Chapitre 5 — *Fonctions, courbes représentatives, et résolutions graphiques*

I – Vocabulaire des fonctions

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction notée f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un unique réel appelé l'image de x par la fonction f, que l'on note $f(x)$. (lire f de x)

Notation : f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

Remarque : x est appelé la variable de la fonction.

Exemple : f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = x^2$.

Calculer $f(5)$; Quelle est l'image de $-\dfrac{3}{4}$ par f ?

$f(5) = 5^2 = 25$: l'image de 5 par f est égale à 25

$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Méthode : Pour déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction f, on remplace x par la valeur donnée (par l'énoncé) dans l'expression $f(x)$.

Définition 2

Soit f une fonction.
L'ensemble de tous les réels qui ont une image par f est appelé ***l'ensemble de définition*** de la fonction f, on dit encore domaine de définition de f. On le notera, en général, $\mathcal{D}_f$.

> $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner à x, pour lesquelles on a le droit d'effectuer le calcul de l'expression $f(x)$.

Une valeur x pour laquelle le calcul de l'expression de $f(x)$ n'est pas possible est appelée une VALEUR INTERDITE pour la fonction f.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
0 est une valeur interdite pour f, car on ne peut pas diviser par 0.
Pour toutes les autres valeurs du réel x, on peut calculer $\frac{1}{x}$, donc la fonction f est définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

On pourra retenir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ auquel on retire les éventuelles valeurs interdites de f.

On notera : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}$. (Lire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites).

*Remarque*** : En classe de seconde, les valeurs interdites, et donc les éventuels trous dans les ensembles de définition, apparaissent dès lors qu'il y a des dénominateurs (ils doivent être non nuls) ou des racines carrées (le *radicande*, c'est-à-dire ce qui est sous la racine doit être positif).

Exercice 1

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, son ensemble de définition :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *b)* $g(x) = x^2 + 1$ *c)* $h(x) = \sqrt{x}$ *d)* $i(x) = \sqrt{3-2x}$

a) x est valeur interdite pour f lorsque : $x-1=0$

(Pas de division par 0) $x = 1$

Donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{1\}$

ou $\mathcal{D}f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

b) Ici, aucune valeur interdite, donc $\mathcal{D}g = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

c) Ici, tous les nombres négatifs sont des valeurs interdites.

Donc $\mathcal{D}h = [0 ; +\infty[$

d) Pour pouvoir calculer $\sqrt{3-2x}$, il est nécessaire d'avoir $3-2x \geqslant 0$

$3 \geqslant 2x$

$2x \leqslant 3$

$x \leqslant \dfrac{2}{3}$

$\mathcal{D}h =]-\infty ; \dfrac{3}{2}]$

Définition 3

Soit f une fonction, et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.
Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

Schéma : $x \xrightarrow{f} f(x)$: calcul d'image

$x \xleftarrow{f} y$: recherche d'antécédent : on cherche $x \in \mathcal{D}_f$ tel que : $f(x) = y$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer l'antécédent de 4 par f.

Méthode : **On cherche s'il existe un réel x tel que $f(x) = 4$.**
Donc, on doit résoudre l'équation : $f(x) = 4$, où x est l'inconnue, et s'assurer que la (les) solution(s) obtenues sont bien situées dans $\mathcal{D}_f$.

Remarque : $f(2) = 5$ équivaut à dire que l'image de 2 par f vaut 5.
$f(2) = 5$ implique seulement que 2 est ***un*** antécédent de 5 par f.

x

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

-3 a-t-il un antécédent par f? Justifier.

Exemple: $f(x) = 2x+1$

On cherche ici le réel x tel que :

$f(x) = 4$

$2x+1 = 4$ (équation)

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\frac{3}{2}$ est l'antécédent de 4 par f.

2e Exemple:

On cherche s'il existe un réel x tel que : $f(x) = -3$

$x^2 = -3$

Or, pour tout réel x, $x^2 \geq 0$. Donc $x^2 = -3$ n'a pas de solution, -3 n'a pas d'antécédent par f.

bis) Chercher le(s) antécédent(s) de 25 par f.

