Chapitre III Repérage dans le plan, géométrie repérée, compléments de géométrie

I – Repérage dans le plan

Définition

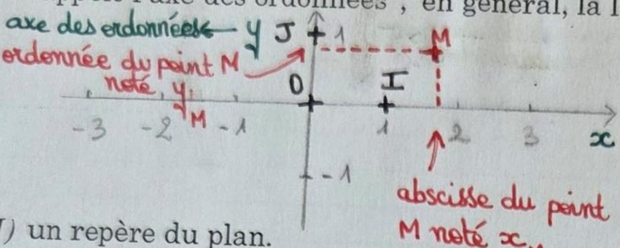
On appelle ***repère du plan***, tout ensemble formé par trois points non alignés, appelé un triplet.
On notera $(O\,;\,I\,;\,J)$ un tel triplet formé par les trois points O, I et J non alignés.

O est appelée l'origine du repère, c'est l'intersection des deux axes du repère.

L'axe (OI) est appelé l'axe des abscisses ; en général, la lettre x désigne l'abscisse.

L'axe (OJ) est appelé l'axe des ordonnées ; en général, la lettre y désigne l'ordonnée.

Illustration :



I : point unité de l'axe des abscisses
J : point unité de l'axe des ordonnées

Remarque

Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère du plan.

Tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x\,;\,y)$ de nombres.
x est appelé l'abscisse du point M, et y est appelé l'ordonnée du point M.

On notera : $M(x\,;\,y)$ pour dire que le point M a pour abscisse x et pour ordonnée y.

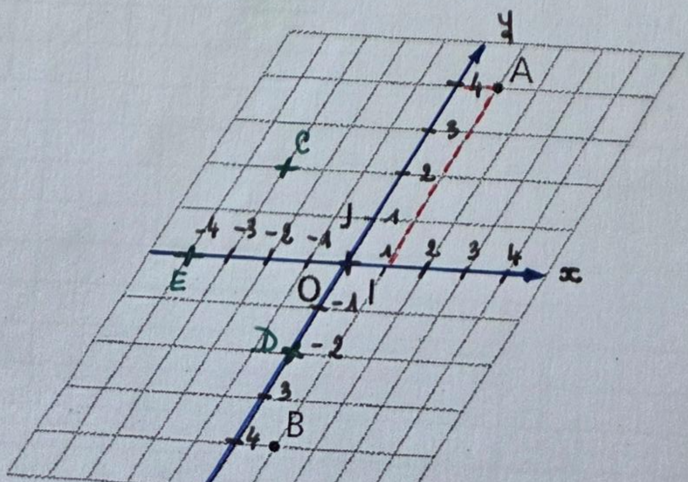
Attention, l'ordre dans les coordonnées est crucial : d'abord l'abscisse, ensuite l'ordonnée !!

Par exemple $M(2\ ;\ 3)$ n'est pas le même point que $N(3\ ;\ 2)$!!
abscisse ordonné

Dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, le point O a pour coordonnées $O(0\,;\,0)$, le point I a pour coordonnées $I(1\,;\,0)$ et le point J a pour coordonnées $J(0\,;\,1)$.

Exemple de repère quelconque (O ; I ; J)

Dans le repère ci-dessous (O ; I ; J), lire les coordonnées des points A et B, puis placer les point C(– 3 ; 2), D(0 ; -2) et E(– 4 ; 0)



A(1;4)
B(1;-4)

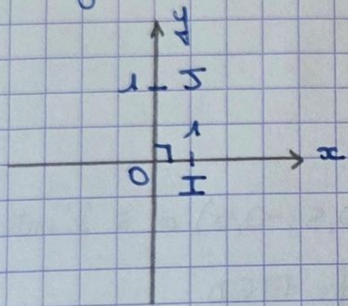
Définition Un repère est dit *orthogonal* lorsque ses ***axes sont perpendiculaires***.

Un repère est dit ***orthonormé*** lorsque ses ***axes sont perpendiculaires*** $\boxed{\text{ET}}$ qu'il y a la ***même unité pour graduer chacun des deux axes***.

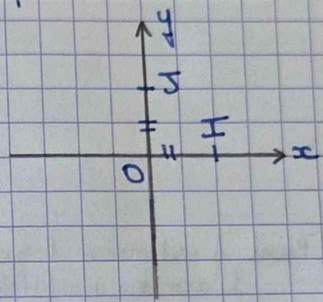
Au lycée, on est très souvent placé dans des repères orthonormés.

Illustration graphique :

Repère orthogonal (O ; I ; J)



Repère orthonormé

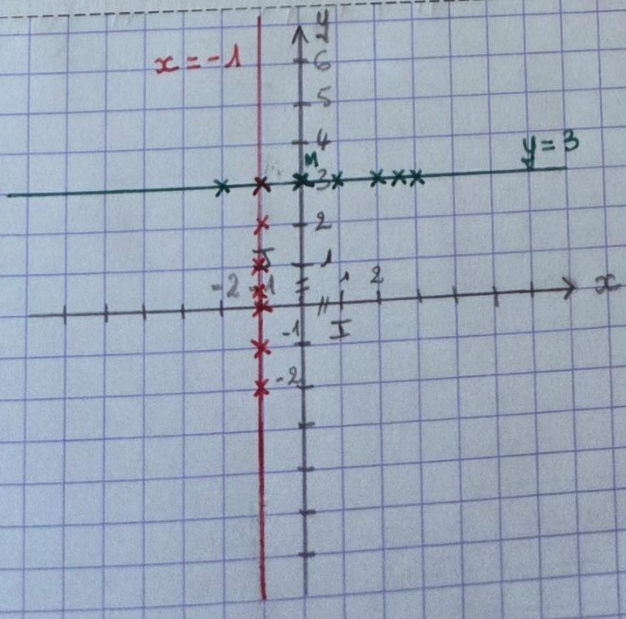


Exemple

a) Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), construire l'ensemble des points du plan qui ont pour ordonnée le nombre 3.

b) Dans ce même repère, construire avec une autre couleur l'ensemble des points du plan qui ont pour abscisse le nombre -1.

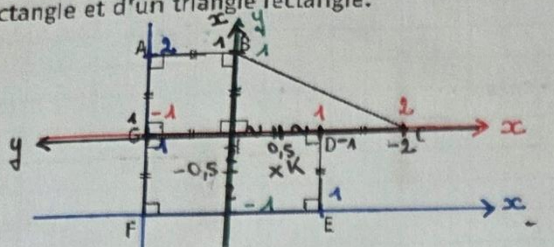
a)



M(0 ; 3)

Exercice 1

La figure ci-dessous est composée d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle.



1. Donner les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère (H, D, B).
2. Le point K a pour coordonnées (0,5 ; −0,5) dans ce repère.
Est-il dans le carré, le rectangle ou bien le triangle ?
3. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (F, E, G).
4. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (H, B, G).

1) Repère : (H ; D ; B)

orthonormé — origine — point d'abscisse 1 sur l'axe des x = (HD) — Point d'ordonnée 1 sur l'axe des y = (HB)

A (-1 ; 1) E (1 ; -1)

B (0 ; 1) F (-1 ; -1)

C (2 ; 0) G (-1 ; 0)

D (1 ; 0) H (0 ; 0)

2) K (0,5 ; -0,5) est à l'intérieur du rectangle EFGD.

