

Chapitre 5

Fonctions, courbes représentatives, et résolutions graphiques

I - Vocabulaire des fonctions

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction notée f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à chaque réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un unique réel appelé l'image de x par la fonction f , que l'on note $f(x)$. (lire f de x)

Notation : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x)$

Remarque : x est appelé la variable de la fonction.

Exemple : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = x^2$.

Calculer $f(5)$; Quelle est l'image de $-\frac{3}{4}$ par f ?

$f(5) = 5^2 = 25$: l'image de 5 par f est égale à 25

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Méthode : Pour déterminer l'image d'un nombre donné par une fonction f , on remplace x par la valeur donnée (par l'énoncé) dans l'expression $f(x)$.

Définition 2

Soit f une fonction.

L'ensemble de tous les réels qui ont une image par f est appelé **l'ensemble de définition** de la fonction f , on dit encore domaine de définition de f . On le notera, en général, $\mathcal{D}_f$.

$\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner à x , pour lesquelles on a le droit d'effectuer le calcul de l'expression $f(x)$.

Une valeur x pour laquelle le calcul de l'expression de $f(x)$ n'est pas possible est appelée une **VALEUR INTERDITE** pour la fonction f .

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

0 est une valeur interdite pour f , car on ne peut pas diviser par 0.

Pour toutes les autres valeurs du réel x , on peut calculer $\frac{1}{x}$, donc la fonction f est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

On pourra retenir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ auquel on retire les éventuelles valeurs interdites de f .

On notera : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\text{valeurs interdites}\}$. (Lire $\mathbb{R}$ privé des valeurs interdites).

Remarque** : En classe de seconde, les valeurs interdites, et donc les éventuels trous dans les ensembles de définition, apparaissent dès lors qu'il y a des dénominateurs (ils doivent être non nuls) ou des racines carrées (le *radicande*, c'est-à-dire ce qui est sous la racine doit être positif).

Exercice 1

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, son ensemble de définition :

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $g(x) = x^2 + 1$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

d) $i(x) = \sqrt{3-2x}$

a) x est valeur interdite pour f lorsque : $x-1=0$
(Pas de division par 0) $x=1$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ou $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

b) Ici, aucune valeur interdite, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

c) Ici, tous les nombres négatifs sont des valeurs interdites.

Donc $\mathcal{D}_h = [0; +\infty[$

d) Pour pouvoir calculer $\sqrt{3-2x}$, il est nécessaire d'avoir $3-2x \geq 0$

$$3 \geq 2x$$

$$2x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{D}_i =]-\infty; \frac{3}{2}]$$

Définition 3

Soit f une fonction, et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.

Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $y = f(x)$, alors on dit que x est un antécédent de y par la fonction f .

Schéma :

$f(x)$: calcul d'image
recherche d'antécédent : on cherche $x \in \mathcal{D}_f$ tel que : $f(x) = y$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

Déterminer l'antécédent de 4 par f .

Méthode : On cherche s'il existe un réel x tel que $f(x) = 4$.

Donc, on doit résoudre l'équation : $f(x) = 4$, où x est l'inconnue, et s'assurer que la (les) solution(s) obtenues sont bien situées dans $\mathcal{D}_f$.

Remarque : $f(2) = 5$ équivaut à dire que l'image de 2 par f vaut 5.

$f(2) = 5$ implique seulement que 2 est un antécédent de 5 par f .

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

- 3 a-t-il un antécédent par f ? Justifier.

Exemple : $f(x) = 2x + 1$

On cherche ici le réel x tel que :

$$f(x) = 4$$

$\frac{3}{2}$ est l'antécédent de 4 par f .

$$2x + 1 = 4 \quad (\text{équation})$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

2^e Exemple :

On cherche s'il existe un réel x tel que : $f(x) = -3$

$$x^2 = -3$$

Ox, pour tout réel x , $x^2 > 0$. Donc $x^2 = -3$ n'a pas de solution, -3 n'a pas d'antécédent par f .

bis) Cherchez le(s) antécédent(s) de 25 par f .

On cherche la/les valeur(s) de x telles que : $\underbrace{f(x)}_{x^2} = 25$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 5^2 = 0$$

$$(x+5)(x-5) = 0$$

$$x+5=0 \text{ ou } x-5=0$$

$$x=-5 \text{ ou } x=5$$

$$Y = \{-5; 5\}$$

Autre méthode :

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$$x = -5 \text{ ou } x = 5$$

$$Y = \{-5; 5\}$$

Remarque cruciale : Un nombre donné peut avoir aucun antécédent par une fonction f , ou bien un seul antécédent par f , ou bien plusieurs antécédents par f .

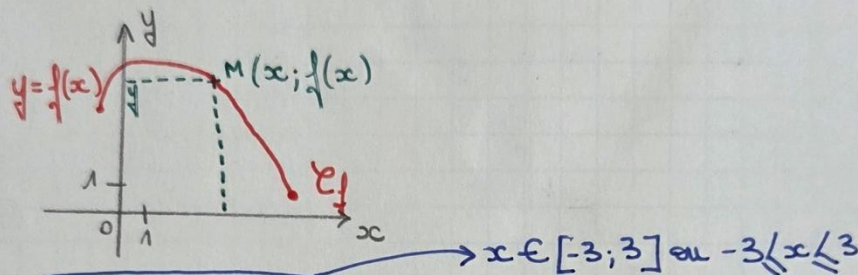
Définition 4 ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

On appelle **courbe représentative de la fonction f** , ou encore, graphe de f , l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = f(x)$, le réel x prenant toutes les valeurs possibles dans $\mathcal{D}_f$.
On notera C_f la courbe représentative de la fonction f :

$C_f = \{M(x; y) \text{ tels que } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$. La relation $y = f(x)$ est appelée équation de la courbe C_f .