On cherche la/les valeur(s) de x telles que : $\underbrace{f(x)}_{} = 25$

$x^2 = 25$

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 - 5^2 = 0$

$(x+5)(x-5) = 0$

$x + 5 = 0$ ou $x - 5 = 0$

$x = -5$ ou $x = 5$

$S = \{-5 ; 5\}$

-5 et 5 sont les antécédents de 25 par f.

Autre méthode :

$x^2 = 25$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$

$|x| = 5$

$x = -5$ ou $x = 5$

$S = \{-5 ; 5\}$

Remarque cruciale : Un nombre donné peut avoir aucun antécédent par une fonction f, ou bien un seul antécédent par f, ou bien plusieurs antécédents par f.

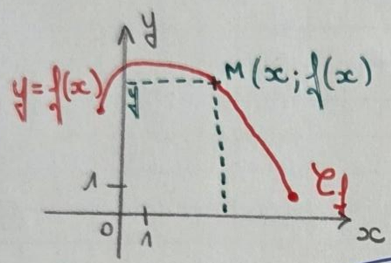
Définition 4 ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

On appelle ***courbe représentative de la fonction f,*** ou encore, graphe de f, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y = f(x)$, le réel x prenant toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$.
On notera C_f la courbe représentative de la fonction f :

$C_f = \{M(x ; y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)\}$. La relation $y = f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f.

Illustration :



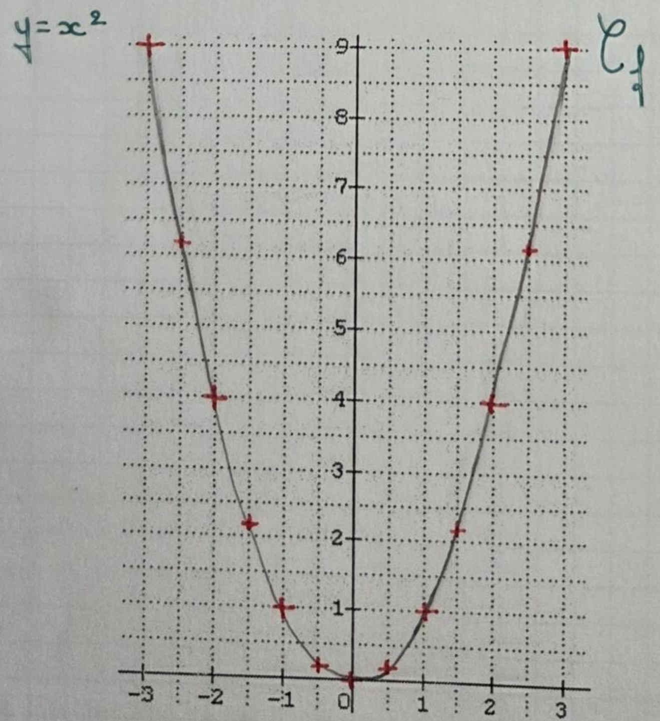
$x \in [-3;3]$ ou $-3 \leq x \leq 3$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-3 \ ; \ 3]$ par : $f(x) = x^2$.

Construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3 \ ; 3]$.

Méthode : On commence toujours par faire un tableau de valeurs de la fonction f, qui permet de déterminer et de placer des points situés sur C_f.

Tracé :



x	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$	9	$6{,}25$	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	$2{,}25$	4	$6{,}25$	9

$f(2) = 4$ signifie que $A(2\,;4)$ appartient à la courbe de f.

Remarques importantes : Comment réussir le tracé de son chef d'œuvre ?

1) Ne pas relier deux points consécutifs par un segment de droite.

2) Une courbe sera d'autant plus précise qu'il y aura de points placés dessus.

Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

A quelle condition un point $M(x\,;y)$ est-il situé sur la courbe C_f représentant f ?