3) $\underbrace{\text{Repère}}_{\text{orthogonal}}$ (F ; E ; G)

A (0 ; 2) E (1 ; 0)

B (0,5 ; 2) F (0 ; 0)

C (1,5 ; 1) G (0 ; 1)

D (1 ; 1) H (0,5 ; 1)

4) Repère (H ; B ; G)

A (1 ; 1) E (-1 ; -1)

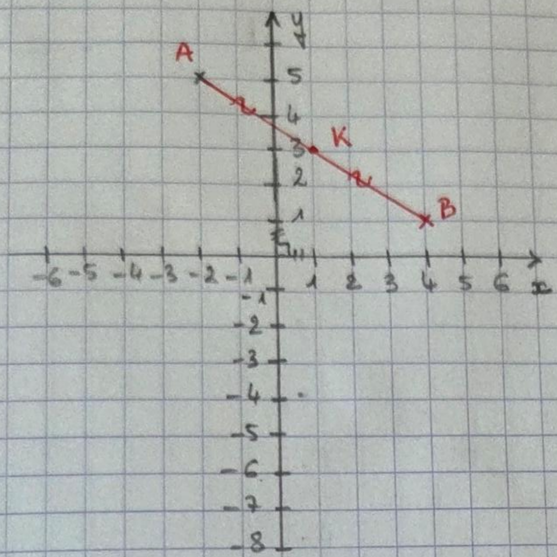
B (1 ; 0) F (-1 ; 1)

C (0 ; -2) G (0 ; 1)

D (0 ; -1) H (0 ; 0)

II – Géométrie analytique

Activité : soit (O, I, J) un repère du plan, A (−2 ; 5) et B (4 ; 1) et K le milieu du segment [AB].
Faire une figure, puis lire graphiquement les coordonnées du milieu de [AB].
Comment les coordonnées du point K se déduisent-elles de celles des points A et B ?



Graphiquement : K(1 ; 3)

$\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Il semblerait que : $x_K = \frac{-2+4}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$

$y_K = \frac{5+1}{2} = \frac{y_A + x_A}{2}$

Propriété 1 ***(Calcul des coordonnées du milieu d'un segment)***

Soit* (O ; I ; J) *un repère du plan.

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points dans ce repère.

Le milieu *K* du segment [AB] a pour coordonnées *K*(x_K ; y_K) avec :

♥♥ $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ ♥♥

On justifiera ces relations lors du chapitre sur les vecteurs.

Avant de commencer les exercices suivants, voici quelques rappels sur les quadrilatères.

Application :

Soit C $(2 ; -4)$ et D $(6 ; 14)$

M est le milieu de [CD]

Calculer les coordonnées de M.

M est le milieu de [CD]

Donc $M(x_M ; y_M)$ avec $x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2}$

$x_M = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2}$

$y_M = \dfrac{-4+14}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

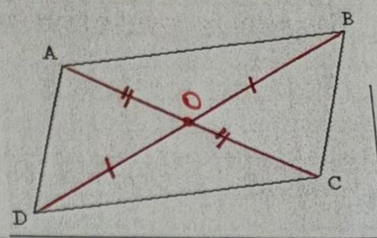
M(4 ; 5)

QUADRILATERES PARTICULIERS

Parallélogramme

1) Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont deux à deux parallèles.

2) Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu



Ces deux règles vous donnent des moyens pour justifier qu'un quadrilatère et un parallélogramme.

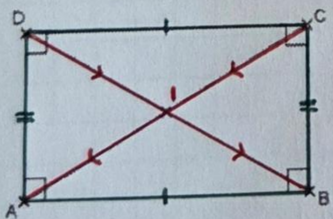
Par exemple, pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffira d'expliquer pourquoi ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Remarques : un parallélogramme a donc ses côtés opposés de même longueur, par-contre, les diagonales d'un parallélogramme n'ont pas nécessairement la même longueur.

Point de logique : en mathématiques si deux affirmations ont la même valeur de vérité (c'est-à-dire vraies toutes les deux ou fausses toutes les deux), il en est de même pour leurs négations.

Donc en prenant les négations du point 2) de l'encadré ci-dessus :
Un quadrilatère n'est pas un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu.
Ceci donne rapidement un moyen de prouver qu'un quadrilatère n'est pas un parallélogramme en justifiant que ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu !

Rectangle

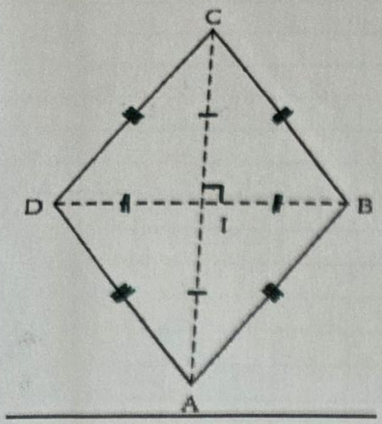


1) Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si tous ses angles sont droits.

2) Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

Pour justifier qu'un quadrilatère est rectangle, il suffira par exemple de justifier que c'est un parallélogramme ayant un angle droit, ou encore, un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur.

Losange

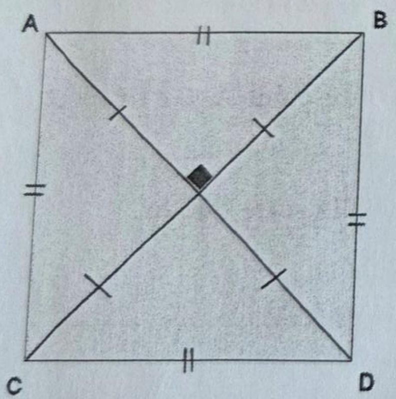


1) Un quadrilatère est un losange si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur.

2) Un quadrilatère est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Pour justifier qu'un quadrilatère est losange, il suffira par exemple de justifier que c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ou encore, un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.

Carré



1) Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses 4 côtés sont de même longueur et s'il a 4 angles droits.

2) Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Pour justifier qu'un quadrilatère est carré, il suffira par exemple de justifier que c'est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ou encore un losange ayant ses diagonales de même longueur.

*Ces propriétés qui **caractérisent** ces quadrilatères fonctionnent dans les deux sens (on parle de double implication en mathématiques) :*

Si je sais qu'un quadrilatère est un carré, alors j'ai le droit de dire que ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur.

Réciproquement, si je sais qu'un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur, alors il est vrai d'affirmer que ce quadrilatère est un carré.

✂---

<u>*Exemple*</u>

orthonormé

Soit (O ; I ; J) un repère du plan.