Illustration :

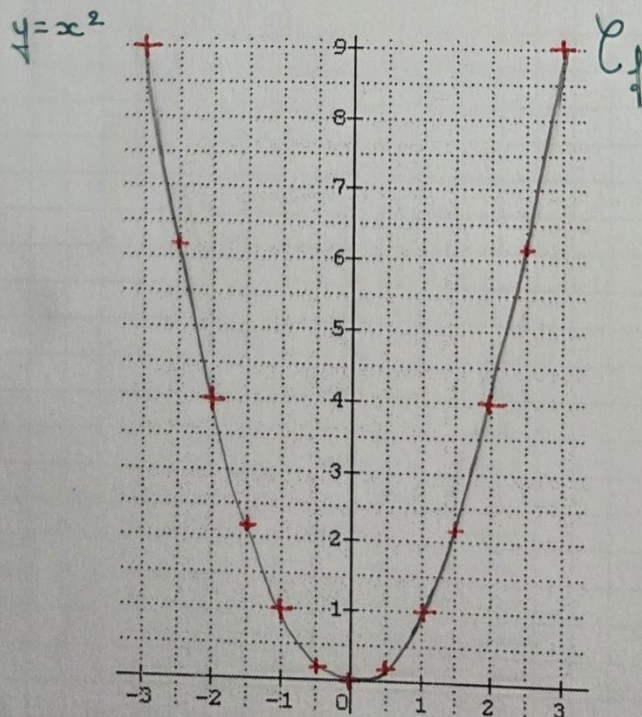


Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par : $f(x) = x^2$.

Construire sa courbe représentative sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

Méthode : On commence toujours par faire un tableau de valeurs de la fonction f , qui permet de déterminer et de placer des points situés sur C_f .

Tracé :



x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

$f(2) = 4$ signifie que
 $A(2; 4)$ appartient à
la courbe de f .

4

Remarques importantes : Comment réussir le tracé de son chef d'œuvre ?

- 1) Ne pas relier deux points consécutifs par un segment de droite.
- 2) Une courbe sera d'autant plus précise qu'il y aura de points placés dessus.
Appartenance d'un point à la courbe représentative d'une fonction

A quelle condition un point $M(x; y)$ est-il situé sur la courbe C_f représentant f ?

♥♥ Règle XXL : $M(x; y) \in C_f$ si et seulement si : $x \in D_f \Rightarrow y = f(x)$ ♥♥

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. On note C_f sa courbe représentative.

- a) Le point $A(1; 2)$ est-il situé sur C_f ? Justifier.
- b) Même question pour le point $B(3; 2)$.
- c) Déterminer les coordonnées du point C qui a pour abscisse 2 et qui est situé sur C_f .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

a) $A(1; 2)$: *

*) $1 \in D_f$ car $1 \in \mathbb{R}$

**) Calculer $f(1)$: Si $f(1) = y_A = 2$, alors $A \in C_f$ d'après la règle XXL
Si $f(1) \neq y_A$, alors $A \notin C_f$

Méthode

Ici : $f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 - 1 = 1 - 3 = -2$

Or, $-2 \neq y_A$ car $y_A = 2$

Donc : $A(1; 2) \notin C_f$

b) $B(3; 2)$

$$*) 3 \in \mathcal{D}_f \text{ car } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$**) f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 3 - 1$$

$$f(3) = 27 - 27 + 2 = 2 = \frac{4}{2}$$

$$\text{Donc } B(3; 2) \in C_f$$

c) C a pour abscisse 2: donc $x_c = 2$

$$C(2; y_c) \in C_f, \text{ donc } y_c = f(2)$$

$$y_c = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - 1$$

$$y_c = 8 - 12 + 1$$

$$y_c = -3$$

$$\text{Donc } C(2; -3)$$

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et C_g sa courbe représentative.

a) Le point $A(\frac{1}{2}; \frac{4}{9})$ appartient-il à C_g ?

b) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui appartient à C_g ?

$$a) g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\text{Ainsi comme } \frac{4}{5} \neq \frac{4}{9}, A(\frac{1}{2}; \frac{4}{9}) \notin C_g$$

$$*) \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

$$**) g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2+1} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}$$

$$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

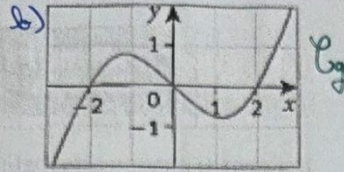
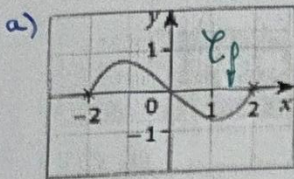
b) Si un point appartient à l'axe des ordonnées alors son abscisse est égale à 0.

Le point cherché $S(0; y_s) \in C_g$ lorsque $y_s = g(0) = \frac{1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$

$S(0; 1)$ appartient à l'axe des y et à la courbe C_g

Exercice 4

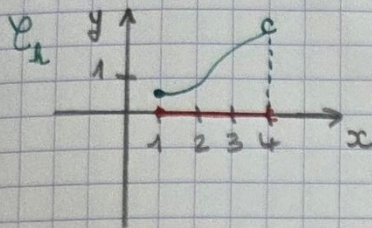
A l'aide des graphiques suivants, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g dont on donne les courbes représentatives :



