,1 - 82,8}{82,8} \times 100 = \frac{2,3}{82,8} \times 100$

$p_F \approx 2,8$

L'espérance de vie des femmes a augmenté d'environ 2,8% entre ces dates.

Donc comme $4,9 > 2,8$, $p_H > p_F$: c'est le groupe des hommes dans lequel l'espérance de vie augmente le plus en %.

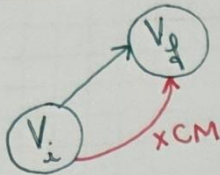
IV - Coefficient multiplicateur lié à une évolution

Définition

Le nombre par lequel il faut multiplier une valeur initiale V_i pour obtenir sa valeur finale V_f est appelé coefficient multiplicateur et noté CM .

On a donc : $V_i \times CM = V_f$ ou encore : $CM = \frac{V_f}{V_i}$

Schéma fondamental :

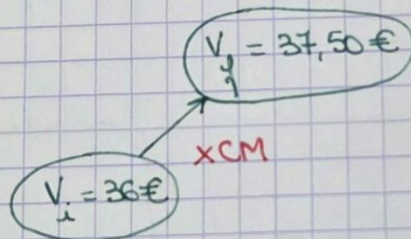


10

Exercice 12

Le prix d'un article passe de 36 € à 37,50 €. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette évolution de prix.

Déterminer le pourcentage p d'évolution de ce prix. Conclusion ?



$$V_i \times CM = V_f$$

$$CM = \frac{V_f}{V_i} = \frac{37,50}{36}$$

$$CM \approx 1,0417$$

$$p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \frac{37,50 - 36}{36} \times 100 = \frac{1,5}{36} \times 100$$

$$p = 4,17$$

Conclusion :

$$CM - 1 \approx 0,0417 \approx 4,17\%$$

$$CM \approx 1 + \text{pourcentage d'évolution}$$

Propriété %

Soit t le taux d'évolution d'une valeur V_i à une valeur V_f , et CM le coefficient multiplicateur qui permet de passer de V_i à V_f .

On a la relation suivante : ♥♥♥ $CM = 1 + p$ ou $p = CM - 1$ ♥♥♥

Preuve : $\frac{p}{100} = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = CM - 1 + p\%$

Ainsi les notions de taux d'évolution et coefficients multiplicateur sont étroitement liées !

Exercice 13

Un pantalon a un prix de 95€, et une chemise un prix de 70€.

Le prix du pantalon augmente de 7 %, et celui de la chemise diminue de 6 %.

- 1) Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces variations.
- 2) Calculer le prix du pantalon et celui de la chemise après ces changements de prix.

1) Ici $p = \frac{7}{100} = 0,07$

Donc $CM = 1 + p = 1 + 0,07 = 1,07$

Ici: $p = \frac{-6}{100} = -0,06$ car diminution

Donc $CM = 1 + p = 1 - 0,06 = 0,94$

2) Pantalon: $V_i \times CM = 95 \times 1,07 = 101,65 \text{ €}$

Chemise: $V_i \times CM = 70 \times 0,94 = 65,80 \text{ €}$

Réflexe: Pour une augmentation, on a : ♥ $CM > 1$ ♥. Pour une diminution, on a : ♥ $CM < 1$ ♥

♥♥♥♥ Règle fondamentale ♥♥♥♥

- 1) Augmenter de a % une grandeur Q , revient à multiplier Q par : $CM = 1 + a$ (exprimé en %.)
- 2) Diminuer de b % une grandeur Q , revient à multiplier Q par : $CM = 1 - b$ (exprimé en %.)

Exemples mentaux :

Augmenter de 10 % un prix revient à le multiplier par 1,10 ($1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$)

Diminuer de 30 % un prix revient à le multiplier par 0,70 ($CM = 1 - \frac{30}{100} = 1 - 0,3 = 0,7$)

Multiplier un prix par 1,32 revient à l'augmenter de 32 %

Multiplier un prix par 0,79 revient à le diminuer de 21 % ($CM = 0,79 = 1 - b$)

Multiplier par 2 un prix revient à l'augmenter de 100 %

↓
 $CM = 2 = 1 + p$
 $p = 1 = 100\%$

(reprenant toutes les notions du cours)

Exercice 14

Compléter le tableau suivant en écrivant le calcul que vous avez fait à chaque fois.