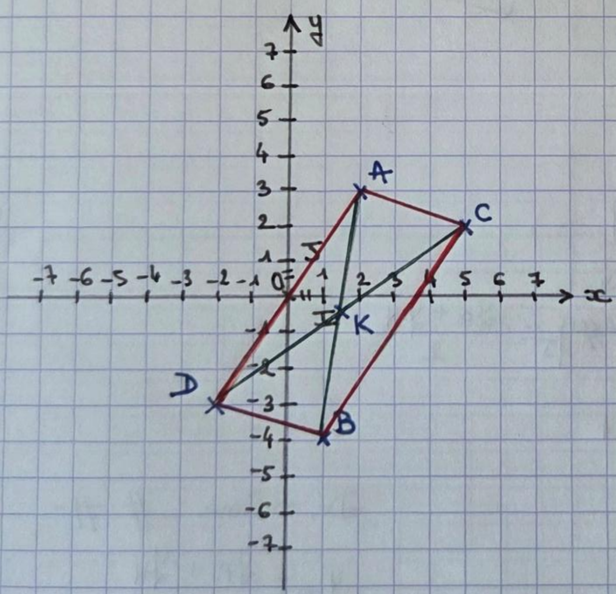
a) Placer les points A (2 ; 3) et B(1 ; -4).

b) Déterminer les coordonnées du point K, sachant que K étant le milieu de [AB].

c) Soit C (5 ; 2) et D (-2 ; -3). Déterminer les coordonnées du milieu du segment [CD].

d) Qu'en déduisez-vous concernant le quadrilatère ACBD ?

✂---



b) $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+(-4)}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

Donc $K(1{,}5 ; -0{,}5)$

c) Soit M le milieu du segment [CD]

$M(x_M ; y_M)$

avec $x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2}$

$x_M = \dfrac{5+(-2)}{2}$ $y_M = \dfrac{2+(-3)}{2}$

$x_M = \dfrac{3}{2}$ $y_M = -\dfrac{1}{2}$

$x_M = 1{,}5$ $y_M = 0{,}5$

Donc $M(1{,}5 ; -0{,}5)$

D'après les questions b) et c) :

K et M ont les mêmes coordonnées donc ces deux points sont confondus.

Ainsi K est à la fois le milieu du segment [AB] et du segment [CD].

Or [AB] et [CD] sont des diagonales du quadrilatère ABCD.

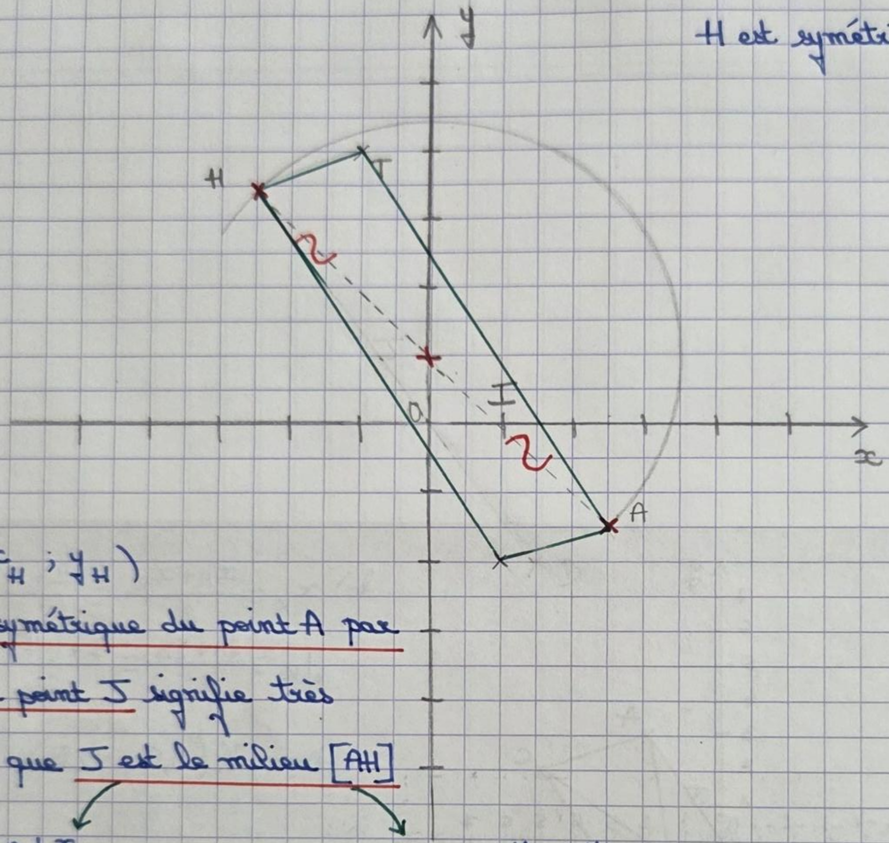
Donc ABCD est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 2

Soit (O ; I ; J) un repère du plan, et $A\,(2{,}5\ ;\ -1{,}5)$

a) Déterminer les coordonnées du point H, sachant que H est le symétrique du point A par rapport au point J.

b) Soit T (-1 ; 4). Déterminer, en justifiant, les coordonnées du point B de telle sorte que le quadrilatère ABHT soit un parallélogramme.



H est symétrique du point A par au point J

a) Soit $H\,(x_H\ ;\ y_H)$

H est le symétrique du point A par rapport au point J signifie très exactement que J est le milieu [AH]

Donc # $x_J = \dfrac{x_A + x_H}{2}$ et ## $y_J = \dfrac{y_A + y_H}{2}$

Or J(0;1), donc $x_J = 0$ et $y_J = 1$

Par suite, on a #: $0 = \dfrac{2{,}5 + x_H}{2}$

$0 \times 2 = 2{,}5 + x_H$

Donc $x_H = 0 - 2{,}5 = -2{,}5$

De même : ##

$y_J = \dfrac{y_A + y_H}{2}$

$1 = \dfrac{-1{,}5 + y_H}{2}$

$1 \times 2 = -1{,}5 + y_H$

$2 = -1{,}5 + y_H$

Donc $y_H = 2 + 1{,}5 = 3{,}5$

Donc H(-2,5 ; 3,5)

b) On cherche les coordonnées du point B de telle sorte que le quadrilatère ABHT soit un parallélogramme.

Soit $B\,(x_B\ ;\ y_B)$

ABHT est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [AH] et TB se coupent en leur milieu.

Or q.a) : J est le milieu de [AH]

Donc J est le milieu de [TB] → (*)

(*) permet de dire que : # $x_J = \frac{x_T + x_B}{2}$ et ## $y_J = \frac{y_T + y_B}{2}$

$0 = \frac{-1 + x_B}{2}$

$0 \times 2 = -1 + x_B$

$x_B = 0 + 1 = 1$

$1 = \frac{4 + y_B}{2}$

$1 \times 2 = 4\ y_B$

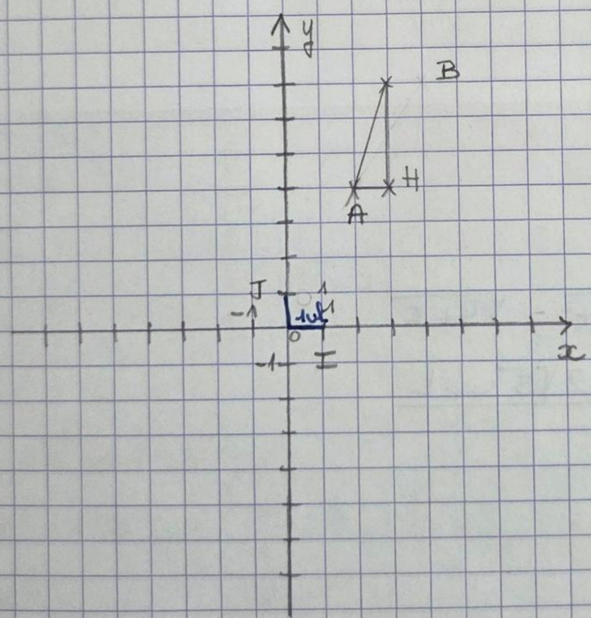
$y_B = 2 - 4 = -2$

$B = (1 ; -2)$

Activité

Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé, et A (2 ; 4) et B (3 ; 7).

