Chapitre 4 — ***Intervalles de ℝ - Inégalités et inéquations***

Rappels : soient a et b deux nombres réels.

Ecrire $a < b$ signifie que le nombre a est strictement inférieur au nombre b *Exemple* : $2 < 3,5$

Ecrire que $a > b$ signifie que a est strictement supérieur à b .... *Exemple* : $4,1 > -1$

Ecrire que $a \leq b$ signifie que a est inférieur *ou* éventuellement égal à b. (inférieur ou égal)

Exemple : $x \leq 2,5$ signifie que le réel x peut prendre n'importe quelle valeur inférieure ou égale à 2,5, ou encore que le réel x est au plus égal à 2,5.

Ecrire que $a \geq b$ signifie que a est supérieur ou égal à b ....

Exemple : $y \geq -1$ signifie que y peut prendre n'importe quelle valeur supérieur ou égal à 1.

Enfin ***les nombres réels positifs*** sont ***les nombres strictement supérieurs à 0***, et ***les nombres réels négatifs*** sont ***les nombres strictement inférieurs à 0***.

Ecrire : $a > 0$ ou dire le réel a est un nombre positif a le même sens !

De même, $a < 0$ revient à dire que le réel a est un nombre négatif.

Les phrases : $a < b$ et $b > a$ ont exactement le même sens mathématique ! Il faut savoir jongler entre ces deux écritures ! De façon imagée : si vous avez moins d'argent que votre frère, c'est que votre frère a plus d'argent que vous !

Définition : comparer deux nombres réels a et b signifie : trouver lequel des deux nombres est supérieur à l'autre, ou s'ils sont égaux.

Quand on demande de ***comparer deux réels a et b***, on vous demande donc de mettre entre a et b l'un des symboles suivants : $<$, $>$ ou $=$!

Enfin, il arrive parfois que l'on écrive une double inégalité : $2 \leq x \leq 5$ qui est une écriture compacte de la ***double condition*** : $x \geq 2$ et $x \leq 5$.

I – Intervalles de ℝ

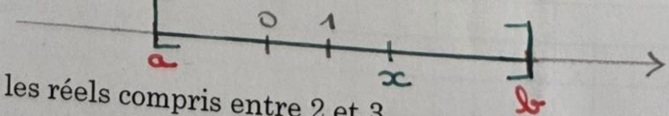
Définition 1 : Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.
L'ensemble de tous les nombres réels compris entre a (*inclus*) et b (*inclus*) est appelé l'intervalle fermé d'extrémités a et b. On le notera $[a ; b]$.

En vert : l'intervalle fermée d'extrémités a et b } On le note : $[a ; b]$

Ainsi, $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leqslant x \leqslant b\}$. a et b sont aussi appelées les *bornes* de l'intervalle.

Tel que

Représentation sur une droite graduée :



Exemple : $[2 \ ; \ 3]$ désigne l'ensemble de tous les réels compris entre 2 et 3.

Ecrire : $x \in [2 \ ; \ 3]$ équivaut à dire : $2 \leqslant x \leqslant 3$.
On notera donc : $x \in [2 \ ; \ 3] \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$.

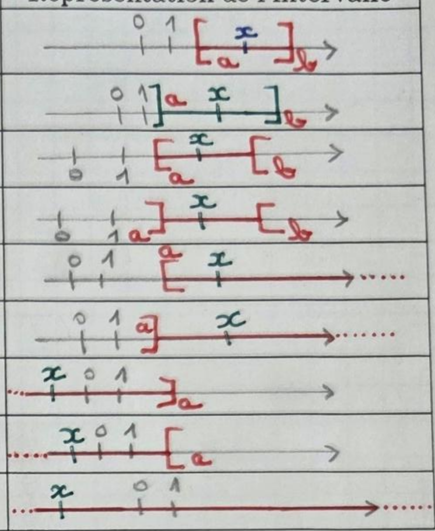
Exercice 1

Dire si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $[-3\ ;\ 5]$:

a) -1 **b)** 6 **c)** -3 **d)** 10^{-5}

$-1 \in [-3;5]$ $6 \notin [-3;5]$ $-3 \in [-3;5]$ $10^{-5} \in [-3;5]$

a et b désignent des réels tels que $a \leq b$. Il existe 9 types d'intervalles de $\mathbb{R}$:

L'ensemble des réels x tels que :	C'est l'intervalle noté :	Représentation de l'intervalle
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	
$a < x < b$	$]a;b[$ (intervalle ouvert)	
$x \geq a$	$[a;+\infty[$	
$x > a$	$]a;+\infty[$	
$x \leq a$	$]-\infty;a]$	
$x < a$	$]-\infty;a[$	
$x \in \mathbb{R}$	$]-\infty;+\infty[$	

Remarques fondamentales

Tout d'abord les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Dans les intervalles contenant l'un de ces symboles, les crochets seront toujours orientés vers l'extérieur de l'intervalle.

Comme on ne peut comparer entre eux que deux nombres réels, ***on s'interdira d'écrire*** par exemple : $\cancel{-\infty < 2}$ ou encore $\cancel{x < +\infty}$

Sur le sens des crochets : Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'intérieur de l'intervalle, la borne où figure ce crochet appartient à l'intervalle.
Lorsqu'un crochet est dirigé vers l'extérieur de l'intervalle, la borne où figure ce dernier n'appartient pas à cet intervalle.

Par exemple, pour l'intervalle $[2\ ;\ 3[$, on a : $2 \in [2;3[$ et $3 \notin [2;3[$
Pour l'intervalle $]-2{,}5\ ;\ 0]$, on a : $-2{,}5 \notin]2{,}5;0]$ et $0 \in]2{,}5;0]$

Enfin, on peut noter $\mathbb{R} =$ $]-\infty;+\infty[$: $\mathbb{R}$ est représenté par toute la droite graduée !