♥♥ **Règle XXL : $M(x\,;y) \in C_f$ si et seulement si :** $x \in D_f$ ET $y = f(x)$ ♥♥

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. On note C_f sa courbe représentative.

a) Le point A (1 ; 2) est-il situé sur C_f ? Justifier.
b) Même question pour le point B (3 ; 2).
c) Déterminer les coordonnées du point C qui a pour abscisse 2 et qui est situé sur C_f.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$

a) $A(1;2)$:

Méthode

*) $1 \in D_f$ car $1 \in \mathbb{R}$

**) Calculer $f(1)$: Si $f(1) = y_A = 2$, alors $A \in C_f$ d'après la règle XXL

Si $f(1) \neq y_A$, alors $A \notin C_f$

Ici : $f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 - 1 = 1 - 3 = -2$

Or, $-2 \neq y_A$ car $y_A = 2$

Donc : $A(1;2) \notin C_f$

b) $B(3;2)$

*) $3 \in D_f$ car $D_f = \mathbb{R}$

**) $f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 3 - 1$

$f(3) = 27 - 27 + 2 = 2 = y_B$

Donc $B(3;2) \in C_f$

c) C a pour abscisse 2 : donc $x_C = 2$

$C(2; y_C) \in C_f$, donc $y_C = f(2)$

$y_C = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - 1$

$y_C = 8 - 12 + 1$

$y_C = -3$

Donc $C(2;-3)$

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et C_g sa courbe représentative.

a) Le point $A(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{4}{9})$ appartient-il à C_g ?

b) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui appartient à C_g ?

a) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

*) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

**) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

Ainsi comme $\frac{4}{5} \neq \frac{4}{9}$, $A\left(\frac{1}{2};\frac{4}{9}\right) \notin C_g$

b) Si un point appartient à l'axe des ordonnées alors son abscisse est égale à 0.

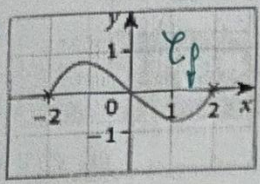
Le point cherché $S(0;y_S) \in C_g$ lorsque $y_S = g(0) = \frac{1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$

$S(0;1)$ appartient à l'axe des y et à la courbe C_g

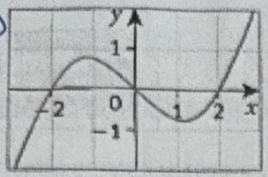
Exercice 4

A l'aide des graphiques suivants, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g dont on donne les courbes représentatives :

a)



b)

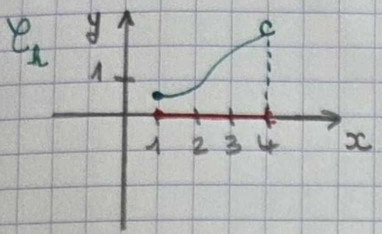


$-2 \leq x \leq 2$ donc $D_f = [-2;2]$

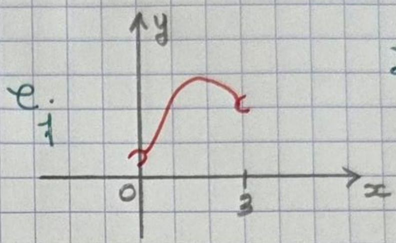
$D_g =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