	Prix initial	Prix final	Pourcentage de variation	Coefficient multiplicateur
①	110 €	90,20 €	-18 %	0,82
②	36,66 €	47 €	+28,2 %	1,282
③	850 €	1627,75 €	+91,5 %	1,915 (21)
④	183,15 €	100 €	-45,4 %	0,546
⑤	20 €	23 €	+15 %	1,15
⑥	120 €	105 €	-12,5 %	0,875

$$\rightarrow CM = \frac{V_f}{V_i} = \frac{23}{20} = 1,15$$

① $V_i = 110 \text{ €}$
 $\xrightarrow{-18\%}$
 $V_f = 90,20 \text{ €}$
 $xCM = 0,82$

$$V_i \times CM = V_f$$

$$110 \times 0,82 = V_f$$

$$V_f = 90,20 \text{ €}$$

② $\frac{28,2}{100} = 0,282 (+1)$

$V_i \xrightarrow{+28,2\%} V_f = 47 \text{ €}$
 $xCM = 1,282$

$$V_i \times CM = V_f$$

$$V_i = \frac{V_f}{CM} = \frac{47}{1,282}$$

$$V_i \approx 36,66$$

③ $V_i = 850 \text{ €} \xrightarrow{+91,5\%} V_f = 1627,75 \text{ €}$
 $xCM = 1,915$

$$V_f = 850 \times 1,915$$

$$V_f = 1627,75 \text{ €}$$

④ $CM = 1 + p\%$
 $0,546 = 1 + p\%$
 $p\% = 0,546 - 1 = -0,454 = -\frac{45,4}{100}$

$V_i \xrightarrow{xCM = 0,546} V_f = 100 \text{ €}$

$$V_i \times 0,546 = 100$$

$$V_i = \frac{100}{0,546} \approx 183,15 \text{ €}$$

$$*) \frac{23}{20} = \frac{20+3}{20} = \frac{20}{20} + \frac{3}{20} = 1 + \frac{15}{100} = 1,15$$

$$⑥) CM = \frac{V_f}{V_i} = \frac{105}{120} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Exercice 15

En France, le taux de la TVA (taxe de valeur ajoutée) est un impôt dont le taux est égal à 20 %.

Ce dernier s'applique sur le prix hors taxe (HT) à la majorité des articles achetés, et on obtient le prix final de l'article appelé prix TTC (toutes taxes comprises), c'est-à-dire ce que vous payez lors de l'achat d'un article !

a) Le prix hors taxe d'un véhicule est 19500€. Déterminer le prix TTC de ce véhicule.

b) Le prix d'un voyage est de 2300€ TTC. Déterminer le prix hors taxe de ce voyage.

a)

$$V_i = P_{HT} = 19\,500\text{€}$$

+ 20%

$$CM = 1,20 \rightarrow V_f = \text{Prix T.T.C.}$$

$$CM = 1 + p\%$$

$$V_i \times CM = V_f$$

$$19\,500 \times 1,20 = V_f$$

$$V_f = 23\,400\text{€} : \text{Prix T.T.C.}$$

b)

$$V_f = 2\,300\text{€} : \text{Prix T.T.C.}$$

+ 20%

$$CM = 1,20$$

$$V_i \times 1,2 = V_f$$

$$V_i = \frac{2\,300}{1,2}$$

$$V_i \approx 1\,916,67\text{€}$$

$$\text{Prix H.T.} \approx 1\,916,67\text{€}$$

V- Evolutions successives

Exemple

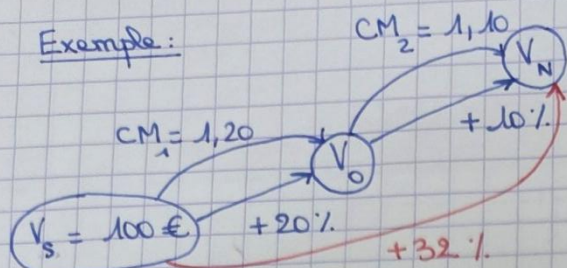
Un article coûtait 100€ au mois de Septembre. Son prix augmente une première fois de 20 % au mois d'Octobre.