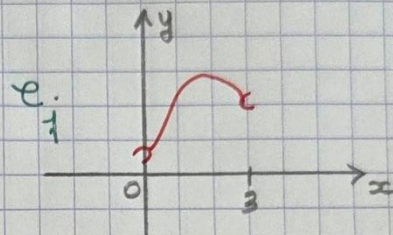
$-2 \leq x \leq 2$ donc $D_f = [-2; 2]$

$D_g =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

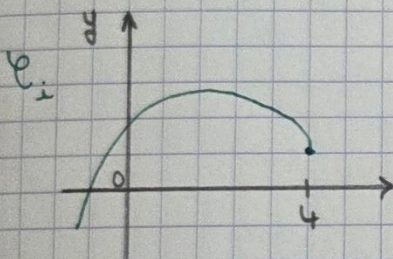
• Valeurs prises
x valeurs exclues



$D_{f_h} = [1; 4[$



$D_{f_i} =]0; 3[$

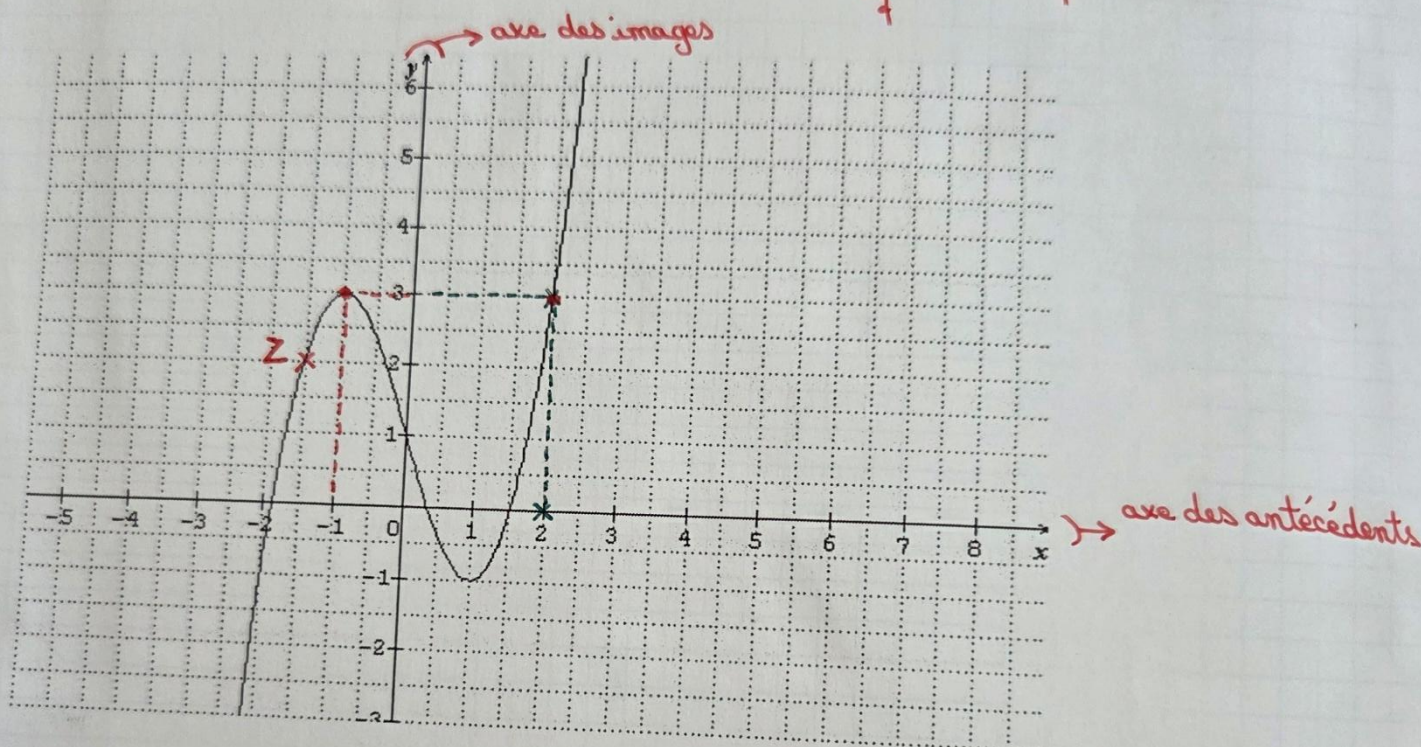


$D_{f_j} =]-\infty; 4]$

II - Lectures graphiques

Exemple : A l'aide du graphique donné, déterminer :

- a) L'image de 2 par la fonction f . $f(2) = 3$
 b) L'image de 0 par f . $f(0) = 1$
 c) Le(s) antécédent(s) de 3 par f . -1 et 2 sont les antécédents de 3 par f .
 d) Le(s) antécédents de -1 par f . -2 et 1 sont les antécédents de -1 par f .
 e) Le point $Z(-1, 5; 2)$ appartient-il à la courbe représentant f ? $Z \notin \mathcal{C}_f$



- Méthode graphique pour lire l'image d'un réel a donné : se lit sur l'axe des ordonnées (y)

Étape 1 : On se place sur l'axe des abscisses ($\rightarrow x$) à la valeur a .

Étape 2 : On place sur $\mathcal{C}_f$ le point d'abscisse a .

Étape 3 : $f(a)$ se lit sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point A

- Méthode graphique pour déterminer les éventuels antécédents d'un nombre b donné par une fonction :

Étape 1 : On se place sur l'axe des ordonnées ($\uparrow y$) à l'ordonnée égale au nombre b .

Étape 2 : On place sur $\mathcal{C}_f$ le(s) point(s) qui ont pour ordonnée la valeur b .

Étape 3 : Les antécédents de b par la fonction f sont les abscisses des points précédents

$\rightarrow$ Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses (x)

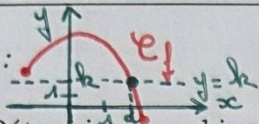
III - Résolution graphique d'équations

Résoudre l'équation : $f(x) = k$ revient exactement à chercher les antécédents de k par f .

Propriété : Equation de la forme $f(x) = k$, où k est un réel donné et f une fonction donnée, et x la variable.

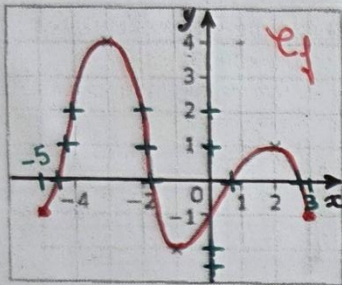
Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = k$, sont les abscisses des éventuels points d'intersection de C_f et de la droite horizontale d'équation $y = k$, que j'appellerai provisoirement, la droite d'ordonnée constante égale à k .