Trouver une méthode pour déterminer la longueur AB.



Soit H(3 ; 4) : le triangle AHB est donc rectangle en H avec AH = 1 et HB = 3

Donc d'après le théorème de Pythagore de Samos :

$\underbrace{AB^2 = AH^2 + HB^2}_{\text{la relation des carrés}}$

Donc $AB^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

Or $AB > 0$, donc $AB = \sqrt{10}$ u.l.

unité de longueur (u.l.)

<u>Propriété 2</u> ***(Calcul de la distance entre deux points dans un repère orthonormé)***

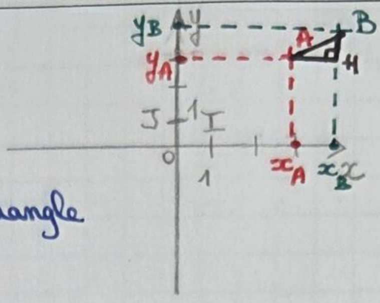
Soit (O ; I ; J) un repère ORHONORME du plan.

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points dans ce repère.

La distance entre les points A et B est donnée par :

♥♥♥♥ **AB** $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\left(\text{différence des abscisses}\right)^2 + \left(\text{différence des ordonnées}\right)^2}$ ♥♥♥♥

<u>Essayons de comprendre et de justifier cette relation :</u>



Soit H(x_B ; y_A)

AHB est un triangle rectangle en H

On applique le théorème de Pythagore à ce triangle

$AB^2 = AH^2 + HB^2$ avec : $AH^2 = (x_B - x_A)^2$

$HB^2 = (y_B - y_A)^2$

D'où : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$,

donc comme AB est positive

donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

<u>Exemple</u>

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 3) et B (4 ; 7).

Déterminer la valeur exacte de la longueur AB, puis une valeur approchée au centième près.

A(2 ; 3) ; B(4 ; 7)

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16}$

$AB = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \underline{2\sqrt{5} \text{ u.l.}}$

$\underline{AB \simeq 4{,}47 \text{ u.l.}}$

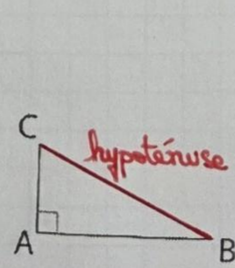
valeur approchée au centième près

Voici deux rappels importants : ***le théorème de Pythagore*** ainsi que ***sa réciproque*** :

Théorème de Pythagore

relation des carrés

- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.
- **Réciproque :** Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.



Le théorème de Pythagore sert donc ***exclusivement à*** calculer une longueur à condition d'être dans un triangle rectangle (et de connaître 2 des longueurs des côtés).

La réciproque du théorème de Pythagore sert ***exclusivement*** à prouver qu'un triangle est rectangle (Il est nécessaire de connaître la longueur des 3 côtés de ce triangle).

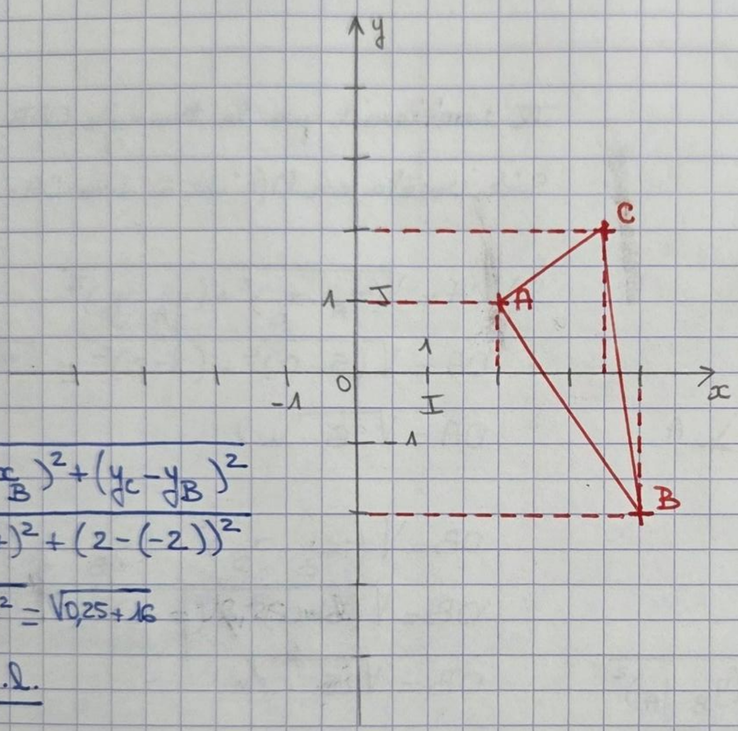
Exercice 3

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 1) ; B (4 ; -2) et C ($\frac{7}{2}$; 2)

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le triangle ABC ?

b) A l'aide d'une démonstration, valider la $\underbrace{\text{conjecture}}_{\text{constat légitime}}$ effectuée.

Remarque : Dans les exercices, on pourra parfois, si besoin est, calculer le carré des distances pour simplifier les écritures.



Conjecture : Il semblerait que le triangle ABC soit rectangle en A.

b) Cherchons les trois longueurs AB, AC et BC :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-1)^2}$

$AB = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9}$

$AB = \sqrt{13}$ u.l.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$AC = \sqrt{(3{,}5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 1^2}$

$AC = \sqrt{2{,}25+1}$

$AC = \sqrt{3{,}25}$ u.l.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$BC = \sqrt{(3{,}5-4)^2 + (2-(-2))^2}$

$BC = \sqrt{(-0{,}5)^2 + 4^2} = \sqrt{0{,}25+16}$

$BC = \sqrt{16{,}25}$ u.l.

D'une part : $BC^2 = \sqrt{16{,}25}^2 = 16{,}25$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{3{,}25}^2 = 13 + 3{,}25 = 16{,}25$

Ainsi : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en A.