Le mois suivant, le prix de cet article augmente encore de 10 %.

Déterminer le prix de l'article au mois de Novembre, ainsi que le pourcentage d'évolution de ce prix entre Septembre et Novembre. Le résultat vous surprend-il ?

Déterminer une relation entre les nombres C_1 , C_2 et C_3 qui désignent respectivement le coefficient multiplicateur du prix de Septembre à Octobre, celui d'Octobre à Novembre et enfin celui de Septembre à Novembre.

Exemple :



$$P = \frac{V_N - V_s}{V_s} \times 100 = \frac{132 - 100}{100} \times 100 = 32$$

Le prix a augmenté de 32 % entre Septembre et Novembre.

$$V_o = 100 \times 1,20 = 120 \text{ €}$$

$$V_N = 120 \times 1,10 = 132 \text{ €}$$

Le prix augmente de 32 % et non pas de 30 % (10 % + 20 %) !!!

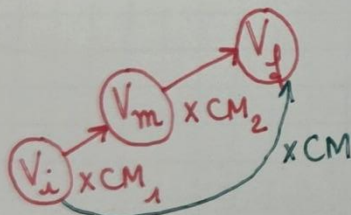
$$CM_3 = CM_1 \times CM_2 = 1,20 \times 1,10 = 1,32$$

12

Propriété

♥♥ Pour deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs CM_1 et CM_2 , l'évolution globale a pour coefficient multiplicateur global le nombre CM , avec : $CM = CM_1 \times CM_2$ ♥♥

Illustration et justification :



$$CM = CM_1 \times CM_2$$

Exemple

Auguste est ravi : il a bénéficié de deux réductions successives pour l'achat d'un ordinateur : 30 % de solde d'été, et 10 % supplémentaire obtenus en caisse grâce à sa carte de fidélité.

remise

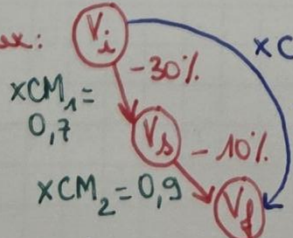
Auguste affirme avoir bénéficié d'une réduction de 40 % : qu'en pensez-vous ?

$$CM = 1 + p\%$$

$$0,63 = 1 + p\%$$

$$p\% = 0,63 - 1 = -0,37 = -37\%$$

Auguste dit faux :



$$xCM = CM_1 \times CM_2 = 0,7 \times 0,9 = 0,63$$

Donc Auguste a bénéficié de 37 % de réduction et pas 40 %.

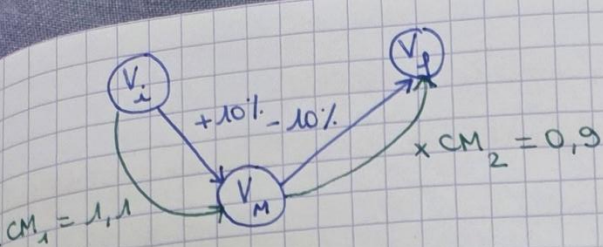
☞ On n'additionne pas les taux d'évolutions. Par-contre, on multiplie les coefficients multiplicateurs pour connaître le coefficient multiplicateur global associé à cette suite d'évolutions.

Exercice 16

Le prix d'un article augmente de 10 % puis diminue de 10 %.

Son prix final est-il égal à son prix initial ? Justifier.