Illustration :



Ici pour ce k là, $f(x) = k$ a une unique solution nommée a .

Exemple : Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de la fonction f dont le graphe est donné ci-dessous, puis résoudre graphiquement sur D_f les équations suivantes :



$$D_f = [-5; 3]$$

e) $f(x) = -2$ a pour solution : $x = -1$
 $\mathcal{Y} = \{-1\}$

a) $f(x) = 2$ a pour solutions : $x = -4$ et $x = -2$

On note : $\mathcal{Y} = \{-4; -2\}$

b) $f(x) = 1$ a pour solutions : $x = -4,3$ et $x = -2$ et $x = 2$

c) $f(x) = 0$ a quatre solutions : $x = -4,5$; $x = -1,8$; $x = 0,5$; $x = 2,9$

d) $f(x) = -2,5$ n'a pas de solution $\mathcal{Y} = \emptyset$

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 1$

c) $f(x) = 0$

d) $f(x) = -2,5$

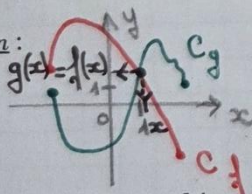
e) $f(x) = -2$

<

♥♥ **Propriété :** Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, où f et g sont deux fonctions données, et x la variable.

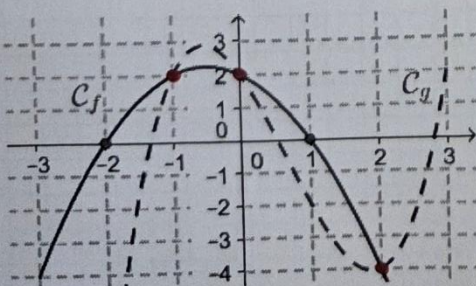
Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont ♥♥... les abscisses des éventuels point d'intersection des courbes C_f et C_g ♥♥

Illustration :

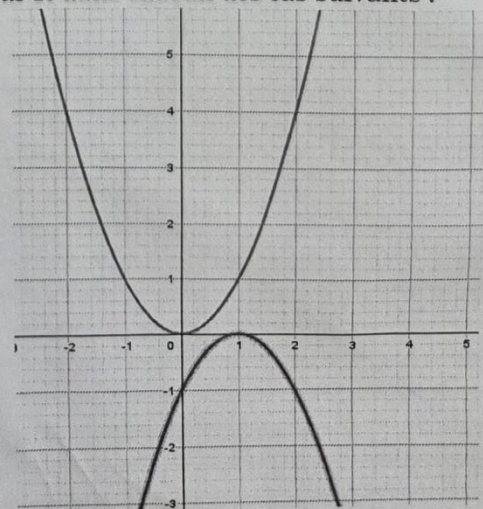


Ici : $f(x)$ et $g(x)$ a une unique solution

Exemples : résoudre graphiquement les équations : $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :



$f(x) = g(x)$ a pour solutions
 $x = -1; x = 0; x = 2$
 $\mathcal{Y} = \{-1; 0; 2\}$



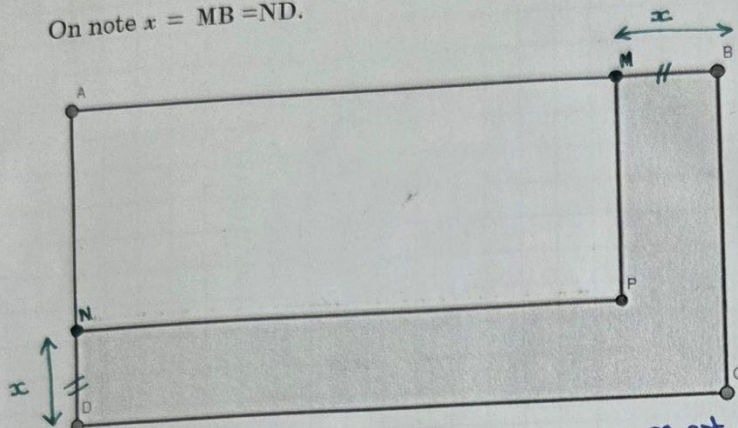
$\mathcal{Y} = \emptyset$

Exercice 5

ABCD est un rectangle tel que : $AB = 10 \text{ cm}$ et $AD = 5 \text{ cm}$.

Soit M un point appartenant au segment $[AB]$, et N un point appartenant au segment $[AD]$ tel que $MB = ND$. On construit enfin le point P tel que AMPN soit un rectangle.

On note $x = MB = ND$.



x est compris entre quoi et quoi ?

- A quel intervalle noté I, le nombre x appartient-il ?
- Vérifier que pour tout réel x appartenant à I, l'aire du polygone MBCDNPM, notée $f(x)$, est égale à $f(x) = -x^2 + 15x$.
- Existe-il une (des) valeur(s) de x appartenant à I pour laquelle l'aire de ce polygone soit égale à 8 cm^2 ? Expliquer votre démarche.