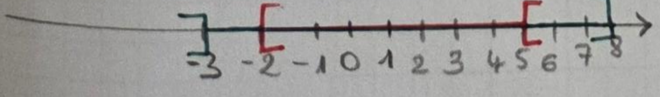
Exemples : 1) Traduire en termes d'appartenance à un intervalle :

a) $-2 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-2;1]$; *b)* $x > 3 \Leftrightarrow x \in]3;+\infty[$; *c)* $x \leqslant -4 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-4]$

2) Traduire l'appartenance d'un réel x à chacun des intervalles suivants par des inégalités :

a) $x \in]-3\ ;\ 8] \Leftrightarrow -3 < x \leq 8$; *b)* $x \in]-\infty\ ;\ \pi[$ $x < \pi$; *c)* $x \in]-10\ ;\ 3[$ $-10 < x < 3$; *d)* $x \in [2\ ;\ +\infty[$ $x \geq 2$

3) Vrai ou faux : *affirmation 1* : $[-2\ ;\ 5[$ est contenu dans $]-3\ ;\ 8]$; *affirmation 2* : si $x < 3$, alors $x \leqslant 3$.



Affirmation 1 : C'est vrai

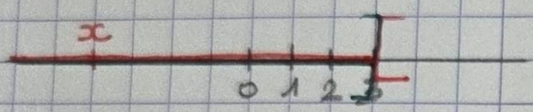
Si $x \in [-2 ; 5[$ alors : $-2 \leq x < 5$

Or $-3 < -2$ et $5 \leq 8$

Donc $-3 < x \leq 8$ c'est à dire : $x \in]-3 ; 8]$

Affirmation 2 : C'est vrai

" Si $\underbrace{x < 3}_{\text{Je sais}}$, alors $\underbrace{x \leq 3}_{\text{Je conclus}}$ "



Si $x < 3$, alors $x \in]-\infty ; 3[$

Or $]-\infty ; 3[$ est contenu dans $]-\infty ; 3]$

Donc $x \in]-\infty ; 3]$

Affirmation 3 : C'est faux

" Si $x \leq 3$ alors $x < 3$ "

C'est faux car $]-\infty ; 3]$ n'est pas contenu dans $]-\infty ; 3[$

En effet, si $x = 3$, $3 < 3$: Faux !

Affirmation 3 : Formuler la réciproque de l'affirmation 2, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Définition

Soit a, b et x trois nombres réels.
On dit que a et b encadrent le réel x si et seulement si $a<x<b$.
a est appelé la ..borne inférieure..........de l'encadrement.
b est appelé la..borne supérieure......de l'encadrement.
Le réel $b-a$ est appelé .L'AMPLITUDE... de l'encadrement.

Exemple

$4<4{,}07<5$ est un encadrement du nombre décimal 4,07 d'amplitude 1.

Lorsqu'on demander ***d'encadrer un nombre x par deux décimaux, à*** 10^{-n} ***près*** (où n est un entier naturel) près, cela signifie : trouver deux nombres décimaux a et b tels que :
......$a<x<b$.......... et ...$b-a=10^{-n}$...............

Donner un encadrement à l'unité près de π, puis à 10^{-1} près, puis à 10^{-2} près.

$3<\pi<4$ | $\underbrace{3{,}1<\pi<3{,}2}_{\text{un encadrement de } \pi \text{ à } 0{,}1 \text{ près.}}$ ou $\underbrace{3{,}13<\pi<3{,}23}_{\text{autre encadrement de } \pi \text{ à } 0{,}1 \text{ près.}}$, | $\underbrace{3{,}14<\pi<3{,}15}_{\text{encadrement de } \pi \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

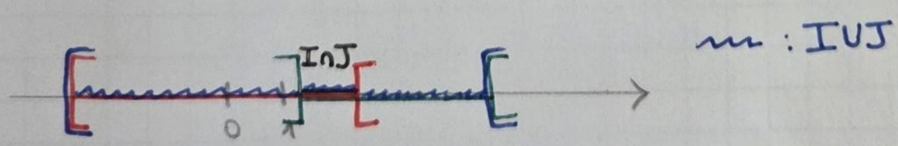
Définitions

Soit I et J deux intervalles de ℝ.

1) L'ensemble de tous les nombres réels qui appartiennent simultanément (= à la fois) à I et à J est appelé l'intersection de I et de J : on la note I .∩.J et on lit I inter J.

2) L'ensemble de tous les nombres réels qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles I ou J est appelé la réunion de I et de J : on la note I.∪..J et on lit I union J.

Illustration :



Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée, puis déterminer I∩J puis I∪J.

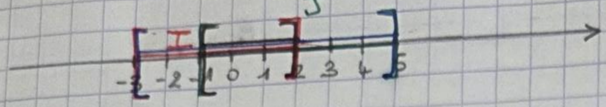
	Intervalle I	Intervalle J
Cas 1	[-3 ; 2]	[-1 ; 5]
Cas 2	]-∞ ; 2]	]0 ; +∞[
Cas 3	[4 ; +∞[	]-5 ; +∞[
Cas 4	]-∞ ; 3[	[-2 ; +∞[

Exercice 2:

① $I = [-3;2]$ $J = [-1;5]$

$I \cap J = [-1;2]$

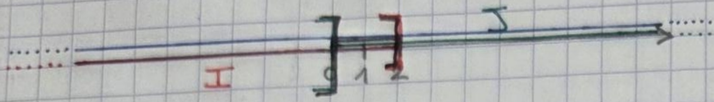
$I \cup J = [-3;5]$



② $]-\infty;2] = I$ $]0;+\infty[= J$

$I \cup J =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

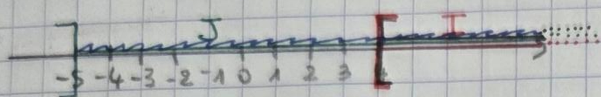
$I \cap J =]0;2]$



③ $I = [4;+\infty[$ $J =]-5;+\infty[$

$I \cap J = [4;+\infty[$

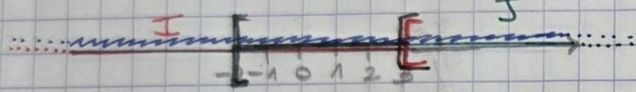
$I \cup J =]-5;+\infty[$



④ $I =]-\infty;3[$ $J = [-2;+\infty[$

$I \cap J = [-2;3[$

$I \cup J =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$



4

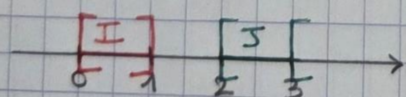
Exercice 3

1) Fabriquer deux intervalles I et J tels que $I \cap J = \varnothing$

2) Ecrire, en utilisant des intervalles, l'ensemble des réels x tels que :

a) $x \neq 0$ ***b)*** $x \neq -1$ et $x \neq 2$. ***c)*** $x \notin [1\ ;\ 3]$.