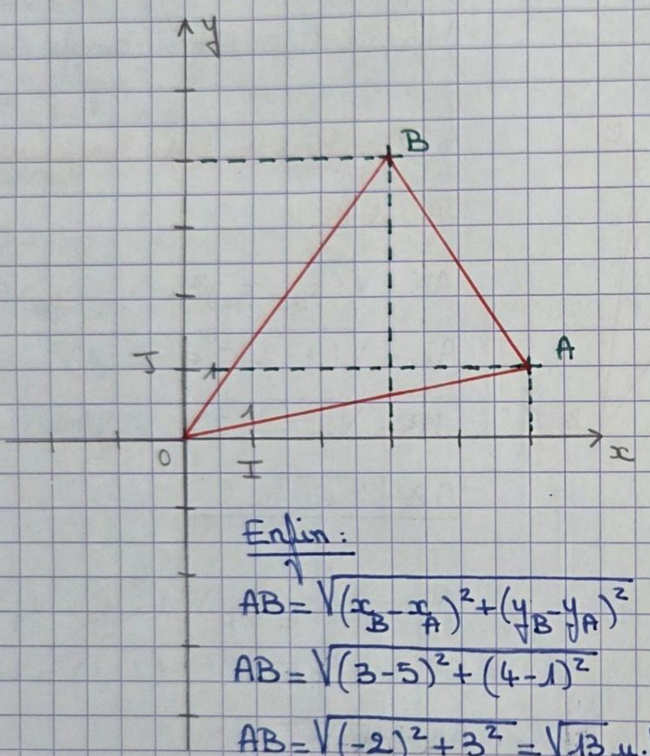
Exercice 4

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (5 ; 1) ; B (3 ; 4).

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on légitimement émettre concernant la nature du triangle OAB ?

b) Le triangle OAB est-il isocèle ? Justifier.

c) Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice ?



Il semblerait que le triangle OAB soit isocèle en O (c'est à dire OA = OB)

b) $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$

$OA = \sqrt{(5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{25+1}$

$OA = \sqrt{26}$ u.l.

$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2}$

$OB = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16}$

$OB = \sqrt{25}$

$OB = 5$ u.l

Or $\sqrt{26} \neq 5$, donc $OA \neq OB$, donc OAB n'est pas isocèle en O.

Enfin :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2}$

$AB = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ u.l.

Donc OAB n'est pas un triangle isocèle

(3 côtés de longueur différente.

c) La conjecture effectuée à la question a) est fausse.

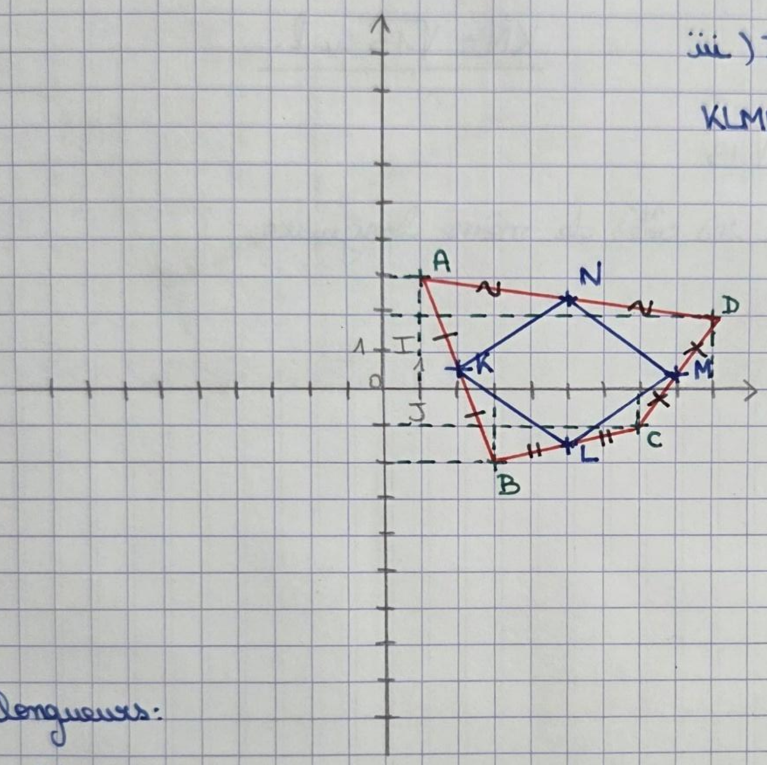
Exercice 5

i) Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points : A(1 ; 3), B(3 ; -2), C(7 ; -1) et D(9 ; 2).
Soit K le milieu de [AB], L le milieu de [BC], M le milieu de [CD], N le milieu de [AD].

ii) Compléter la figure.

iii) Quel constat faites-vous concernant le quadrilatère KLMN ?

iv) A l'aide d'une démonstration, déterminer la nature du quadrilatère KLMN.



iii) Il semblerait que le quadrilatère KLMN soit losange.

iv) Calculons les longueurs : KL, LM, MN et NK.

Pour ce faire, il est d'abord nécessaire de calculer les coordonnées des points K, L, M et N.

K est le milieu de [AB], donc : $K\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$K\left(\frac{1+3}{2};\frac{3+(-2)}{2}\right)$

$K(2;0,5)$

L est le milieu de [BC], donc : $L\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$

$L\left(\frac{3+7}{2};\frac{-2+(-1)}{2}\right)$

$L(5;-1,5)$

De même : M est le milieu de [CD], donc : $M\left(\frac{7+9}{2};\frac{-1+2}{2}\right)$

$M(8;0,5)$

Enfin par le même raisonnement : $N(5;2,5)$

$$KL = \sqrt{(x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2}$$
$$KL = \sqrt{(5-2)^2 + (-1,5-0,5)^2}$$
$$KL = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$
$$\underline{KL = \sqrt{13} \text{ u.l.}}$$

$$LM = \sqrt{(x_L - x_M)^2 + (y_L - y_M)^2}$$
$$LM = \sqrt{(5-8)^2 + (-1,5-0,5)^2}$$
$$LM = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$
$$\underline{LM = \sqrt{13} \text{ u.l.}}$$

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$
$$MN = \sqrt{(8-5)^2 + (0,5-2,5)^2}$$
$$MN = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$
$$\underline{MN = \sqrt{13} \text{ u.l}}$$

$$KN = \sqrt{(x_N - x_K)^2 + (y_N - y_K)^2}$$
$$KN = \sqrt{(5-2)^2 + (0,5-2,5)^2}$$
$$KN = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4}$$
$$\underline{KN = \sqrt{13} \text{ u.l.}}$$

Ainsi : $KL = LM = MN = NK = \sqrt{13}$

Donc le quadrilatère KLMN a ses côtés de même longueur.

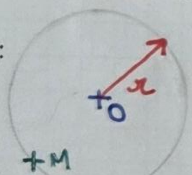
Donc KLMN est un losange.

III- Compléments de géométrie

Définition

Soit O un point du plan et r un réel positif. Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan situé à la même distance r du point O.

Illustration :



le cercle de centre O et de rayon r.

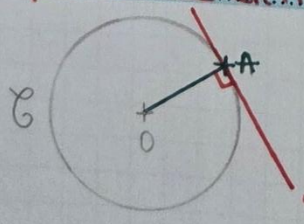
Conséquence : pour prouver qu'un point M appartient au cercle de centre O et de rayon r, il suffira d'établir que OM = r.

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon donné, et A un point appartenant à ce cercle.