a) $M \in [AB]$, donc $\underbrace{MB}_{x} \leq AB$
 $x \leq 10$

$x = MB$, donc comme $MB \geq 0$, $x \geq 0$

$N \in [AD]$, donc $\underbrace{ND}_x \leq AD$
 $x \leq 5$

Conclusion : $x \geq 0$ et $x \leq 10$ et $x \leq 5$

Donc : $0 \leq x \leq 5$

$x \in I$ où $I = [0; 5]$

b) $f(x) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AMPN)$

$f(x) = 10 \times 5 - AM \times AN$ avec :

$$\begin{cases} AM = 10 - x \\ AN = 5 - x \end{cases}$$

$f(x) = 50 - (10 - x)(5 - x)$

$f(x) = 50 - (50 - 10x - 5x + x^2)$

$f(x) = 50 - 50 + 10x + 5x - x^2$

$f(x) = 15x - x^2$

$f(x) = -x^2 + 15x$

c) On cherche s'il existe x appartenant à $[0; 5]$

tel que : $f(x) = 8$

$-x^2 + 15x = 8$

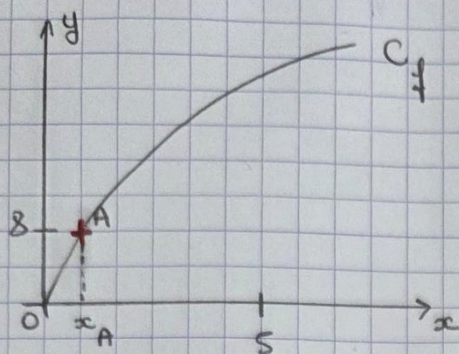
$-x^2 + 15x - 8 = 0$

En classe de 2^{nde}, on ne sait pas résoudre algébriquement cette équation

On résout graphiquement cette équation

On trace C_f sur l'intervalle $[0; 5]$ puis on résout graphiquement l'équation : $f(x) = 5$

On trace C_f sur l'intervalle $[0; 5]$ et on lit graphiquement les solutions de $f(x) = 8$

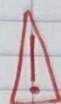


$f(x) = 8$ a pour solution : $x \approx 0,55$



$$f(0,55) = -0,55^2 + 15 \times 0,55$$

$$f(0,55) = 7,9475$$



Lors de la résolution graphique on obtient ici une valeur approchée de la solution

IV - Signe des valeurs prises par une fonction, résolution graphique d'inéquations

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction f ci-contre, déterminer :

a) L'ensemble de définition de f . $D_f = [-2; 3]$

b) Le signe des nombres : $f(0)$; $f(1)$; $f(-1,5)$; $f(3)$.

$$f(0) < 0 ; f(1) < 0 ; f(-1,5) > 0 ; f(3) > 0$$

c) Sur quel intervalle les valeurs prises par la fonction f sont-elles négatives ?

On cherche toutes les valeurs de x telles que : $f(x) < 0$

$$f(x) < 0 \text{ lorsque } -1 < x < 2$$

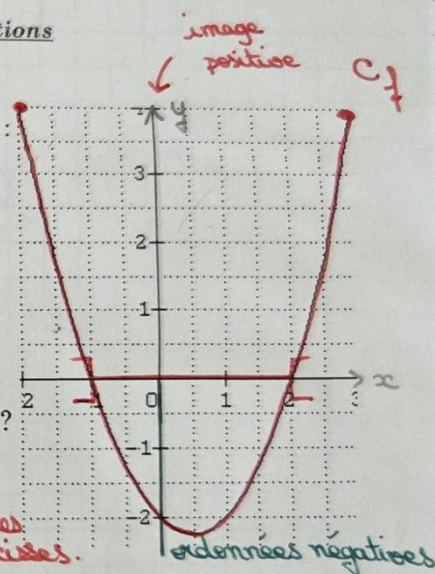
Graphiquement, $f(x) < 0$ lorsque C_f est situé EN-DESSOUS de l'axe des abscisses.

$$f(x) > 0 \text{ lorsque } -2 \leq x < -1 \text{ ou } 2 < x \leq 3$$

$$f(x) > 0 \text{ sur chacun des intervalles } [-2; -1[\text{ et }]2; 3]$$

e) On résume l'étude du signe des valeurs prises par la fonction f en faisant le tableau suivant, appelé

le tableau de signe de f :

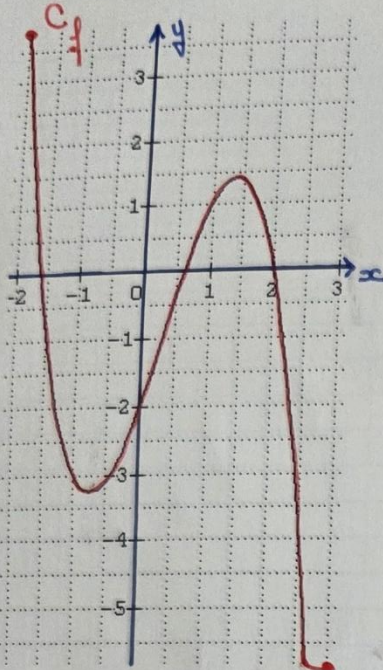


e)

x	-2	-1	2	3
Signe de $f(x)$	+	○	○	+

Exercice 6

Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ les inéquations : $f(x) < 0$, puis $f(x) \geq 0$, puis dresser le tableau de signes de la fonction f dont on vous donne le graphe :



$$f(x) < 0 \text{ lorsque : } -1,6 < x < 0,6 \\ \text{ou} \\ 2 < x \leq 3$$

$$f(x) \geq 0 \text{ lorsque : } -2 \leq x \leq -1,6 \\ \text{ou} \\ 0,6 \leq x \leq 2$$

Donc :

x	-2	-1,6	0,6	2	3		
Signe de $f(x)$	+	○	-	○	+	○	-

Exercice 7

f est une fonction définie sur $[-2 ; 5]$ qui a pour tableau de signes :

x	-2	0	2	5	
$f(x)$	-	0	+	0	+

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 0 \text{ donc } C_f \text{ passe par } B(2; 0)$$

Construire une courbe représentative possible pour f dans un repère orthonormé.