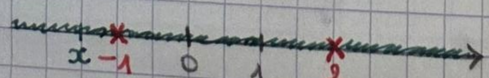
1) $I = [0;1]$ $J = [2;3[$ $I \cap J = \varnothing$



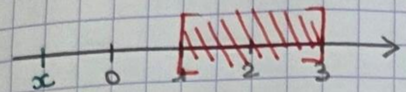
On dit que I et J sont disjoint

2) a. $(x \neq 0) \iff x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

b) $(x \neq -1$ et $x \neq 2) \iff (x \in]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[)$



c) $x \notin [1;3] \iff x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$



II – Inégalités

Règles fondamentales sur les inégalités

a) Inégalités et addition

On peut toujours ajouter (respectivement ***soustraire***) un <u>même</u> nombre ***aux deux membres*** d'une inégalité, en ***conservant son sens.***

Pour tous réels a, b et c, on a :

1) Si $a \leqslant b$, alors $a+c \leqslant b+c$

2), Si $a \leqslant b$ alors $a-c \leqslant b-c$

♥♥♥ *Retenir qu'on ne change pas le sens d'une inégalité en y ajoutant (respectivement soustrayant) un même nombre dans chacun de ses deux membres* ♥♥♥.

Remarque : Les règles énoncées restent vraies si on met n'importe lequel des symboles : $<$, $>$ ou $\geq$. De même dans les propriétés qui suivent.

Propriété   Soient a, b, c et d des nombres réels.   1) ♥♥♥ $a \leqslant b$ équivaut à dire que $a-b \leq 0$ ♥♥♥   2) Si $a<b$ et si $c<d$, alors : $a+c < b+d$

♥♥♥ *On peut donc additionner membre à membre deux inégalités de même sens* ♥♥♥.

Preuve : ① $a \leq b$ équivaut à $a-b \leq b-b$ c'est à dire : $a-b \leq 0$

② $a<b$, donc $\boxed{a+c<b+c}$ (*) ; $c<d$, donc $\boxed{b+c<b+d}$ (**)

(*) et (**) permettent de dire $a+c<b+d$

Remarque : La propriété 1) est fondamentale pour la suite : ***Comparer deux nombres réels a et b reviendra donc à chercher le signe de la différence a – b !***

2) ***Pas de règle pour soustraire membre à membre deux inégalités !!***

Donnons quelques contrexemples :

(*) $10<52$: Vraie $\qquad 10-20 > 52-104$

$20<104$: Vraie $\qquad -10 > -52$

Ne jamais soustraire membre à membre des inégalités, même si elles ont le même sens.

$\frac{a\times c - b\times c + b\times c}{a\times c}$

b) Inégalités, produits et quotients

1) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement positif***, en ***conservant le sens de l'inégalité.***

C'est-à-dire que pour tout réel ***a, b*** et ***c*** :

♥♥♥Si $a \leqslant b$ et si $c > 0$, alors....$a\times c \leq b\times c$.... et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$..............................♥♥♥

Pourquoi ?

2) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement négatif,*** en ***changeant le sens de l'inégalité.***

C'est-à-dire que pour tout réel ***a, b*** et ***c*** :

♥♥♥Si $a \leqslant b$ et si $c < 0$, alors ..$a\times c \geq b\times c$.... et ..$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$..................♥♥♥

Même type de justification qu'au point précédent. changement de sens

***♥♥♥Retenir qu'on** ne change pas le sens **d'une inégalité** en multipliant **(respectivement divisant)** par un même nombre POSITIF **chacun de ses deux membres.** ♥♥♥*

***A contrario,** ♥♥♥on change le sens **d'une inégalité** en multipliant **(respectivement divisant)** par un même nombre NEGATIF **chacun de ses deux membres**♥♥♥.*

Remarque : Les propositions suivantes sont équivalentes. Ces dernières seront d'un usage fréquent dans la résolution des inéquations !

Pour tout nombre $c > 0$: $a < b$ est équivalente à : $a\times c < b \times c$.

Pour tout nombre $c < 0$: $a < b$ est équivalente à : $a\times c > b \times c$.

Exercice 4

1) Sachant que $x \leq 3$ et $y \leq -5$, que peut-on en déduire pour les expressions suivantes :

a) $x - 4$ **b)** $3y$ **c)** $-4x$ **d)** $x + y$

2) Sachant que : $-2 < x < 1$ et que $2 < y < 3$, déterminer le meilleur encadrement possible de :

a) $\frac{x+y}{2}$ **b)** $x - y$

Pourquoi ?

$a \leq b$, donc $a - b \leq 0$, donc $a - b$ est négatif ou nul

Or $c > 0$, donc $c(a-b) \leq 0$ (règle des signes d'un produit : $- \times + = -$)

donc $c\times a - c\times b \leq 0$

$a\times c - b\times c \leq 0$; $+b\times c$ de chaque côté :

$a\times c \leq b\times c$

$$\underbrace{a\times c - b\times c + b\times c}_{a\times c}$$

b) Inégalités, produits et quotients

1) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement positif***, en ***conservant le sens de l'inégalité.***

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

♥♥♥Si $a \leqslant b$ et si $c > 0$, alors....$a \times c \leq b \times c$.... et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ ....♥♥♥

Pourquoi ?

2) On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un ***même nombre strictement négatif***, ***en changeant le sens de l'inégalité.***

C'est-à-dire que pour tout réel a, b et c :

♥♥♥Si $a \leqslant b$ et si $c < 0$, alors ..$a \times c \geq b \times c$.... et ..$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$........................♥♥♥

Même type de justification qu'au point précédent. changement de sens

♥♥♥***Retenir qu'on** ne change pas le sens **d'une inégalité** en multipliant **(respectivement divisant)** par un même nombre POSITIF **chacun de ses deux membres.*** ♥♥♥ ***A contrario,*** ♥♥♥*on change le sens **d'une inégalité** en multipliant **(respectivement divisant)** par un même nombre NEGATIF **chacun de ses deux membres***♥♥♥.

Remarque : Les propositions suivantes sont équivalentes. Ces dernières seront d'un usage fréquent dans la résolution des inéquations !

Pour tout nombre $c > 0$: $a < b$ est équivalente à : $a \times c < b \times c$.
Pour tout nombre $c < 0$: $a < b$ est équivalente à : $a \times c > b \times c$.