On appelle ***TANGENTE au cercle*** $\mathcal{C}$ ***en le point A***, c'est la droite qui passe par le point et qui est perpendiculaire en A au rayon [OA]

Illustration :



La tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

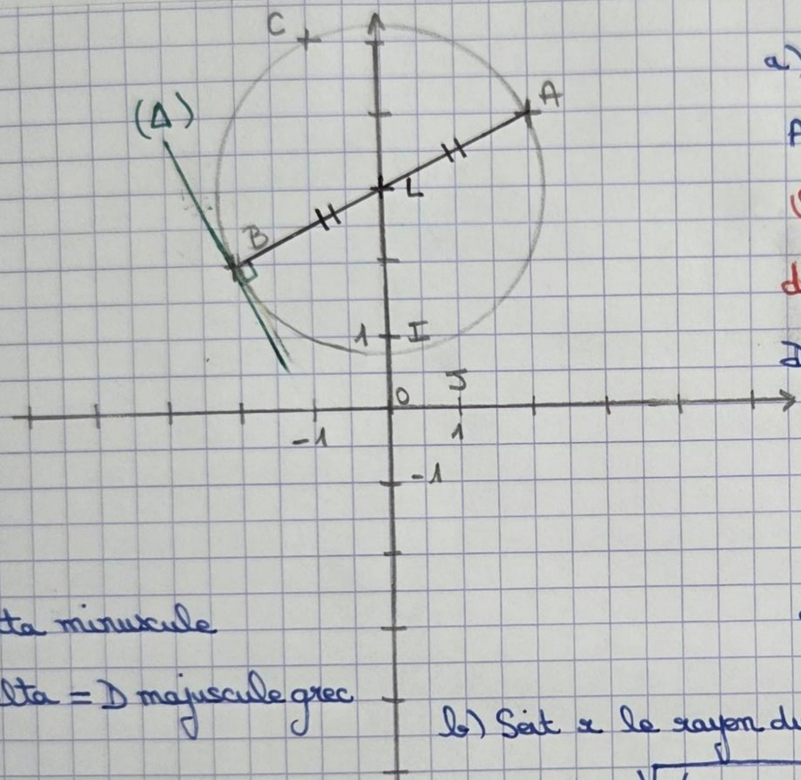
Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 4) ; B (-2 ; 2) et C (-1 ; 5).

a) Déterminer les coordonnées du point L, sachant que L est le centre du cercle de diamètre AB.

b) Démontrer que le point C appartient au cercle de diamètre AB.

c) Construire la droite (Δ), où (Δ) est la tangente au cercle de diamètre AB en le point B.



δ = Delta minuscule

Δ = Delta = D majuscule grec

a) L est le centre du cercle de diamètre AB.

Or le centre d'un cercle est le milieu de chacun de ses diamètres

Donc L est le milieu de AB.

$L\left(\frac{x_a + x_B}{2} ; \frac{y_a + y_B}{2}\right)$

$L\left(\frac{2+(-2)}{2} ; \frac{4+2}{2}\right)$

donc $\underline{L(0;3)}$

b) Soit r le rayon du cercle de diamètre AB

$r = LA = \sqrt{(x_A - x_L)^2 + (y_A - x_L)^2}$

$r = LA = \sqrt{(2-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1}$

$\underline{r = LA = \sqrt{5}\ u.l}$

<u>Calculons LC :</u>

$LC = \sqrt{(x_C - x_L)^2 + (y_C - y_L)^2}$

$LC = \sqrt{(-1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4}$

$\underline{LC = \sqrt{5}\ u.l}$

<u>Ainsi, LC = r donc C appartient au cercle de diamètre AB.</u>

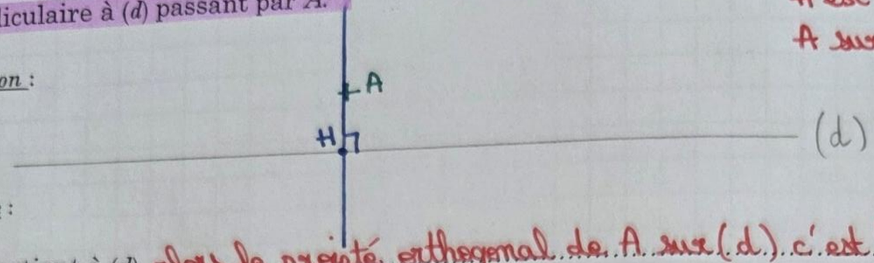
Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit (d) une droite, et A un point du plan.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A.

H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Illustration :



Remarque :

Si A appartient à (d), alors le projeté orthogonal de A sur (d) c'est le point A.

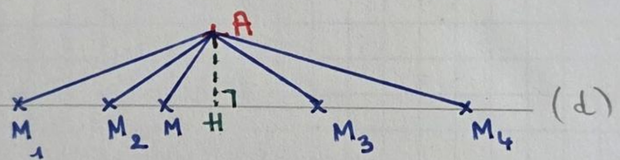
Si A n'appartient pas à (d) on a la caractérisation suivante :

H est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si
① (AH) est perpendiculaire à (d)
et
② H appartient à (d) ($\in$)

Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche de A, c'est-à-dire :
Pour tout point M appartenant à (d) et distinct (= différent) de H, on a : AM > AH.

Illustration et justification :

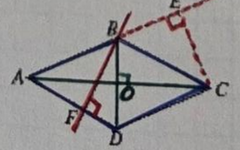


Le triangle AMH est rectangle en H par définition du projeté orthogonal.
Donc AM est l'hypoténuse de ce triangle, et à ce titre, AM est le plus grand des côtés de ce triangle.
Donc AM > AH

Définition : On appelle ***distance d'un point A à une droite (d)* la longueur *AH***, où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Exercice 7

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O. En utilisant le codage de la figure, compléter les phrases suivantes :



a) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) est F.

b) Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est E.

c) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est O.

d) La distance du point C à la droite (BD) est CO

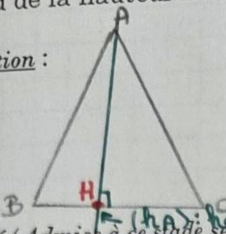
e) La distance du point B à la droite (AD) est BF

Définition

Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

Le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC est le point H projeté orthogonal de A sur (BC).

Illustration :



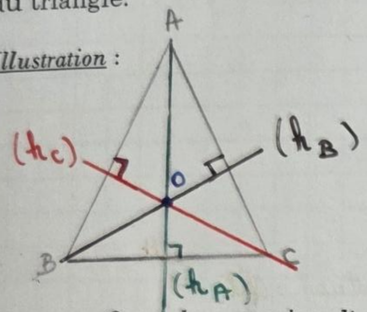
H le pied de la hauteur (h_A)

(h_A) : hauteur issue de A

Propriété *(Admise à ce stade sera démontrée en DM.)*

Quel que soit le triangle *ABC*, ses trois hauteurs se coupent en un même point appelé L'ORTHOCENTRE du triangle.

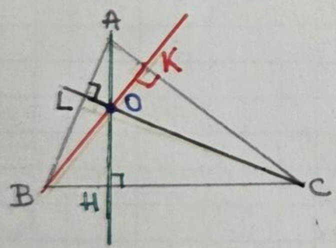
Illustration :



Remarque : Quand on exprime l'aire d'un triangle ABC en disant : $Aire = \frac{Base \times hauteur}{2}$, pour base, on a trois choix possibles : AB, AC ou BC.