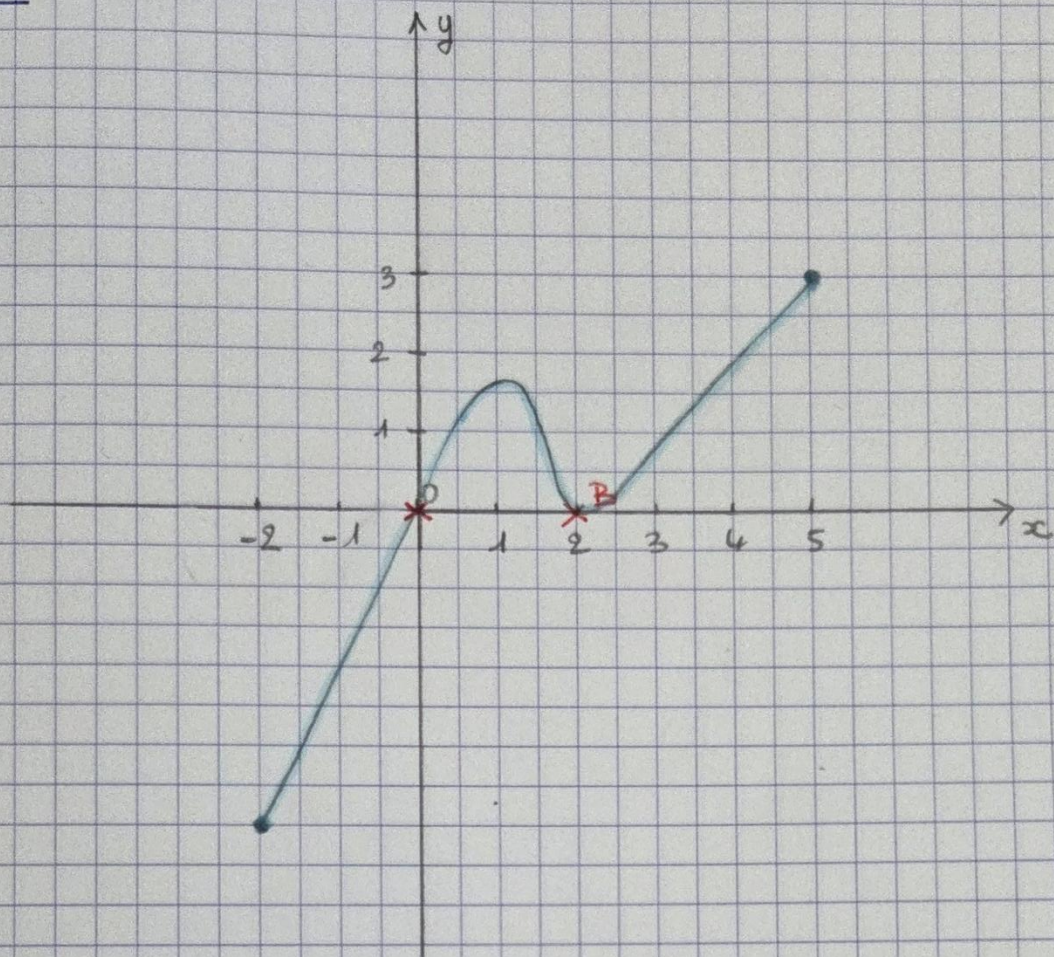
Remarque cruciale : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

$f(x) < 0$ sur I équivaut graphiquement à

$f(x) > 0$ sur I équivaut graphiquement à

$f(x) = 0$ équivaut graphiquement à

Exercise 7:

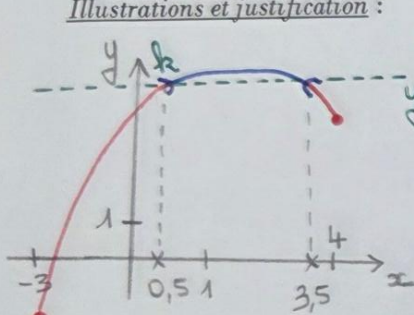


Propriété fondamentale

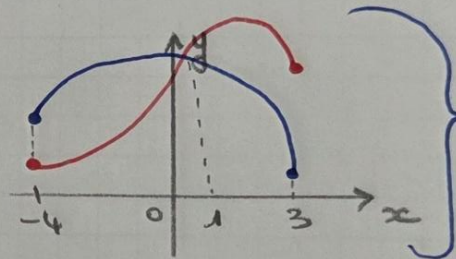
Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I , et k un réel fixé.

- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < k$ revient à : *chercher les abscisses des points de C_f qui sont situés EN-DESSOUS de la droite horizontale d'altitude k (on dira droite d'équation $y = k$)*
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > k$ revient à : *chercher les abscisses des points de C_f qui sont situés AU-DESSUS de la droite horizontale d'altitude k*
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) < g(x)$ revient à : *chercher les abscisses des points de C_f qui sont situés EN-DESSOUS de ceux de C_g*
- Résoudre sur I l'inéquation : $f(x) > g(x)$ revient à : *chercher les abscisses des points de C_f qui sont situés AU-DESSUS de ceux de C_g*

Illustrations et justification :