• Valeur prise

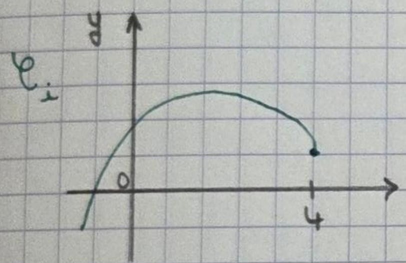
c valeur exclue



$D_h = [1;4[$



$D_j =]0;3[$

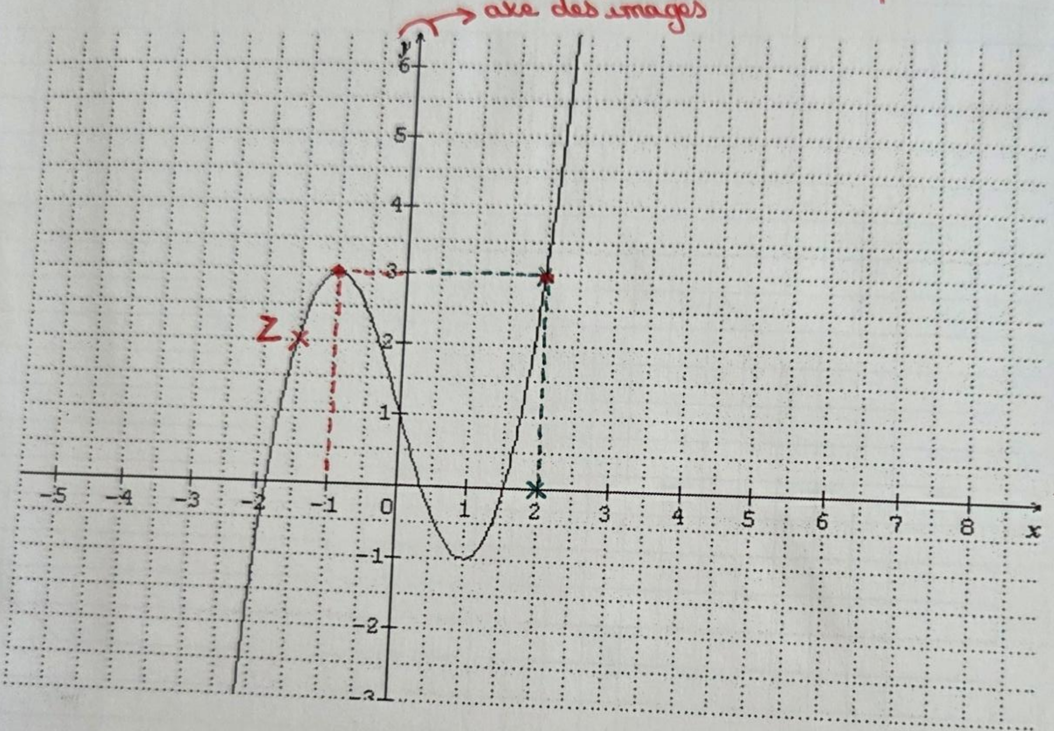


$D_i =]-\infty;4]$

II – Lectures graphiques

Exemple : A l'aide du graphique donné, déterminer :

a) L'image de 2 par la fonction *f*. $f(2) = 3$
b) L'image de 0 par *f*. $f(0) = 1$
c) Le(s) antécédent(s) de 3 par *f*. – 1 et 2 sont les antécédents de 3 par f.
d) Le(s) antécédents de – 1 par *f*. – 2 et 1 sont les antécédents de – 1 par f.
e) Le point Z(–1,5 ; 2) appartient-il à la courbe représentant *f* ? $Z \in \mathcal{C}_f$



se lit sur l'axe des ordonnées (y)

- Méthode graphique pour lire l'image d'un réel ***a*** donné :

Étape 1 : On se place sur l'axe des abscisse ($\rightarrow x$) à la valeur a.
Étape 2 : On place sur $\mathcal{C}_f$ le point d'abscisse a
Étape 3 : $f(a)$ se lit sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point A

- Méthode graphique pour déterminer les éventuels antécédents d'un nombre ***b*** donné par une fonction :

Étape 1 : On se place sur l'axe des ordonnées ($\uparrow y$) à l'ordonnée égale au nombre b.
Étape 2 : On place sur $\mathcal{C}_f$ le(s) point(s) qui ont pour ordonnée la valeur b.
Étape 3 : Les antécédents de b par la fonction f sont les abscisses des points précédents

↳ Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses (x)

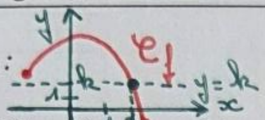
III – Résolution graphique d'équations

Résoudre l'équation : $f(x) = k$ revient exactement à chercher les antécédents de k par f.