Exercice 4

1) Sachant que $x \leq 3$ et $y \leq -5$, que peut-on en déduire pour les expressions suivantes :

a) $x - 4$ ***b)*** $3y$ ***c)*** $-4x$ ***d)*** $x + y$

2) Sachant que : $-2 < x < 1$ et que $2 < y < 3$, déterminer le meilleur encadrement possible de :

a) $\frac{x+y}{2}$ ***b)*** $x - y$

Pourquoi ?

$a \leq b$, donc $a - b \leq 0$, donc $a - b$ est négatif ou nul

Or $c > 0$, donc $c(a-b) \leq 0$ (règle des signes d'un produit : $- \times + = -$)

donc $c \times a - c \times b \leq 0$

$+ b\times c$ $a \times c - b \times c \leq 0$ $+ b \times c$

$a \times c \leq b \times c$

Exercice 4 :

1) a) On sait que : $x \leq 3$

Donc $x - 4 \leq 3 - 4$

$x - 4 \leq -1$

b) On sait que : $y \leq -5$

Donc : $3y \leq -5 \times 3$ car $3 > 0$

$3y \leq -15$

c) $x \leq 3$ donc $-4 \times x \geq -4 \times 3$ car $-4 < 0$

$-4x \geq -12$

d) $x \leq 3$

$y \leq -5$

Donc $x + y \leq 3 + (-5)$

$x + y \leq -2$

2) a) Ici : $-2 < x < 1$

$2 < y < 3$

$-2 + 2 < x + y < 1 + 3$

$0 < x + y < 4$

$\frac{0}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{4}{2}$ (car $2 > 0$)

$0 < \frac{x+y}{2} < 2$

b) Pas de soustraction d'inégalités

Or $x - y = x + (-y)$

Or : $-2 < x < 1$

$\times(-1)$ $2 < y < 3$ $\times(-1)$

Donc $-2 > -y > -3$

Donc $-3 < -y < -2$

Ainsi : $-2 < x < 1$

$-3 < -y < -2$

Donc : $-2 + (-3) < x + (-y) < 1 + (-2)$

$-5 < x - y < -1$

Exercice 5

1) Montrer que pour tout réel x : si $x > 1$, alors $x^2 > x$. Montrer aussi que si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$.

Que pensez-vous de l'affirmation : *" le carré de n'importe quel nombre réel est toujours supérieur ou égal à ce dernier" ?*

2) Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $2^n < 2^{n+1}$.

1) On sait que : $x > 1$

Donc $x \times x > 1 \times x$ car $x > 1 > 0$

$x^2 > x$

Ici : $0 < x < 1$

Donc : $0 \times x < x \times x < 1 \times x$ car $x > 0$

Donc $0 < x^2 < x$

Donc $x^2 < x$

L'affirmation est fausse : N'importe quel nombre x appartenant à $]0;1[$

Vérifie $x^2 < x$

ex: $0,5^2 < 0,5$

2) $2^n < 2^{n+1}$

$$1 < 2$$

$\times 2^n$ $\times 2^n$

Donc $1 \times 2^n < \underbrace{2 \times 2^n}$ car $2^n > 0$

$2^n < 2^{n+1}$

En effet : $2^n = \underset{>0}{2} \times \underset{>0}{2} \times \underset{>0}{2} \ldots \times \underset{>0}{2}$

Produit de positifs est positif

6

Exercice 6

1) Montrer que si $0 < a < b$ et si $0 < c < d$, alors $0 < ac < bd$. Interpréter géométriquement.

2) En déduire un encadrement de $(x-1)(x+3)$ sachant que $2 < x < 5$.

1) $0 < a < b$

Donc $0 \times c < a \times c < b \times c$ car $c > 0$

Donc $0 < ac < bc$ (*)

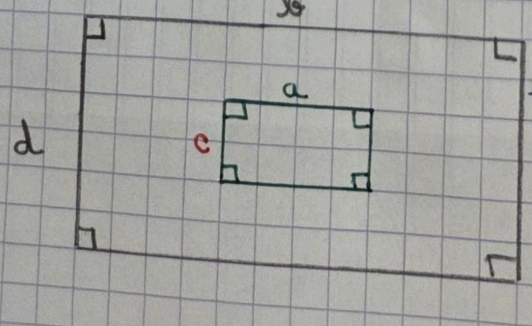
De même : $0 < c < d$

Donc $0 \times b < c \times b < d \times b$ car $b > a > 0$ donc $b > 0$

Donc $0 < bc < db$ (**)

(*) et (**) font que $0 < ac < bc < bd$

Donc en particulier $0 < ac < bd$



Si un rectangle a sa longueur et sa largeur inférieures à celle d'un autre rectangle, alors son aire est inférieure à celle du 2nd rectangle

2) $2 < x < 5$

Donc $2-1 < x-1 < 5-1$

$0 < \underline{1 < x-1 < 4}$

$2 < x < 5$

Donc $2+3 < x+3 < 5+3$

$0 < \underline{5 < x+3 < 8}$

<u>D'après q.1) :</u> $0 < 1 < x-1 < 4$

$0 < 5 < x+3 < 8$

$0 < 1\times 5 < (x-1)(x+3) < 4\times 8$

$\underline{0 < 5 < (x-1)(x+3) < 32}$

III- Inéquations

Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue, souvent nommée x en mathématiques.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité écrite est vraie.

Exemple : Soit l'inéquation : $2x + 6 \leqslant 0$.

Résoudre cette inéquation, c'est déterminer <u>toutes</u> les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité $2x + 6 \leqslant 0$ est vraie : on cherche donc toutes les valeurs de x telles que $2x + 6$ soit négatif ou nul ! Ces valeurs de x sont appelées les solutions de l'inéquation.

Remarque cruciale

Deux inéquations sont dites équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solution.

Par exemple, les inéquations $x - 1 \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$ sont équivalentes.

Une ***inéquation*** est dite ***résolue*** lorsqu'on a ***isolé l'inconnue*** x.