✕



$$xCM = CM_1 \times CM_2 = 1.1 \times 0.9 = 0.99 < 1$$

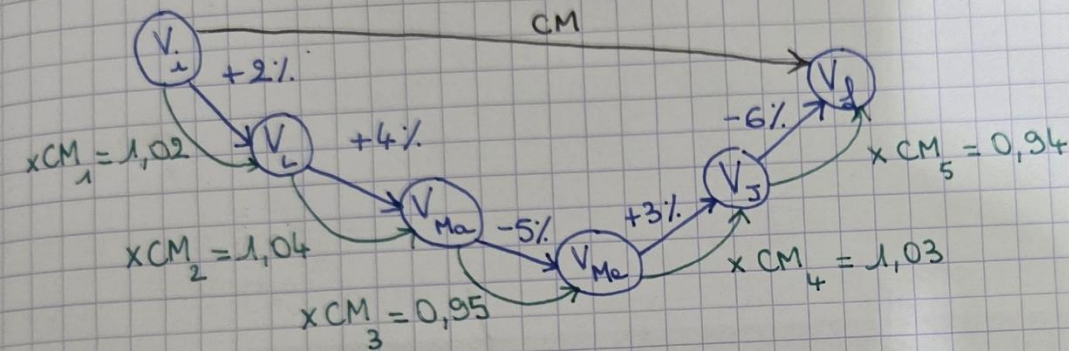
Donc globalement il y a une baisse de 1% de prix.

Exercice 17

La valeur en € d'une action subit les variations suivantes en une semaine :

Lundi : $+2\%$; Mardi : $+4\%$; Mercredi : -5% ; JEUDI $+3\%$; Vendredi : -6% .

Déterminer si au cours de cette semaine l'action s'est appréciée (= a gagné de la valeur) ou si elle s'est dépréciée (= a perdu de sa valeur).



$$CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times CM_4 \times CM_5 = 1.02 \times 1.04 \times 0.95 \times 1.03 \times 0.94$$

$$CM \approx 0.975 < 1$$

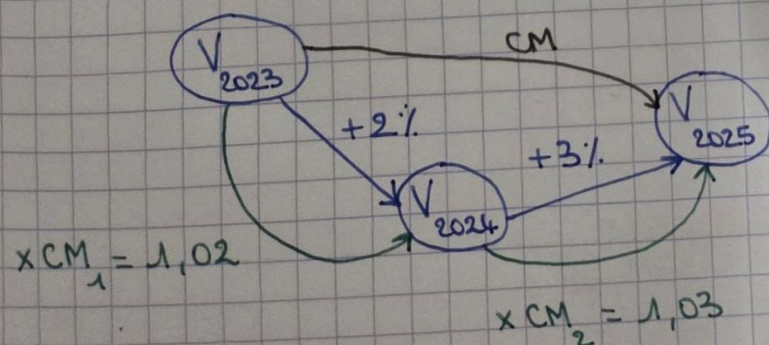
L'action s'est dépréciée d'environ 2.5% (= baisse)

Exercice 18

Dans une entreprise A, les salaires ont augmenté de 2 % entre 2023 et 2024 puis de 3 % entre 2024 et 2025.

Dans une entreprise B, les salaires ont augmenté de 4 % entre 2023 et 2024 puis de 1 % entre 2024 et 2025.

Dans quelle entreprise les salariés ont-ils été globalement plus augmentés entre 2023 et 2025 ?

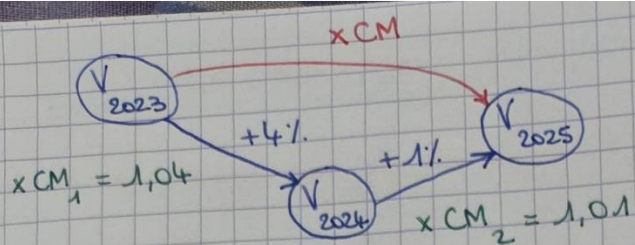


$$CM = CM_1 \times CM_2 = 1.02 \times 1.03$$

$$CM \approx 1.05 > 1$$

Donc dans l'entreprise A les salaires ont globalement augmenté de 5.06%.

$$p\% = 1.0506 - 1 = 5.06\%$$



$$xCM = 1,04 \times 1,01 = 1,0504$$

Donc dans l'entreprise B les salaires ont augmenté de 5,04%.