Pour chacun de ces choix, la hauteur est alors la distance du dernier sommet restant à la droite portant la base choisie.

Illustration :



$$\text{Aire}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{AC \times BK}{2}$$

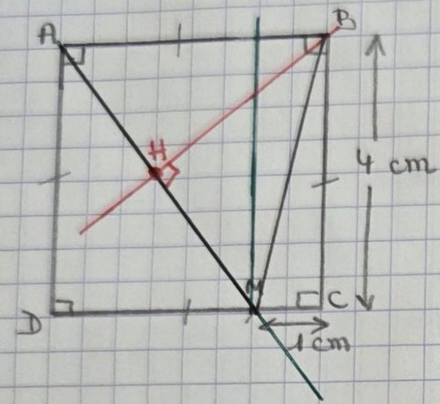
$$\text{Aire}(ABC) = \frac{AB \times CL}{2}$$

Exercice 8

Soit ABCD un carré de côté $4cm$ et M le point du segment [CD] tel que $MC = 1\ cm$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AM).

a) Faire une figure en vraie grandeur.

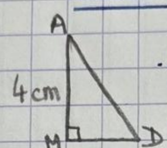
b) En calculant l'aire du triangle AMB de deux façons, déterminer la distance du point B à la droite (AM).



b) La distance du point B à la droite (AM) est BH.

Aire (AMB) $= \dfrac{AM \times BH}{2}$

Calcul de AM :



... Pythagore donne AM = 5 (culture : triangle 3;4;5)

$\boxed{\text{Donc Aire(AMB)} = \dfrac{5 \times BH}{2} \quad (*)}$

De plus :

$\mathcal{A}(AMB) = \dfrac{AB \times MK}{2}$ où K est le projeté orthogonal de M sur (AB).

MK = 4 cm car MKBC est un rectangle car il a 3 angles droits.

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}(AMB) = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8\ cm^2 \quad (**)}$

(*) et (**) font que : $\dfrac{5 \times BH}{2} = 8$

Donc : $5 \times BH = 2 \times 8 = 16$

$BH = \dfrac{16}{5} = 3{,}2\ cm$

Exercice 9

Nous allons démontrer que si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un des côtés du triangle est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

a) Construire un cercle de diamètre AB, et placer un point C sur ce cercle distinct de A et B.
b) Soit O le milieu de [AB], et D le symétrique du point C par rapport à O. Démontrer que le quadrilatère CADB est un rectangle.
c) En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.

Les diagonales du quadrilatère CADB sont [CD] et [AB].

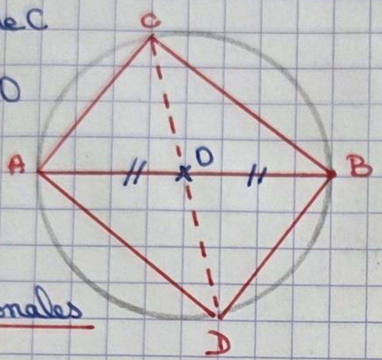
O est le milieu de [AB]

D est le symétrique de C

par rapport au point O

donc O est le milieu

de [CD].



Donc CADB a ses diagonales

qui se coupent en leur milieu O

Or AB = CD = diamètre du cercle

Donc CADB est un rectangle (car diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu)

c) CADB est un rectangle donc, à ce titre il a ses quatre angles droits

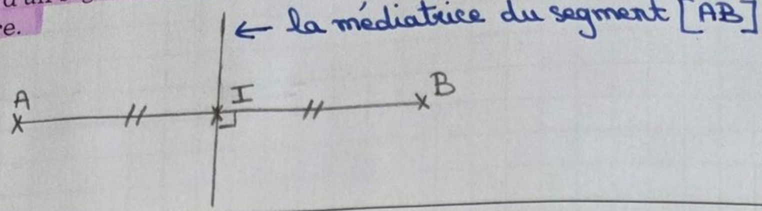
En particulier, $\widehat{ACB} = 90°$

Donc le triangle ABC est rectangle en C.

Définition

La médiatrice d'un segment [AB] est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

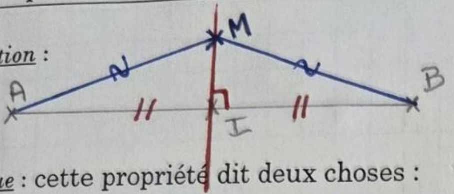
Illustration :



Propriété fondamentale (qui caractérise la médiatrice.)

Un point *M* appartient à la médiatrice d'un segment [*AB*] si et seulement si *MA*=*MB*, c'est-à-dire si et seulement si *M* est équidistant de *A* et *B*.

Illustration :

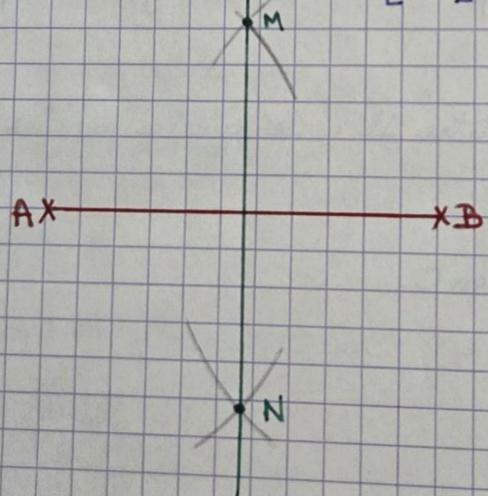


Remarque : cette propriété dit deux choses :

D'une part, si un point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors on peut dire que :
M est équidistant de A et de B c'est à dire : MA = MB

D'autre part, si un point M est équidistant des points A et B, c'est-à-dire si MA = MB, alors
M appartient à la médiatrice du segment [AB]

Application: Construire la médiatrice de [AB] à l'aide du compas et de la règle non graduée



Exercice 10

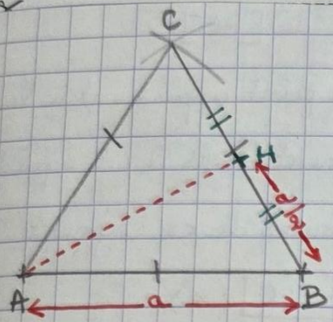
Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur a, où a est un réel strictement positif quelconque.

Soit H le milieu de [BC].

a) Montrer que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b) Exprimer la longueur AH en fonction de a.

c) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de a.



a) ABC est équilatéral, donc $AB = AC$, donc A est équidistant de B et C, donc par propriété A appartient à la médiatrice du segment [BC].
H est le milieu de [BC], donc $HB = HC$, donc H appartient à la médiatrice de [BC].
Par suite, (AH) est la médiatrice de [BC].
Donc par définition de la médiatrice : $\boxed{(AH) \perp (BC)}$ (*)
Enfin $\boxed{\text{H appartient à (BC) car H est le milieu de [BC]}}$ (**)
(*) et (**) font que H est le projeté hortogonal de A sur la droite (BC)

b) Dans le triangle AHC rectangle en H (d'après q.a), le théorème de Pythagore dit :

$AC^2 = AH^2 + HC^2$

$a^2 = AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$a^2 = AH^2 + \frac{a^2}{4}$

$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{1} - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

Or $AH > 0$, donc $AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{a^2}}{2}$

$\boxed{AH = \frac{\sqrt{3} \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a}$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

c) $\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times a^2}{2}$

$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times a^2$

$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2}$

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati.