Les règles du paragraphe précédent sur les inégalités vont nous donner un moyen efficace et sûr pour résoudre des inéquations :

Application à la résolution d'inéquations : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x - 1 > 3$ ***b)*** $-4x < -x + 6$ ***c)*** $4 - 2(6 - 2x) > 1 - (-14x + 9)$

d) $x + 1 \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ ***e)*** $2x - 6 > 3 - (4 - 2x)$ ***f)*** $x < 2x - (x - 6)$ ***g)*** $x^2 + 1 > (x + 2)^2$

a) $2x - 1 > 3$

$2x - 1 + 1 > 3 + 1$

$2x > 4$

$\frac{2x}{2} > \frac{4}{2}$ car $2 > 0$

$x > 2$

Tous les nombres strictement supérieur à 2 sont solutions.

On note $\underline{S =]2; +\infty[}$

$2x - 1 > 3$

$2x > 4$

$x > \frac{4}{2}$

$x > 2$

$S =]2; +\infty[$

b) $-4x < -x + 6$

$-4x + x < -x + 6 + x$

$-3x < 6$

$\frac{-3x}{-3} > \frac{6}{-3}$ car $-3 < 0$

$x > -2$

$S =]-2 ; +\infty[$

c) $4 - 2(6 - 2x) > 1 - (-14x + 9)$

$4 - 12 + 4x > 1 + 14x - 9$

$-8 + 4x > -8 + 14x$

$-8 + 4x + 8 > -8 + 14x + 8$

$4x > 14x$

$4x - 14x > 4x - 14x$

$-10x > 0$

$x < \frac{0}{-10}$ car $-10 < 0$

$x < 0$

$S =]-\infty ; 0[$

d) $x + 1 \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$

$x - \frac{5}{3}x \leq \frac{4}{5} - 1$ $\qquad$ $\frac{4}{5} - 1 = \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

$\frac{-2x}{3} \leq -\frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{x}{1} - \frac{5}{3}x = \frac{3x}{3} - \frac{5}{3}$

$x \geq \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}$ car $-\frac{2}{3} < 0$

$x \geq \frac{1}{5} \times \frac{3}{2}$

$x \geq \frac{3}{10}$

$S = [\frac{3}{10} ; +\infty[$

e) $2x - 6 > 3 - (4 - 2x)$

$2x - 6 > 3 - 4 + 2x$

$2x - 6 > -1 + 2x$

$2x > -1 + 2x + 6$

$2x > 5 + 2x$

$2x - 2x > 5 + 2x - 2x$

$0 > 5$; Faux

Cette inéquation n'admet aucune solution

$S = \emptyset$ ensemble vide

f) $x < 2x - (x - 6)$

$x < 2x - x + 6$

$x < x + 6$

$x - x < x + 6 - x$

$0 < 6$

Vrai pour tout valeur de x

$S = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

g) $x^2 + 1 > (x + 2)^2$

$x^2 + 1 > x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 1 - x^2 > x^2 + 4x + 4 - x^2$

$1 > 4x + 4$

$4x + 4 < 1$

$4x + 4 - 4 < 1 - 4$

$4x < -3$

$x < \frac{-3}{4}$ car $4 > 0$

$S =]-\infty ; -\frac{3}{4}[$

Remarque importante : L'inéquation $A(x) \geq B(x)$ équivaut à : $A(x) - B(x) \geq 0$

Ne le perdez jamais de vue, on va s'en servir par la suite.

Exercice 7

↗ une journée

Pour louer une voiture deux formules sont disponibles :

Formule A : 30€ par jour de location plus 0,20€ par *km* parcouru.

Formule B : 50€ par jour plus 0,16€ par *km* parcouru.

Déterminer à partir de quelle distance parcourue la formule B est plus avantageuse pour vous.

Soit x la distance parcourue en km

$A(x)$ = Prix payé avec la formule A pour x km parcourus

$A(x) = 0,20x + 30$

Soit $B(x)$ le prix payé avec la formule B pour x km parcourus.

$B(x) = 0,16x + 50$

On veut que : $B(x) < A(x)$

$0,16x + 50 < 0,20x + 30$

$0,16x - 0,20x < 30 - 50$

$-0,04x < -20$

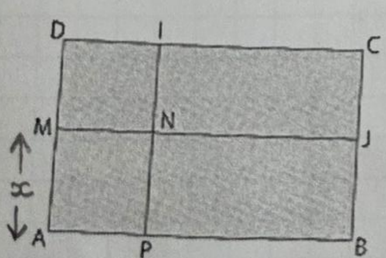
$x > \frac{-20}{-0,04}$ car $-0,04 < 0$

$x > 500$: $S =]500 ; +\infty[$

f(B) sera plus avantageuse que f(A) pour plus de 500 km parcourus.

Exercice 8

ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AD = 3 cm.
M est un point du segment [AD] On place alors les points P sur [AB] et N tel que AMNP soit un carré.
Le point I est l'intersection de (PN) et (CD) et le point J est celle de (BC) et (MN).



A quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que le périmètre de NICJ soit supérieur à 10 *cm* ?

Soit x la longueur AM :

$M \in [AD]$, et $AD = 3$ cm

Donc : $0 \leq x \leq 3$

But : $P(NiCJ) \geq 10$

$P(NiCJ) = 2 \times NJ + 2 \times JC$

avec $\begin{cases} NJ = 5 - x \\ JC = 3 - x \end{cases}$

$P(NiCJ) = 2 \times (5-x) + 2 \times (3-x)$

$P(NiCJ) = 10 - 2x + 6 - 2x = 16 - 4x$

$P(NiCJ) = -4x + 16$

$-4x + 16 \geq 10$

$-4x \geq -6$

$x \leq \frac{-6}{-4}$ car $-4 < 0$

$x \leq 1,5$

Or $x \geq 0$

Donc : $0 \leq x \leq 1,5$

$S = [0 ; 1,5]$. Le point M doit être placé à au maximum 1,5 cm du point A.

IV – Tableaux de signes et inéquations

Nous allons, à l'aide d'un tableau de signes, résoudre des inéquations un peu plus complexes, du type :

$(2x+1)(x+3)>0$ ou encore $\frac{x-1}{2x+5} \leq 0$.

Qu'est-ce qu'un tableau de signes ?

C'est un tableau qui résume les signes pris par une expression algébrique $A(x)$, selon les intervalles auxquels appartient x, avec les conventions suivantes : mettre un signe + pour les valeurs de x telles que $A(x) > 0$, mettre un signe − pour les valeurs de x telles que $A(x) < 0$, et enfin mettre des zéros sous les valeurs de x qui annulent l'expression $A(x)$.