5,06 > 5,04 : c'est dans l'entreprise A que les salaires ont globalement le plus augmenté.

13

Exercice 19

Un livret Jeune a un taux d'intérêt de 3,5 %. Cela signifie que chaque année, la banque verse sur votre compte une somme d'argent, appelée intérêt, à hauteur de 3,5 % du solde que présente votre compte.

Vous décidez de placer 1000€ sur un livret Jeune et de ne plus y toucher.

Quel sera votre capital au bout de : 1 an ? 3 ans ? 5 ans ? 10 ans ?

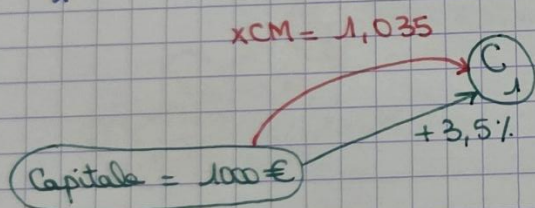
Trouver une relation qui donne le capital dont vous disposerez au bout de n années.

A l'aide d'une calculatrice, évaluer le nombre d'années nécessaires à une augmentation de 50 % du capital initial.

C_1 = Capital au bout d'un an

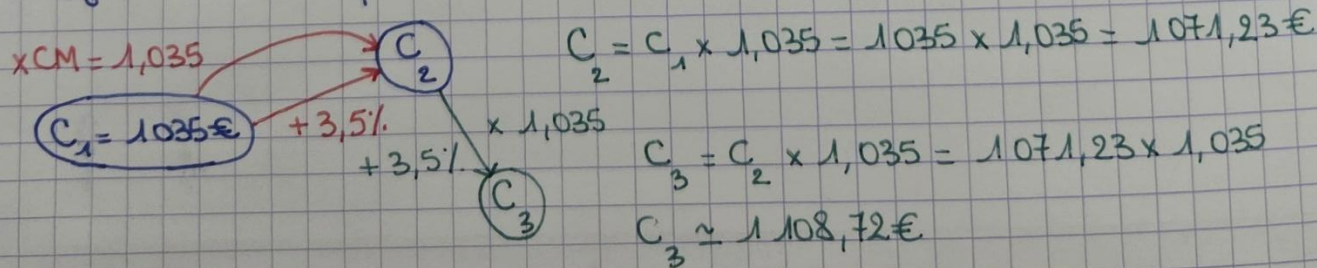
$$\text{Donc } C_1 = 1000 \times 1,035 = 1035 \text{ €}$$

On disposera de 1035 € au bout d'un an.



C_i = le capital dont je disposerai au bout de i années.

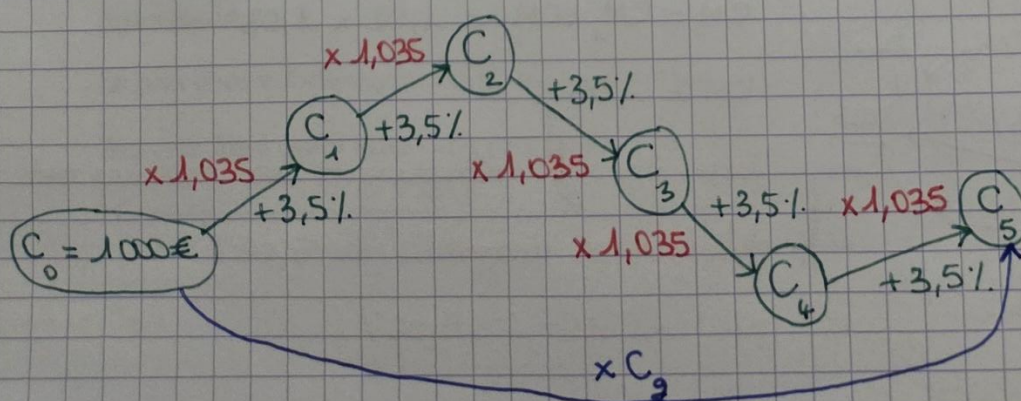
$C_0 = 1000 \text{ €}$ = capital initial