Soit (d) la médiatrice du segment [AB] et (Δ) la médiatrice du segment [AC].

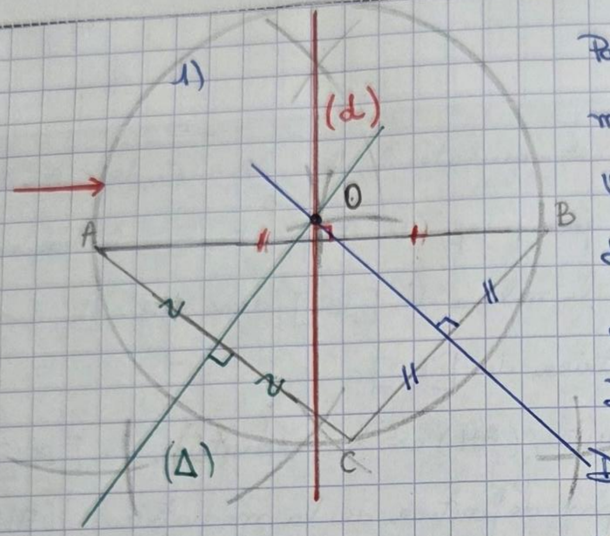
1) On note O le point d'intersection de (d) et (Δ). Démontrer que $OA = OB$ et $OA = OC$.

2) En déduire que O appartient également à la médiatrice du segment [AC].

3) Quelle propriété fondamentale concernant les trois médiatrices d'un triangle vous a-t-on ici fait démontrer ?

1)

le cercle circonscrit au triangle ABC.



Par définition : $O \in (d)$ où (d) est la médiatrice de [BC].

Or si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Donc $\boxed{OB = OC}$ (*)

De même : $O \in (\Delta)$ ou (Δ) est la médiatrice de [AB]

donc $\boxed{OA = OB}$ (**)

2) (*) et (**) font que : $\underbrace{OA = OC}$ $(= OB)$

Donc O est équidistant des points A et C.

Donc par propriété (réciproque), O appartient à la médiatrice de [AC]

3) Les trois médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point (ici O), elles sont concourantes en O.

Mieux : $OA = OB = OC$

O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

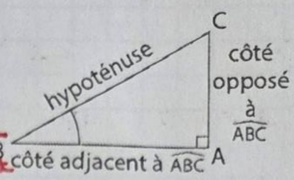
IV- Trigonométrie et triangle rectangle

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définitions (rappels)

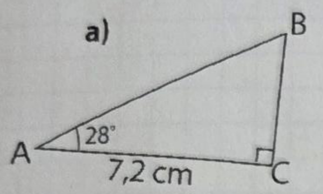
Dans un triangle ABC rectangle en A,

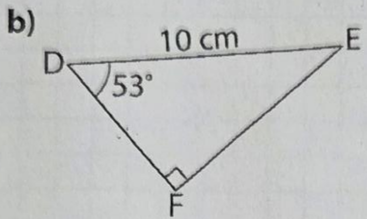
• $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ • $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$ • $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$



Exercice 12

Calculer la longueur AB dans la figure *a*), puis DF et EF dans la figure *b*). Arrondir au millimètre près.





a) Dans le triangle ABC rectangle en C :

$\cos(28) = \dfrac{AC}{AB}$

$\cos(28) = \dfrac{7,2}{AB}$

$AB \times \cos(28) = 7,2$

$AB = \dfrac{7,2}{\cos(28)}$

Avec la calculatrice réglée en mode degré

$\underline{AB \simeq 8,2 \text{ cm}}$

b) Dans le triangle DEF rectangle en F

$\cos(53) = \dfrac{DF}{DE}$

$\cos(53) = \dfrac{DF}{10}$

Donc $DF = 10 \times \cos(53)$

$\underline{DF \simeq 6 \text{ cm}}$

$\sin(53) = \dfrac{EF}{DE}$

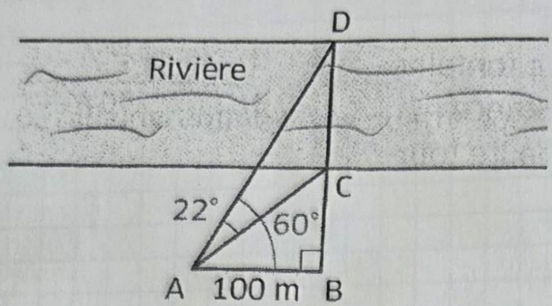
$\sin(53) \quad \dfrac{EF}{10}$

$EF = 10 \times \sin(53)$

$\underline{EF \simeq 8 \text{ cm}}$

Exercice 13

En utilisant les informations données sur la figure, calculer la largeur DC de la rivière. arrondie au m.



Dans le triangle ABD rectangle en B.

$\tan(\widehat{BAD}) = \frac{BD}{AB}$

$\tan(60) = \frac{BD}{100}$

$\underline{BD = \tan(60) \times 100}$

Dans le triangle ABC rectangle en B

$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AB}$

$\tan(38) = \frac{BC}{100}$

Donc $\underline{BC = \tan(38) \times 100}$

Or $CD = BD - BC$

$CD = 100 \times \tan(60) - 100 \times \tan(38) = 100 \times (\tan(60) - \tan(3$

$\underline{CD \simeq 95\ m}$

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

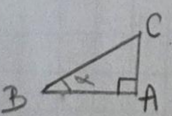
① • $0 < \cos(\alpha) < 1$ ② • $0 < \sin(\alpha) < 1$ ③ • $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

↓ notation qui signifie : $(\cos(\alpha))^2$

④ $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

α : alpha
β : bêta
γ : gamma

Preuve :



① $\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$ Or $\underbrace{AB > 0}_{\text{est positif}}$; $BC > 0$, donc $\frac{AB}{BC} > 1$

Enfin, $BC > AB$ (hypoténuse > côté angle droit)

Exercice 14

α est la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

Sachant que $\cos(\alpha) = 0{,}7$, déterminer la valeur exacte de : $\sin(\alpha)$ puis $\tan(\alpha)$.

Preuve :

Donc $\frac{AB}{BC} < 1$

Donc : $0 < \cos(\alpha) < 1$

② Exactement pareil

③ $\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC}$; $\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC}$

Donc $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$ (d'après le théorème de Pythagore → appliqué au triangle ABC rectangle en A)
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Ainsi : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

④ $\tan(\alpha) = \frac{AC}{AB}$

et $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{\cancel{BC}} \times \frac{\cancel{BC}}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan(\alpha)$

Donc $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

On sait que : $\underbrace{(\cos(\alpha))^2} + (\sin(\alpha))^2 = 1$

$0{,}7^2 + \sin^2(\alpha) = 1$

$\sin^2(\alpha) = 1 - 0{,}7^2 = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$

Or α est un angle aigu, donc $\sin(\alpha) > 0$

Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{0{,}51} = \sqrt{\frac{0{,}51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{100}}$

$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{10} \times \frac{10}{7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$