Exemple

$x \in]-\infty ; +\infty[$

Soit $A(x)$ une expression algébrique, avec x appartenant à $\mathbb{R}$:

On suppose que :

- ✓ $A(x)$ est de signe positif lorsque x appartient à l'intervalle : $]1 ; +\infty[$.
- ✓ $A(x)$ est de signe négatif lorsque x appartient à l'intervalle : $]-\infty ; 1[$.
- ✓ $\boldsymbol{A(1) = 0}$.

On résume cela en construisant le tableau suivant, appelé tableau de signes de l'expression $A(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $A'(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 9

1) S'aider du tableau de signe donné ci-dessous pour répondre aux questions suivantes :

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		5		8	12		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		0	$-$	

a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 0$?

b) Sur quels intervalles a-t-on $f(x) > 0$?

c) Sur quels intervalles a-t-on $f(x) < 0$?

d) Quel est le signe de $f(8)$? Celui de $f(0)$?

2) On donne les tableaux de signes d'expressions algébriques $A(x)$ et $B(x)$ définies sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	

Donner, en justifiant, le tableau de signes de l'expression $A(x) \times B(x)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Pour $x = -4$; $x = \frac{1}{2}$

$x = 5$ et $x = 12$ on a : $f(x) = 0$

$f(-4) = 0$ $\quad$ $f(5) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = 0$ $\quad$ $f(12) = 0$

b) $f(x) > 0$: $f(x)$ doit être positif

$f(x) > 0$ Si : $x \in]-\infty ; -4[\cup]5 ; 12[$

c) $f(x) < 0$: $f(x)$ doit être négatif

$f(x) < 0$ Si : $x \in]-4 ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; 5[\cup$

$]12 ; +\infty[$

d) $f(8) > 0$; $f(0) < 0$

2)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $A(x) \times B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Règle des signes d'un produit

Exercice 10

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $(3x+6)(-2x+5) > 0$.

$\underbrace{(3x+6)}_{A(x}\underbrace{(-2x+5)}_{B(x)} > 0$

$A(x) = 3x + 6$

Signe de $A(x)$

$A(x) \geq 0$

$3x + 6 \geq 0$

$3x \geq -6$

$x \geq \frac{-6}{3}$

$x \geq -2$

$\boxed{\text{Si } x \geq -2}$, $A(x) \geq 0$

~~Donc~~ si $x \leq -2$,

$A(x) \leq 0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

$B(x) = -2x + 5$

Signe de $B(x)$

$\boxed{B(x) \geq 0}$ → positif

$-2x + 5 \geq 0$

$-2x \geq -5$

$x \leq \frac{-5}{-2}$ car $-2 < 0$

$x \leq \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	

Donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $A(x)\times B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : $(3x+6)(-2x+5)>0$ équivaut à dire (dernière ligne du tableau)

que : $-2<x<\frac{5}{2}$

$\mathcal{S} = \left]-2 ; \frac{5}{2}\right[$

Exercice 11

A l'aide d'un tableau de signes, résolvons l'inéquation suivante : $\frac{x+1}{2x+4} \geq 0$.

$(2x+4)$

$$\frac{x+1}{2x+4} \geq 0 \quad \times(2x+4)$$

$x+1 \cancel{\geq 0} \times(2x+4)$

archi faux car $2x+4$ n'est pas toujours positif

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

Solution : $A(x) = x+1$

$A(x) \leq 0 \Longleftrightarrow x+1 \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -1$

$B(x) = 2x+4$

$B(x) \geq 0$

$2x+4 \geq 0$

$2x \geq -4$

$x \geq \frac{-4}{2}$

$x \geq -2$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de $A(x) = x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $B(x) = 2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x+1}{2x+4}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

car $-2<0$

double barre signifiant : interdiction de faire la division lorsque $x=-2$

Conclusion :

$\frac{x+1}{2x+4} \geq 0$ équivaut à dire que : $x \in \underbrace{]-\infty;-2[}_{x<-2} \cup \underbrace{[-1;+\infty[}_{x\geq -1}$

$x<-2$ ou $x \geq -1$

$\mathcal{S} =]-\infty;-2[\cup [-1;+\infty[$

Exercice 11 (Bis)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$(-2x+7)(5x-4) \leq 0$

$A(x) = -2x+7$

$A(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -2x+7 \geq 0$

$A(x) \geq 0 \Longleftrightarrow -2x \geq -7$

$A(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{-7}{-2}$

$A(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$

$B(x) = 5x-4$

$B(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 5x-4 \geq 0$

$B(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 5x \geq 4$

$B(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{4}{5}$

$A(x)$ est positive ou nulle revient à dire que x est inférieur ou égal à $\frac{7}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
Signe de $A(x) = -2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $B(x) = 5x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $A(x) \times B(x) = (-2x+7)(5x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

$(-2x+7)(5x-4) \leq 0$ équivaut à dire que : $x \leq \frac{4}{5}$ ou $x \geq \frac{7}{2}$

$\mathcal{S} =]-\infty;\frac{4}{5}] \cup [\frac{7}{2};+\infty[$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{3}{x+2} \leq \frac{1}{-4x+1}$.

⚠ Pas de produit en croix avec les inégalités dont on ne connait pas le signe de ses nombres !

Étape 1 : On se ramène à l'un des membres nul.

$$\frac{3}{x+2} \quad \frac{-1}{-4x+1} \leqslant 0$$

Étape 2 : On transforme la précédente écriture pour arriver à un quotient de deux expressions

$$\frac{3(-4x+1)}{(x+2)(-4x+1)} - \frac{1(x+2)}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$$

$$\frac{3(-4x+1)-(x+2)}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$$

$$\frac{-12x+3-x-2}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$$

⚠ Ne pas développer le dénominateur car déjà écrit sous forme d'un produit !

Donc $\frac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$

$-13x+1 \geqslant 0$

$-13x \geqslant -1$

$x \leqslant \frac{-1}{-13}$

$x \leqslant \frac{1}{13}$

$x+2 \geqslant 0$

$x \geqslant -2$

$-4x+1 \geqslant 0$

$-4x \geqslant -1$

$x \leqslant \frac{-1}{-4}$

$x \leqslant \frac{1}{4}$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{13}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $-13x+1$		+	|	+	0	−	|	−	
Signe de $x+2$		−	0	+	|	+	|	+	
Signe de $-4x+1$		+	|	+	|	+	0	−	
Signe de $\frac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)}$		−	||	+	0	−	||	+	

Conclusion :

$\frac{-13x+1}{(x+2)(-4x+1)} \leqslant 0$ ⊖

équivaut à dire que :

$x \in \left]-\infty ; -2\right[\cup \left[\frac{1}{13} ; \frac{1}{4}\right[$

$\mathcal{S} = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left[\frac{1}{13} ; \frac{1}{4}\right[$

V – Valeurs absolues

Au collège, vous avez déjà entendu parler de la distance à 0 d'un nombre.