Ici, $f(x) > k$ lorsque : $0,5 < x < 3,5$

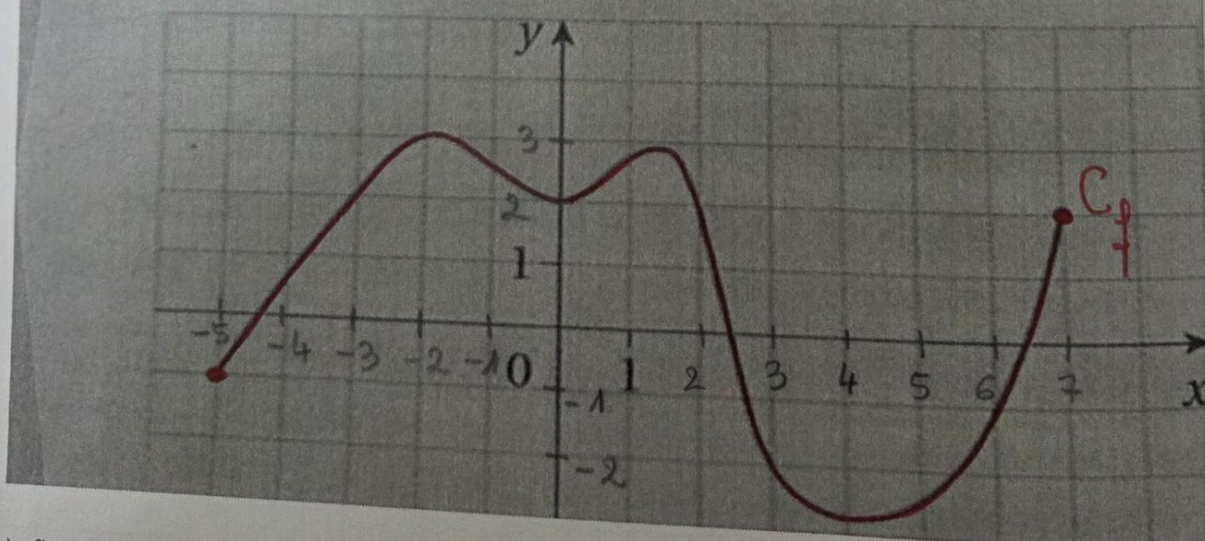


Ici : $f(x) < g(x)$ lorsque : $1 < x < 3$

Exercice 8

- 1) En s'aidant des graphiques ci-dessous, résoudre graphiquement les équations et inéquations demandées :

Soit la représentation graphique de la fonction définie sur l'intervalle $[-5; 7]$.



- a) $f(x) = 2$ b) $f(x) < 1$ c) $f(x) \geq -3$ d) $2 < f(x) < 3$

a) $f(x) = 2$ a deux solutions : $x = -3$

$$Y = \{-3; 0; 2; 7\}$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 7$$

b) $f(x) < 1$

ordonnées < 1

Points sous la droite d'altitude 1

$$f(x) < 1 \text{ lorsque : } -5 \leq x \leq -3,7 \text{ ou } 2,2 \leq x \leq 6,7$$

c) $f(x) \geq -3$ lorsque $x \in [-5; 7]$ $Y = [-5; 7]$

d) $2 < f(x) < 3$ lorsque : $-3 < x < -2$

$2 < \text{Ordonnées des points} < 3$
de C_f

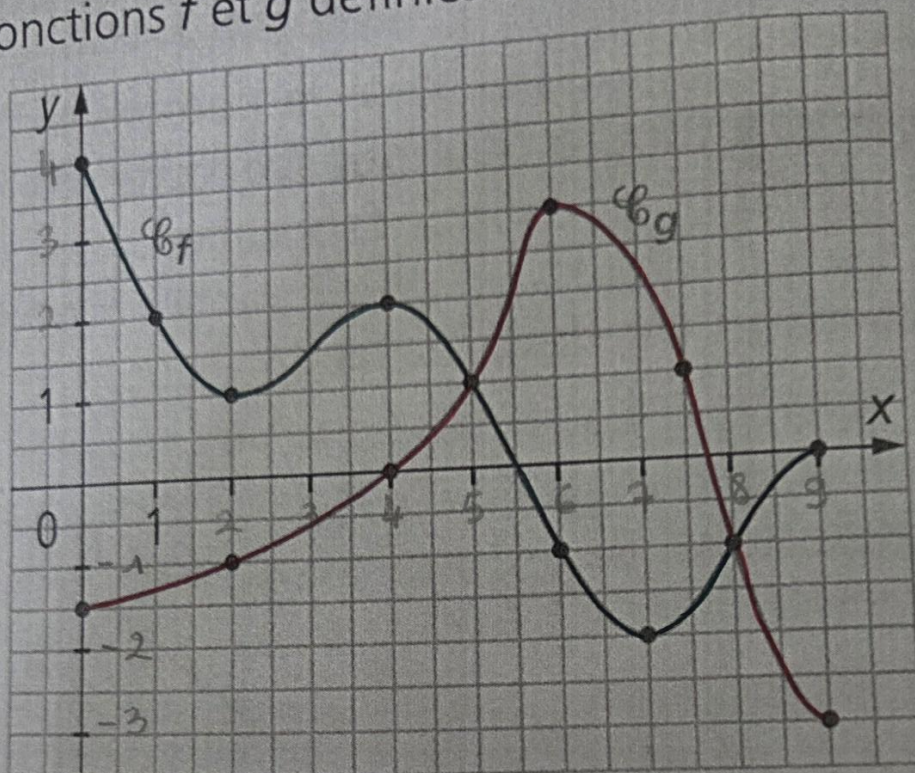
$$\text{ou } -2 < x < 0$$

$$\text{ou } 0 < x < 2$$

$$Y =]-3; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 2[$$

2)

On donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[0 ; 9]$.



a) $f(x) < g(x)$

b) $g(x) \leq f(x)$

c) $1 < f(x) < g(x)$.