Propriété : Equation de la forme $f(x) = k$, où k est un réel donné et f une fonction donnée, et x la variable.

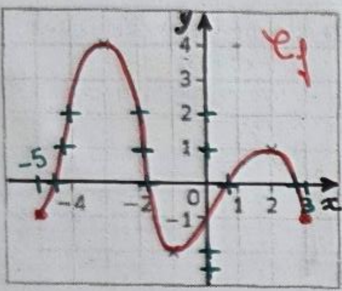
Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = k$, sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et de la droite horizontale d'équation $y = k$, que j'appellerai provisoirement, la droite d'ordonnée constante égale à k.

Illustration :



Ici pour ce k là, $f(x) = k$ a une unique solution nommée a.

Exemple : Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, puis résoudre graphiquement sur D_f les équations suivantes :



$D_f = [-5\,;3]$

e) $f(x) = -2$ a pour solution : $x = -1$

$S = \{-1\}$

a) $f(x) = 2$ a pour solutions : $x = -4$ et $x = -2$

On note : $S = \{-4\,; -2\}$

b) $f(x) = 1$ a pour solutions : $x \simeq -4{,}3$ et $x = -2$ et $x = 2$

c) $f(x) = 0$ a quatre solutions : $x \simeq -4{,}5$; $x \simeq -1{,}8$; $x \simeq 0{,}5$; $x \simeq 2{,}9$

d) $f(x) = -2{,}5$ n'a pas de solution $S = \varnothing$

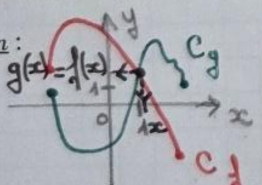
a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) = 0$ d) $f(x) = -2{,}5$ e) $f(x) = -2$.

✂ -

♥♥**Propriété** : Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, où f et g sont deux fonctions données, et x la variable.

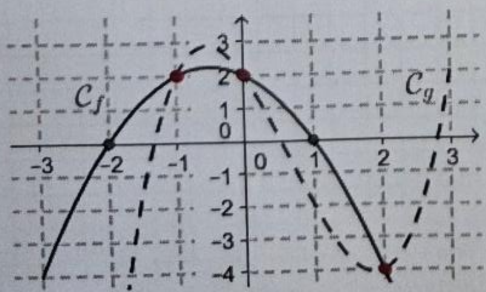
Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont ♥♥ les abscisses des éventuels point d'intersection des courbes C_f et C_g ♥♥

Illustration :



Ici : $f(x)$ et $g(x)$ a une unique solution

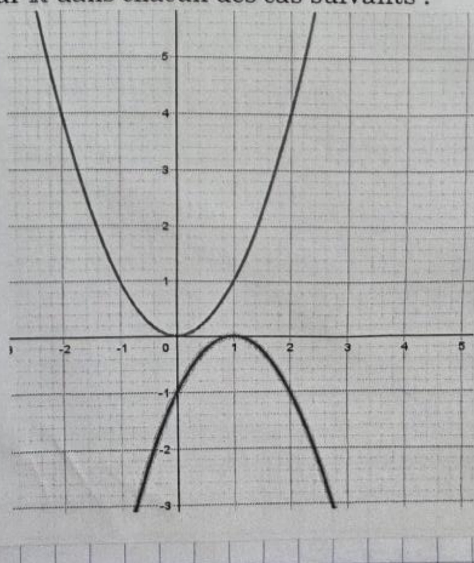
Exemples : résoudre graphiquement les équations : $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :



$f(x) = g(x)$ a pour solutions

$\underbrace{x = -1\,; x = 0\,; x = 2}$

$S = \{-1\,; 0\,; 2\}$



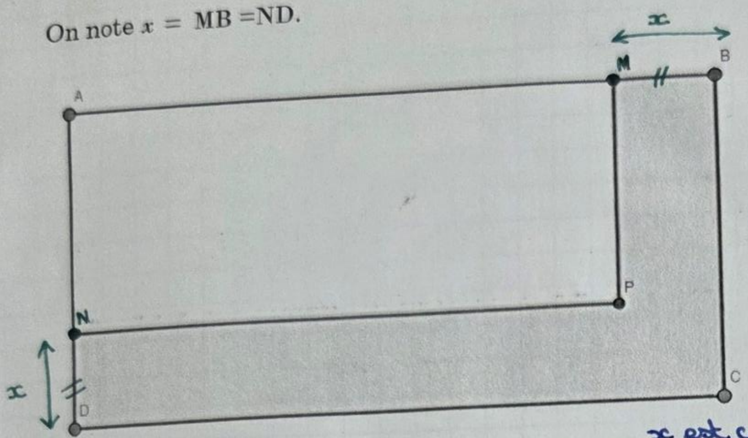
$S = \varnothing$

Exercice 5

ABCD est un rectangle tel que : AB $= 10\ cm$ et AD $= 5cm$.

Soit M un point appartenant au segment [AB], et N un point appartenant au segment [AD] tel que MB = ND. On construit enfin le point P tel que AMPN soit un rectangle.

On note $x =$ MB =ND.



x est compris entre quoi et quoi ?

a) A quel intervalle noté I, le nombre x appartient-il ?

b) Vérifier que pour tout réel x appartenant à I, l'aire du polygone $MBCDNPM$, notée $f(x)$, est égale à $f(x) = -x^2 + 15x$.

c) Existe-il une (des) valeur(s) de x appartenant à I pour laquelle l'aire de ce polygone soit égale à 8 cm^2 ? Expliquer votre démarche.

a) $M \in [AB]$, donc $\underbrace{MB}_{x} \leqslant AB$

$x \leqslant 10$

$x = MB$, donc comme $MB \geqslant 0$, $x \geqslant 0$

$N \in [AD]$, donc $\underbrace{DN}_{x} \leqslant AD$

$x \leqslant 5$

Conclusion : $\underbrace{x \geqslant 0 \text{ et } x \leqslant 10 \text{ et } x \leqslant 5}$

Donc : $0 \leqslant x \leqslant 5$

$x \in I$ où $I = [0;5]$

b) $f(x) =$ Aire (ABCD) − Aire (AMPN)

$f(x) = 10 \times 5 - AM \times AN$ avec :

$\begin{cases} AM = 10 - x \\ AN = 5 - x \end{cases}$

$f(x) = 50 - (10-x)(5-x)$

$f(x) = 50 - (50 - 10x - 5x + x^2)$

$f(x) = 50 - 50 + 10x + 5x - x^2$

$f(x) = 15x - x^2$

$f(x) = -x^2 + 15x$

c) On cherche s'il existe x appartenant à $[0;5]$

tel que : $f(x) = 8$

$-x^2 + 15x = 8$

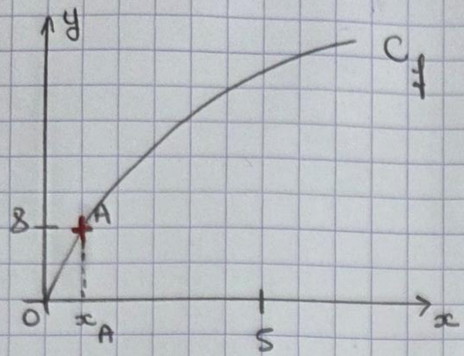
$-x^2 + 15x - 8 = 0$

En classe de 2nde, on ne sait pas résoudre algébriquement cette équation

On résout graphiquement cette équation

On trace C_f sur l'intervalle $[0;5]$ puis on résout graphiquement l'équation : $f(x)=5$

On trace C_f sur l'intervalle $[0;5]$ et on lit graphiquement les solutions de $f(x)=8$