Définition

Soient x et a deux réels.

♡ On appelle distance entre les deux nombres x et a la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres.

Par exemple, la distance entre 1 et 2,5 est égale à $2,5 - 1 = 1,5$.

La distance entre −3 et 1 est égale à : $1 - (-3) = 4$

Si les deux nombres sont égaux, la distance entre ces deux nombres est égale à 0

Ainsi, la distance entre les réels x et a est égale à : $\begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ a - x & \text{si } x \leq a \end{cases}$

On adopte la notation : $|x-a|$ (lire ***valeur absolue de x − a***) pour désigner la ***distance entre les réels x et a.***

Exemple : Ecrire sans valeur absolue : $|\pi - 2|$ *puis* $|4-\pi|$.

Conséquences directes de la définition

Lorsque $a = 0$, la distance entre x et 0 est♥♥♥ $|x-0| = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ ♥♥♥

Ainsi, la distance entre x et 0 est égale à la valeur absolue de x.

Exemples

$|-2,6| = 2,6$; $|3,1| = 3,1$; $|0| = 0$

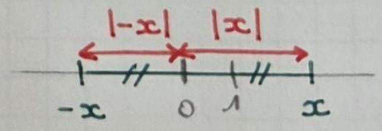
Pour tout réel x, $|x| \geq 0$.

Vu que la distance entre les réels x et a est la même que celle entre les réels a et x, on a :

$|x - a| = |a - x|$

En particulier, pour $a = 0$: $\underbrace{|x| = |-x|}$

2 nombres opposés (x et $-x$) ont la même valeur absolue



Exemple : $\pi \simeq 3,14$ à 10^{-2} près

$\pi > 2$ Donc $|\pi - 2| = \pi - 2$

$4 > \pi$, donc $|4 - \pi| = 4 - \pi$

$7 > \pi$

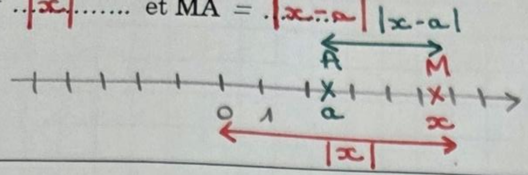
$|\pi - 7| = 7 - \pi$

Interprétation géométrique :

Sur une droite graduée d'origine O, soient M et A les points d'abscisses respectives x et a.

Alors : OM = $|x|$ et MA = $|x-a|$

Illustration :



Propriété

Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$

Pourquoi ?

Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$

Si $x \leq 0$, alors $\sqrt{x^2} = -x$, donc $\sqrt{x^2} = |x|$

Equations et valeurs absolues

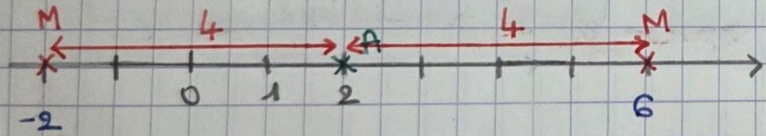
En interprétant la valeur absolue comme une distance, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$|x-2| = 4$; $|x+5| = 0,5$; $|x-4| = -1$.

$|x-2| = 4$

Soit M le point d'abscisse x

A le point d'abscisse 2



$|x-2| = 4$ équivaut à : MA = 4

Donc : $x = 2+4 = 6$ ou $x = 2-4 = -2$

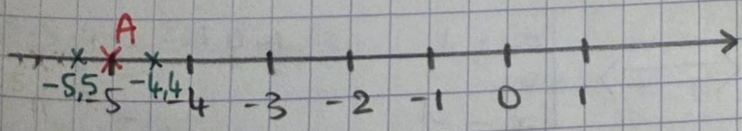
$\mathcal{S} = \{-2 ; 6\}$

$|x+5| = 0,5$

$|x-(-5)| = 0,5$

Soit M le point d'abscisse x

A le point d'abscisse -5



$|x-(-5)| = 0,5$ signifie que AM = 0,5

Donc $x = -5+0,5 = -4,5$ ou $x = -5-0,5 = -5,5$

$\mathcal{S} = \{-4,5 ; -5,5\}$

Propriété

1) Pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y|$ équivaut à $\overset{\text{égaux}}{x = y}$ ou $\overset{\text{opposé}}{x = -y}$

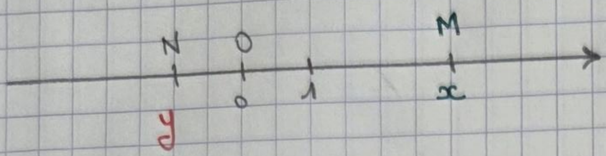
2) Pour tous réels a et r, l'équation : $|x - a| = r$ a pour ensemble de solution : $\begin{cases} \emptyset \text{ si } r < 0 \\ \{a\} \text{ si } r = 0 \\ \{a-r ; a+r\} \text{ si } r > 0 \end{cases}$

↳ inconnue x

Justification :

① Soit M le point d'abscisse x

N le point d'abscisse y

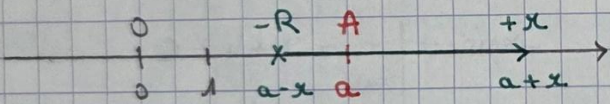


$|x| = OM$

$|y| = ON$

$|x|$ et $|y| \iff OM = ON$

$\iff \left| \begin{array}{l} M = N \text{ (points confondus } \rightarrow x = y) \\ \text{ou} \\ M \text{ et } N \text{ symétriques par rapport à } O \end{array} \right.$



Donc $x = a + r$ ou $x = a + r$ ou $x = a - r$: $S = \{a - r ; a + r\}$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x : $|x| = |2x - 1|$ puis $|x + 2| = 7{,}1$.