a) $f(x) < g(x)$ lorsque $5 < x < 8$

$$I =]5; 8[$$

b) $g(x) \leq f(x)$ lorsque : $0 \leq x \leq 5$ ou $8 \leq x \leq 9$

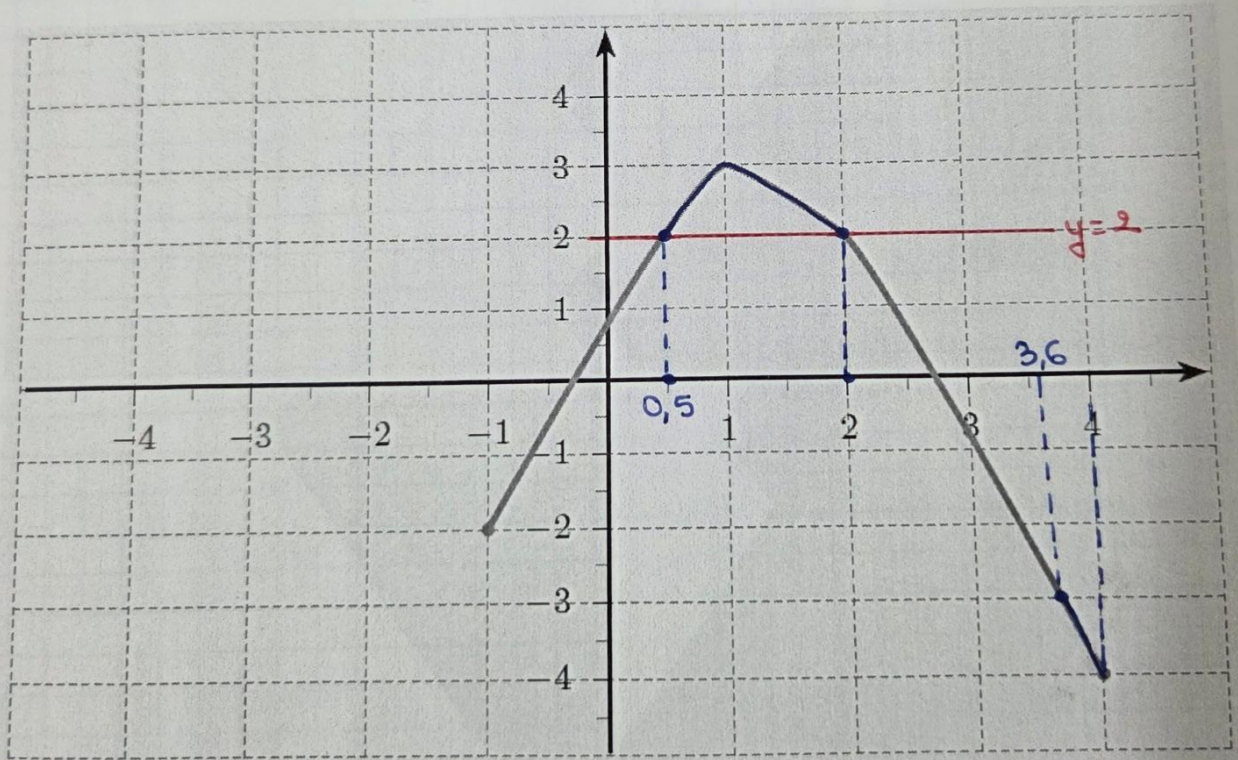
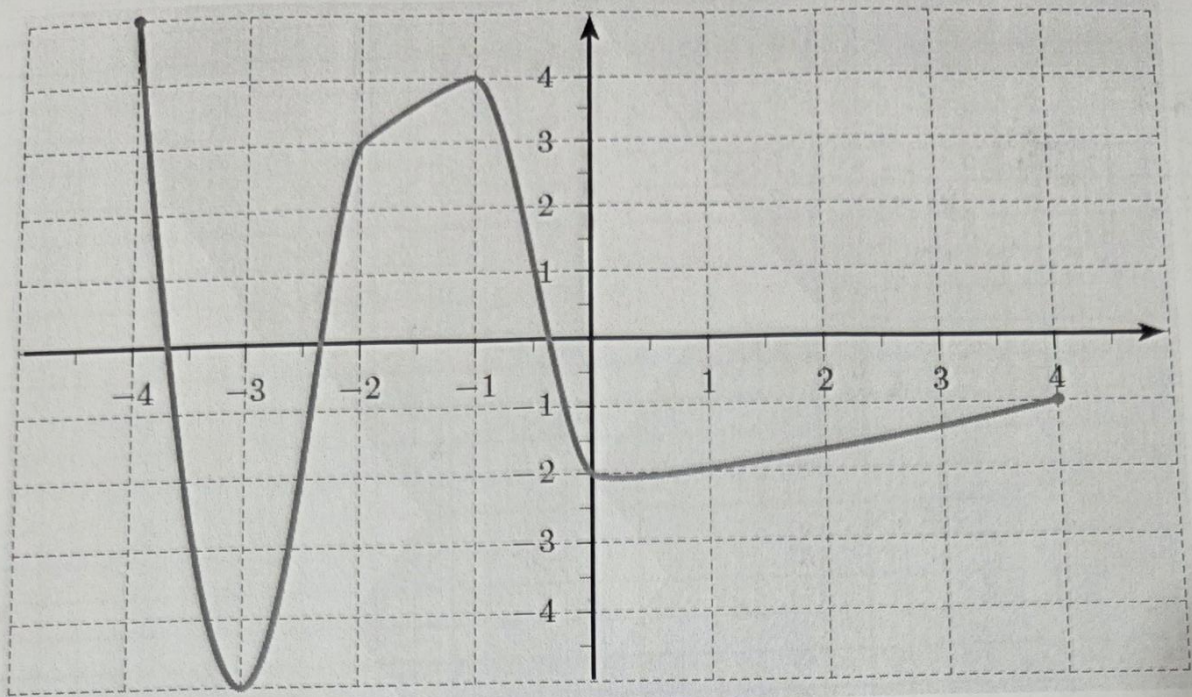
$\mathcal{C}_g$ et sous $\mathcal{C}_f$ et on accepte les points d'intersection

$$I = [0; 5] \cup [8; 9]$$

c) $1 < f(x) < g(x)$

$\mathcal{C}_f$ AU-DESSUS de l'altitude 1 et $\mathcal{C}_g$ AU-DESSUS de $\mathcal{C}_f$

Ici : $I = \emptyset$



$$f(x) \geq 2 \text{ lorsque : } 0,5 \leq x \leq 2 \rightarrow \mathcal{I} = [0,5; 2]$$

ordonnées au minimum
égales à 2 des points de C_f

$$f(x) \leq -3 \text{ lorsque : } 3,6 \leq x \leq 4$$

ordonnées au maximum
égale à -3.