$$C_2 = C_1 \times 1,035 = 1035 \times 1,035 = 1071,23 \text{ €}$$

$$C_3 = C_2 \times 1,035 = 1071,23 \times 1,035$$

$$C_3 \approx 1108,72 \text{ €}$$



$$C_9 = 1,035 \times 1,035 \times 1,035 \times 1,035 \times 1,035$$

$$C_9 = 1,035^5$$

$$C_9 \approx 1,186$$

$$\text{Donc } C_5 = C_0 \times C_9 \approx 1000 \times 1,186 \approx 1186 \text{ €}$$

$$\text{De même : } C_{10} = C_0 \times 1,035^{10} = 1000 \times 1,035^{10} \approx 1410,60 \text{ €}$$

$$C_n = C_0 \times 1,035^n$$

$$C_n = 1000 \times 1,035^n$$

$$C_{20} \approx 1000 \times 1,035^{20} \approx 1990 \text{ €}$$

$$C_{50} \approx 5585 \text{ €}$$

$$C_{100} \approx 31191 \text{ €}$$

$$C_{200} \approx 972903 \text{ €}$$

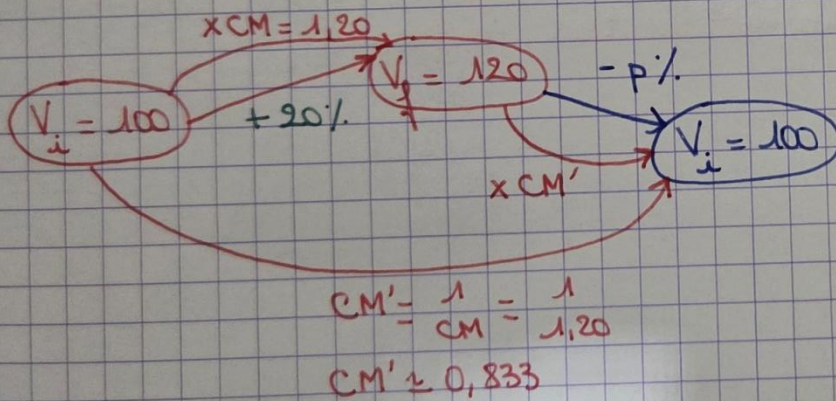
$$C_{500} \approx 3 \times 10^{10} \approx 30 \text{ Milliards}$$

$$C_{1000} \approx 8 \times 10^{17}$$

$$10^{17} = 10^{8+9} = 10^8 \times 10^9 = \text{Cent millions de milliards}$$

VI - Taux d'évolution réciproque

Exemple Le prix d'une paire de chaussures passe de 100€ à 120€.



Donc on doit diminuer d'environ 16,7%.

$$\begin{aligned} \text{(car } CM' &= 1 + p\% \\ 0,833 &= 1 + p\% \\ p\% &= 1 - 0,833 \approx -0,167 \approx 16,7\% \end{aligned}$$

Déterminer le taux de remise à effectuer pour ramener la paire de chaussure à son prix initial.

Définition

Soit une évolution de coefficient multiplicateur CM qui fait passer une valeur de V_i à V_f .

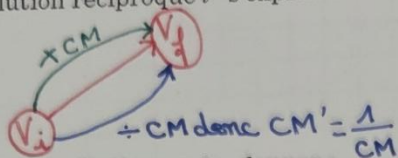
L'évolution réciproque est celle qui fait passer de la valeur V_f à la valeur V_i . On note CM' le coefficient multiplicateur de cette évolution réciproque.