$|x| = |2x - 1| \overset{\text{prop 1}}{\iff} \left| \begin{array}{l} x = 2x - 1 \text{ (égaux)} \\ \text{ou} \\ x = -(2x - 1) \text{ (opposés)} \end{array} \right.$

$|x| = |2x + 1| \iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -2x + 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x + 2x = 1 \end{array} \right.$

$\iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{3} \end{array} \right.$

$|x + 2| = 7{,}1$

$|x - (-2)| = 7{,}1 \overset{\text{prop 2 avec } \begin{cases} a = -2 \\ r = 7{,}1 \end{cases}}{\iff} \left| \begin{array}{l} x = -2 - 7{,}1 = -9{,}1 \\ \text{ou} \\ x = -2 + 7{,}1 = 5{,}1 \end{array} \right.$

$S = \{-9{,}1 ; 5{,}1\}$

Propriété

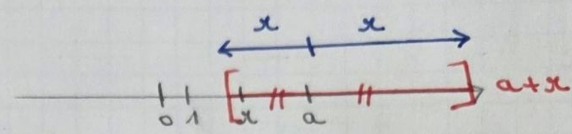
Soient a et r deux réels avec $r > 0$.

L'ensemble des réels x tels que : $|x-a| \leq r$ est exactement l'intervalle $[a-r ; a+r]$

Donc $|x-a| \leq r$ équivaut à dire que $x \in [a-r ; a+r]$ ou encore à $a-r \leq x \leq a+r$

Justification : Soit M le point d'abscisse x

A le ——— a

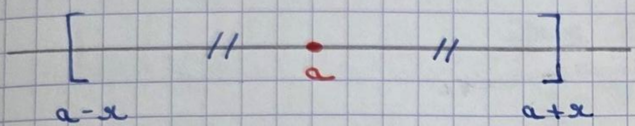


Ainsi : $|x-a| = MA$. Donc $|x-a| \leq r$ revient à dire que $MA \leq r$.

Donc $a-r \leq x \leq a+r$

$[a-r ; a+r]$: intervalle fermée centrée en a :

$c = \frac{a - \cancel{r} + a + \cancel{r}}{2} = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = a$



11

Remarque : ♥♥ L'intervalle $[a-r ; a+r]$ est appelé intervalle fermé centré en a♥♥.

Exercice 14

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en interprétant chaque valeur absolue comme une distance :

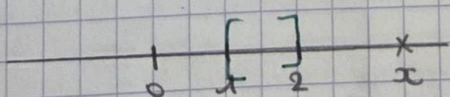
$|x-2| \leq 1$; $|x+1| < 4$; $|x-5| \geq 3$; $|x| \leq 10^{-1}$; $|x-7| > -2$.

2) Traduire à l'aide de valeurs absolues : $x \in]-5; 9[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x \leqslant |x|$.

1) $|x-2| \leqslant 1$

a) M a pour abscisse x :



A a pour abscisse 2 :

$|x-2| = AH$

Donc $|x-2| \leqslant 1$ équivaut à dire que $\underbrace{AH \leqslant 1}_{\text{la distance AH vaut au maximum 1}}$

Donc $x \in [-1 ; 3]$

$\mathcal{S} = \{-1 ; 3\}$

c) $|x-7| > -2$

$|x-7|$ représente une distance donc pour tout réel x $|x-7| \geqslant 0$

Or $0 > -2$, donc $|x-7| > -2$

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

d) $|x| \leqslant 10^{-1}$

Soit M d'abscisse x :

$|x| = OM$

$|x| \leqslant 10^{-1} \Longleftrightarrow OM \leqslant 10^{-1}$ $(10^{-1} = 0,1)$

$\Longleftrightarrow OM \leqslant 0,1$

$\Longleftrightarrow -0,1 \leqslant x \leqslant 0,1$

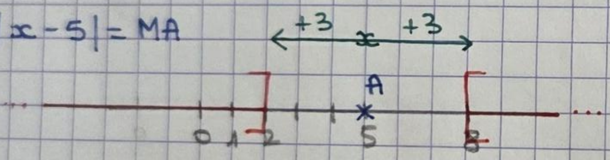
$\mathcal{S} = [-0,1 ; 0,1]$

$|x-5| \geqslant 3$

Soit M le point ayant pour abscisse x

A ———— 5

$|x-5| = MA$



$|x-5| \geqslant 3 \Longleftrightarrow MA \geqslant 3 \Longleftrightarrow x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 8$

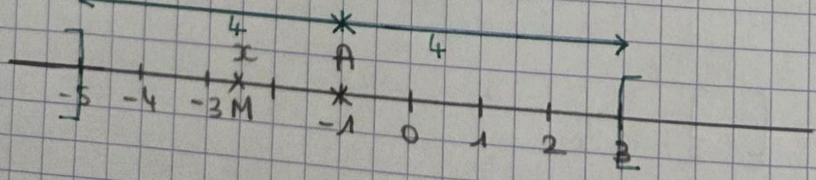
$\mathcal{S} =]-\infty ; 2] \cup [8 ; +\infty[$

$|x+1| < 4$

$|x-(-1)| < 4$

Soit M le point d'abscisse x et A celui d'abscisse -1

Ainsi, $|x-(-1)| = MA$

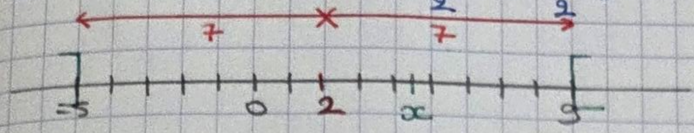


Donc $|x-(-1)| < 4 \Longleftrightarrow MA < 4 \Longleftrightarrow -5 < x < 3$

$\mathcal{S} =]-5 ; 3[$

2) $x \in]-5;9[$

Centre de $]-5;9[$: $\frac{-5+9}{2} = \frac{4}{2} = 2$



$x \in]-5;9[\iff |x-2| < 7$

3) $x \leqslant |x|$

Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$

Donc $x \leqslant |x|$ s'écrit : $x \leqslant x$: Vrai

Donc tous les réels positifs ou nul sont solutions

Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$

Donc l'inéquation : $x \leqslant |x|$

s'écrit : $x \leqslant -x$

$x + x \leqslant 0$

$2x \leqslant 0$

$x \leqslant 0$

Donc tous les nombres négatifs ou nuls sont solution.

$\mathcal{S} = \mathbb{R}$