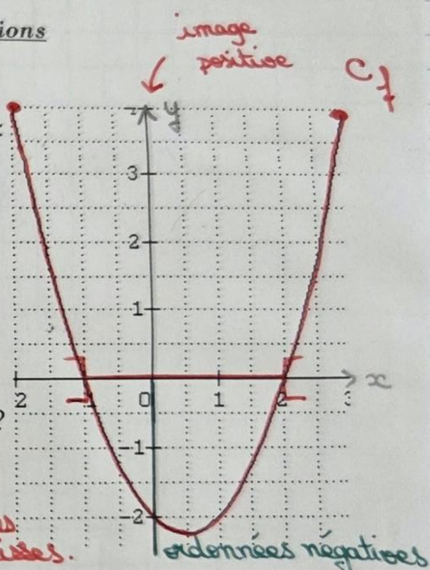
$f(x)=8$ a pour solution : $x \simeq 0{,}55$

$f(0{,}55) = -0{,}55^2 + 15 \times 0{,}55$

$f(0{,}55) = 7{,}9475$

Lors de la résolution graphique on obtient ici une valeur approchée de la solution

IV – Signe des valeurs prises par une fonction, résolution graphique d'inéquations



En s'aidant de la courbe représentative de la fonction f ci-contre, déterminer :

a) L'ensemble de définition de f. $D_f = [-2;3]$

b) Le signe des nombres : $f(0)$; $f(1)$; $f(-1{,}5)$; $f(3)$.

$f(0)<0$; $f(1)<0$; $f(-1{,}5)>0$; $f(3)>0$

c) Sur quel intervalle les valeurs prises par la fonction f sont-elles négatives ?

On cherche toutes les valeurs de x telles que : $f(x)<0$

$f(x)<0$ lorsque $-1<x<2$

Graphiquement, $f(x)<0$ lorsque C_f est situé EN-DESSOUS de l'axe des abscisses.

d) Sur quel(s) intervalle(s) les valeurs prises par f sont-elles positives ?

$f(x)>0$ lorsque $-2\leq x<-1$ ou $2<x\leq 3$

$f(x)>0$ sur chacun des intervalles $[-2;-1[$ et $]2;3]$

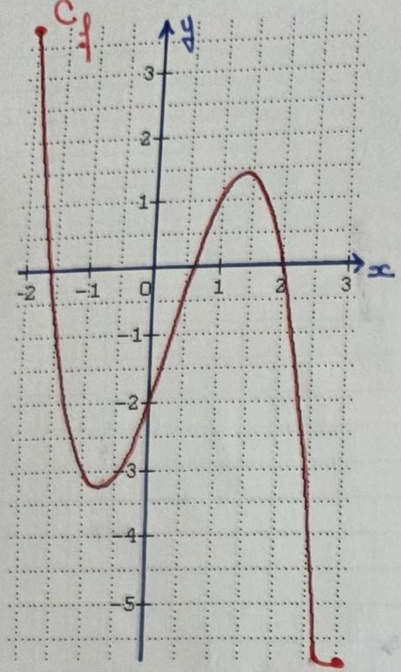
e) On résume l'étude du signe des valeurs prises par la fonction f en faisant le tableau suivant, appelé le tableau de signe de f :

e)

x	-2		-1		2		3
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

Exercice 6

Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ les inéquations : $f(x) < 0$, puis $f(x) \geq 0$, puis dresser le tableau de signes de la fonction f dont on vous donne le graphe :



$f(x) < 0$ lorsque : $-1{,}6 < x < 0{,}6$
ou
$2 < x \leq 3$

$f(x) \geq 0$ lorsque : $-2 \leq x \leq -1{,}6$
ou
$0{,}6 \leq x \leq 2$

Donc :

x	-2		$-1{,}6$		$0{,}6$		2		3
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 7

f est une fonction définie sur $[-2\ ;\ 5]$ qui a pour tableau de signes :

$f(0)=0$

$f(2)=0$ donc C_f passe par $B(2;0)$

x	-2		0		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Construire une courbe représentative possible pour f dans un repère orthonormé.

Remarque cruciale : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$f(x) < 0$ sur I équivaut graphiquement à……………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

$f(x) > 0$ sur I équivaut graphiquement à
……………………………………………………………………………………………

$f(x) = 0$ équivaut graphiquement à ……………………………………………………

Exercice 7 :