On a : $CM' = \frac{1}{CM}$

Le taux d'évolution réciproque t' s'exprime en fonction de CM' : $t' = CM' - 1 = \frac{1}{CM} - 1$

Illustration

Exercice 20

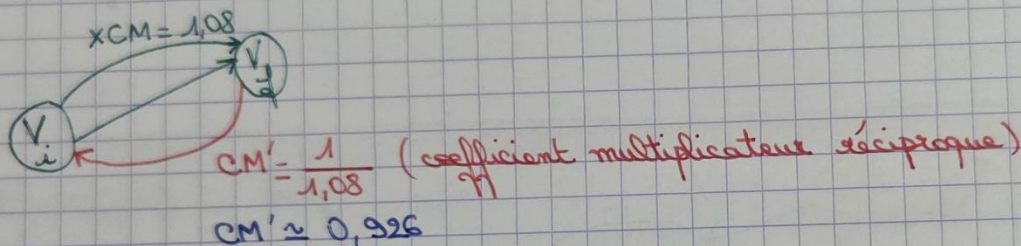


En arrondissant au dixième près, donner :

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 8 %, puis le taux d'évolution réciproque associé à cette hausse.

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 15 %.

① $CM = 1 + \frac{8}{100} = 1 + 0,08 = 1,08$

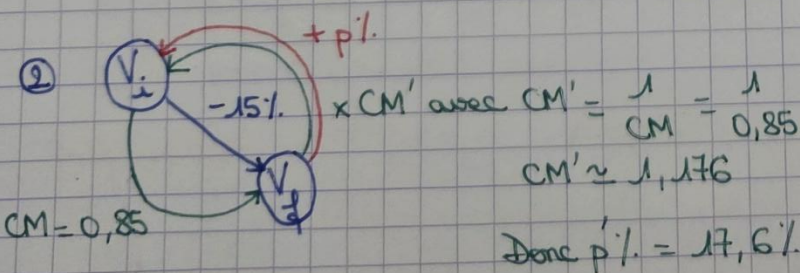


$CM' = 1 + p\%$

donc $0,926 \approx 1 + p\%$

$p\% \approx 0,926 - 1 \approx -0,074 \approx -7,4\%$

Une hausse de 8% est compensée par une baisse d'environ 7,4%.



Donc $p\% = 17,6\%$

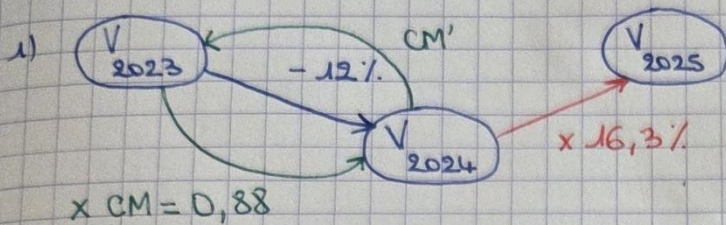
Une baisse de 15% est compensée par une hausse d'environ 17,6%.

Exercice 21 Chaque année, un webmestre fait le bilan concernant l'attractivité de son site web.

Entre 2023 et 2024, le nombre de connexions au site a diminué de 12 %.

1) Déterminer, à 0,1 % près, le pourcentage d'augmentation nécessaire entre 2024 et 2025 pour revenir au nombre de connexions initial.

2) Entre 2024 et 2025, le nombre de connexions a augmenté de 4,5 %, pour s'établir à 1463 connexions par jour. Combien y avait-il de connexions par jour à ce site début 2024 ?

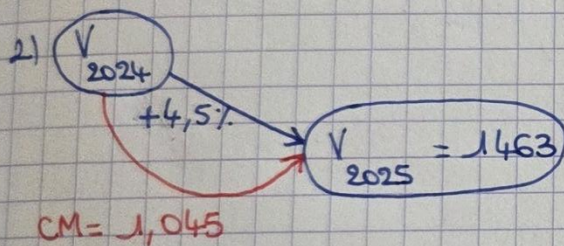


$$CM' = \frac{1}{CM} = \frac{1}{0,88}$$

$$CM' \approx 1,163$$

Donc p vaut 16,3 %

Il devra augmenter d'environ 16,3 % le nombre de connexion



$$V_{2024} \times CM = V_{2025}$$

$$V_{2024} = \frac{V_{2025}}{CM} = \frac{1463}{1,045} = 1400$$

Il y a eu 1400 connexions en 2024.